

Distribution ENSEM 2A Énergie



Document d'orientation



G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

7 février 2024

Examen 2024 et correction :

<https://gerard.vinsard.fr/depot/ExamenDistributionCorrection.pdf>

L'enseignement de Distributions en 2023

- ▶ Les séances de cours sont assurées en mode dégradé, i.e.
- ▶ L'enseignant reprend le cours de Xavier Antoine en suivant le plan de son polycopié (sous Arche)
`http://arche.univ-lorraine.fr/pluginfile.php/3029466/mod\_resource/content/1/TheorieDistributionsPlan.pdf`
- ▶ Le déroulement du cours sera donc plutôt une lecture commentée de ce document.
- ▶ Avec quand même quelques explications qui porteront plus sur l'utilisation des distributions en physique que sur la structure mathématique dans laquelle ces notions s'insèrent.

Pages 7 à 11 : l'introduction

► On peut aussi partir de l'exemple du problème du choc élastique : une balle rebondit sur un mur au temps $t = 0$. L'instant d'avant le choc $-\epsilon/2$, sa vitesse est V , l'instant d'après $+\epsilon/2$ elle est $-V$ et la durée entre ces deux instants est très courte par rapport à celle de son temps de vol.

► La seconde loi de Newton est $\frac{d}{dt}(v(t)) = f(t)$ où v est une fonction $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ représentant la vitesse de la balle et f une autre fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ représentant la force appliquée à son centre de gravité,

► Si on suppose qu'il n'y a que le phénomène du choc, la balle se déplace en ligne droite à vitesse constante lors de son vol, et donc la force f ne contient que le terme qui rend compte du choc. qui

est donc $v(t) = \begin{cases} V & \text{si } t < 0 \\ -V & \text{si } t > 0 \end{cases} \Rightarrow f = m \frac{d}{dt}(v(t))$

Pages 12 : les fonctions test

- Ce sont les fonctions indéfiniment différentiables à support compact. Typiquement (mais pas que), si on introduit la fonction de Whitney : (cf. Postnikov)

$$W(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

, ce sont les fonctions de la forme

$$W(f(t))$$

pour f indéfiniment différentiable et tel que
 $t < a$ ou $t > b \Rightarrow f(t) < 0$

- Elles sont nulles en dehors d'un ensemble de longueur finie.
- Leur ensemble $\mathcal{D}$ forme un espace vectoriel.

Pages 13 – 12.5 : les distributions sur $\mathbb{R}$

► Ce sont les formes linéaires continues sur $\mathcal{D}$, leur ensemble est noté $\mathcal{D}'$ et c'est un espace vectoriel.

► Il y a : les distributions régulières qui sont associées à des fonctions localement sommable comme

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

et les distributions singulières pour lesquelles il n'existe pas de fonctions localement sommables dont la formule ci-dessus permettrait d'obtenir la valeur qu'elles affectent à une fonction de $\mathcal{D}$, l'exemple emblématique est celui de la distribution de Dirac

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

Pages 12.5 – 16.5 : 1^o propriétés des distributions

► À partir d'une distribution T , on peut construire la distribution αT où α est une fonction indéfiniment différentiable. Par $\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle$ ($\alpha \varphi$ reste un élément de $\mathcal{D}$).

► Mais attention ! La condition que α soit une fonction indéfiniment différentiable est importante. Par exemple YT , où $Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ -1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$ est l'échelon d'Heaviside, n'a pas de sens.

► On ne peut pas, en général, multiplier les distributions entre elles (sauf évidemment les cas traités dans le polycopié).

- On verra plus tard, les distributions dans l'espace méritent d'être traitées à part.

Pages 21 – 23.5 : Dérivation des distributions

- La définition est

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

- Si f est continue et dérivable partout, sauf en un point a où on note

$$[[f]]_a = \lim_{\varepsilon > 0 \rightarrow 0} f(\varepsilon + a) - \lim_{\varepsilon > 0 \rightarrow 0} f(a - \varepsilon)$$

- et $\{f'\}_a$ la dérivée de f partout sauf en a (Petit l'appelle la dérivée sans précautions) alors

$$(T_f)' = [[f]]_a \delta_a + T_{\{f'\}_a}$$

- La dérivée de δ est δ' telle que

$$\langle \delta'_a, \varphi \rangle = -\varphi'(a)$$

- La distribution « valeur principale », notée vp , est définie par

$$\langle \text{vp}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

Elle apparaît dans le texte comme la dérivée de $T_{t \rightarrow \ln(|t|)}$.

- La distribution « partie finie », notée Pf , est définie par

$$\langle \text{Pf}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t^2} dt$$

C'est la dérivée au sens des distributions de vp .

► Le bas de la p. 12 donne les propriétés de convergence dans $\mathcal{D}$: en utilisant la norme max, une suite de fonction de $\mathcal{D}$ converge vers une fonction de $\mathcal{D}$ si toute les suites formées par dérivation un nombre quelconque de fois convergent uniformément vers la dérivée au même ordre de cette fonction.

C'est utilisé p. 13 pour préciser ce qu'on entend pas continuité de la forme linéaire qui sera une distribution.

► Les p. 28 et sqq s'intéressent aux questions de convergences de suites de distribution.

- Comme pour les pp. 17.5 – 18 , on verra plus tard, les distributions dans l'espace méritent d'être traitées à part.

Pages 35 à 39 : Introduction de l'opérateur de convolution pour les distributions

- On sait que le produit de convolution de deux fonctions f et g s'écrit

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) dt$$

- Pour deux distributions T et S , c'est $T * S$ tel que

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T(t), \langle S(s), \varphi(t+s) \rangle \rangle$$

où on a donné à T et S l'indication de la variable muette t et s qui lui correspond par $T(t)$ et $S(s)$.

- La convolution de deux distributions n'est pas toujours possible mais le théorème 4.2 (p. 39) donne quelques cas où elle est possible.

Pages 40 à 44 : Utilisations du produit de convolution

- La propriété majeure du produit de convolution est

$$(T * S)' = T' * S = T * S'$$

- Couplée avec

$$\delta * T = T$$

on obtient que

$$T' = (\delta * T)' = \delta' * T$$

ce qui permet de voir un problème d'EDOS comme une recherche d'inverse de convolution, i.e. trouver T^{*-1} tel que

$$T^{*-1} * T = \delta$$

(et vice-versa).

Pages 17 à 18 Distributions sur $\mathbb{R}^d$

► Si on donne $\mathcal{D}$ comme les fonctions indef. différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^d$, soit

$$\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{alors } \mathcal{D}'$$

$$X = (x_1, \dots, x_d) \longrightarrow \varphi(X) = \varphi(x_1, \dots, x_d)$$

est l'ensemble des formes linéaires continue sur $\mathcal{D}$.

► Les distributions régulières sont les $T_{X \rightarrow \rho(X)}$ telles que

$$\begin{aligned} \langle T_{X \rightarrow \rho(X)}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X) \rho(X) dV \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_d \varphi(x_1, \dots, x_d) \rho(x_1, \dots, x_d) \end{aligned}$$

► Et les distributions singulières sont celles qui ne se mettent pas sous cette forme, comme, bien sûr δ telle que

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = \varphi(0, \dots, 0)$$

Pages 31 à 33.5 : Dérivées des distributions sur $\mathbb{R}^d - 1$

- On procède comme dans le cas $d = 1$ pour chacune des coordonnées, soit

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

- Et on envisage le cas d'une (hyper)surface Γ de $\mathbb{R}^d$ fermée sur elle même et donc séparant $\mathbb{R}^d$ en deux parties disjointes (des domaines) appelés D et $\mathbb{R}^d / D$.

- Cette surface est lisse, munie d'un champ de normales

$$\begin{array}{lll} n : \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ X = (x_1, \dots, x_d) & \longrightarrow & n = (n_1, \dots, n_d) \end{array}$$

dirigé vers l'extérieur de D .

Pages 31 à 33.5 : Dérivées des distributions sur $\mathbb{R}^d$ – 2

► On donne alors une fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ localement sommable et (éventuellement) discontinue en Γ telle que

$$\forall X \in \Gamma : f_i(X) = \lim_{\varepsilon > 0 \rightarrow 0} f(X - \varepsilon n) ; \quad f_x(X) = \lim_{\varepsilon > 0 \rightarrow 0} f(X + \varepsilon n)$$

et on appelle le saut de f sur (à la traversée) de Γ , la fonction

$$\begin{aligned} [[f]]_\Gamma : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longrightarrow [[f]]_\Gamma(X) = f_x(X) - f_i(X) \end{aligned}$$

► On obtient le résultat

$$\frac{\partial T_{X \rightarrow f(X)}}{\partial x_i} = T_{X \rightarrow \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\}} + [[f]]_\Gamma \delta_\Gamma n_i$$

où la distribution δ_Γ est telle que

$$\langle \delta_\Gamma, \varphi \rangle = \int_\Gamma \varphi \, dS$$

► D'où vient qu'en dimension $d = 3$ et pour l'opérateur laplacien

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta T_{X \rightarrow f(X)} = T_{X \rightarrow \{\Delta f(X)\}} + \left[\left[\frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \right]_{\Gamma} \delta_{\Gamma} + \vec{\nabla} \cdot ([f]_{\Gamma} \delta_{\Gamma} n)$$

Distributions régulières scalaire et vectorielle

► Une distribution scalaire T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$. Elle est régulière quand elle est associée à un champ scalaire $\psi : \vec{x} \longrightarrow \varphi(\vec{x})$ (localement sommable), se note conséquemment comme T_ψ et s'exprime comme

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{E_3} \varphi \psi dV$$

► Une distribution vectorielle est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^3$. Elle est régulière quand elle est associée à un champ de vecteurs $\vec{v} : \vec{x} \longrightarrow \vec{v}(\vec{x})$ (localement sommable), se note conséquemment comme $\vec{T}_{\vec{v}}$ et s'exprime comme

$$\langle \vec{T}_{\vec{v}}, \vec{\varphi} \rangle = \int_{E_3} \vec{\varphi} \cdot \vec{v} dV$$

Exemples de Distributions singulières

- Il y a le Dirac au point $\vec{y}$, qu'on note $\delta_{\vec{y}}$ (avec $\delta = \delta_{\vec{0}}$) tel que

$$\langle \delta_{\vec{y}}, \varphi \rangle = \varphi(\vec{y})$$

- Mais aussi le Dirac de surface S qu'on note δ_S tel que

$$\langle \delta_S, \varphi \rangle = \int_S \varphi dS$$

- Et encore d'autres, comme le dirac de ligne.

- Ou encore qui s'obtiennent par composition, comme $T = g\delta_S$ tel que, pour $g : \vec{x} \longrightarrow g(\vec{x})$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_S g \varphi dS$$

Opérateurs différentiels appliqués aux distributions de $E_3 - 1$

► Pour des champs scalaires ψ et de vecteurs $\vec{v}$, on connaît les opérateurs :

- gradient de champs de scalaires $\vec{\nabla}\psi$;
- et divergence de champs de vecteurs $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$.

Ainsi que la formule de Green-Ostrogradski

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{v} \, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{n}\cdot\vec{v} \, dS$$

Pour Ω un domaine de E_3 de bord $\partial\Omega$ suffisamment lisse pour qu'on puisse affecter en chacun de ses points un vecteur normal $\vec{n}$. On sait encore (formule d'analyse vectorielle) que

$$\vec{\nabla}\cdot(\psi \vec{v}) = \psi \vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{v}$$

D'où vient que

$$\int_{\Omega} \psi \vec{\nabla}\cdot\vec{v} \, dV + \int_{\Omega} \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{v} \, dV = \int_{\partial\Omega} \psi (\vec{n}\cdot\vec{v}) \, dS$$

Opérateurs différentiels appliqués aux distributions de $E_3 - 2$

► Si $\psi = \varphi$ est une fonction de $\mathcal{D}$ et que $\Omega = E_3$, alors

$$\int_{E_3} \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = - \int_{E_3} \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{v} dV$$

Et si, de plus, on introduit $\vec{T}_{\vec{v}}$ la distribution vectorielle telle que

$$\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^3 \quad : \quad \langle \vec{T}_{\vec{v}}, \vec{\varphi} \rangle = \int_{E_3} \vec{\varphi} \cdot \vec{v} dV$$

alors

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_{\vec{v}}, \varphi \rangle = - \langle \vec{T}_{\vec{v}}, \vec{\nabla} \varphi \rangle$$

On généralise la formule pour toute distribution vectorielle, ce qui donne la définition de la divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{T}$ d'une distribution vectorielle $\vec{T}$ comme

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{T}, \varphi \rangle = - \langle \vec{T}, \vec{\nabla} \varphi \rangle$$

Opérateurs différentiels appliqués aux distributions de E_3 – 3

► Si $\vec{v} = \vec{\varphi}$ est un champ de vecteurs de $\mathcal{D}^3$ et que $\Omega = E_3$, alors

$$\int_{E_3} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\varphi} dV = - \int_{E_3} \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} dV$$

Et si, de plus, on introduit T_ψ la distribution scalaire telle que

$$\varphi \in \mathcal{D} \quad : \quad \langle T_\psi, \varphi \rangle = \int_{E_3} \varphi \psi dV$$

alors

$$\langle \vec{\nabla} T_\psi, \vec{\varphi} \rangle = - \langle T_\psi, \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} \rangle$$

On généralise la formule pour toute distribution scalaire, ce qui donne la définition du **gradient $\vec{\nabla} T$ d'une distribution scalaire T comme**

$$\langle \vec{\nabla} T, \vec{\varphi} \rangle = - \langle T, \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} \rangle$$

Opérateurs différentiels appliqués aux distributions de $E_3 - 3$

► En composant la divergence et le gradient, on obtient le laplacien : $\Delta \psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi)$

► Pour les distributions on obtient que le laplacien de la distribution scalaire T est ΔT tel que

$$\begin{aligned} \langle \Delta T, \varphi \rangle &= \langle \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T), \varphi \rangle = -\langle \vec{\nabla} T, \vec{\nabla} \varphi \rangle \\ &= +\langle T, \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle \end{aligned}$$

► Et on pourrait encore donner d'autres formules qui suivent exactement celles de l'analyse vectorielle (notamment en introduisant le produit vectoriel, le rotationnel) et tensorielle.

Convolution – 1

► Si on donne deux champs de scalaires $G : \vec{x} \longrightarrow G(\vec{x})$ et $\rho : \vec{x} \longrightarrow \rho(\vec{x})$, on peut former un troisième champ $G * \rho$ tel que

$$G * \rho : \vec{y} \longrightarrow \int_{E_3} \rho(\vec{x}) G(\vec{y} - \vec{x}) dV$$

C'est le produit de convolution de G et ψ . Il y a bien sûr des conditions d'existences sur lesquelles on ne s'étend pas dans ces compléments.

► Comme pour les fonctions scalaires, la définition du produit de convolution de deux distributions T et S , s'écrit

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T(\vec{x}), \langle S(\vec{y}), \varphi(\vec{y} + \vec{x}) \rangle \rangle$$

et d'une part bénéficie des mêmes propriétés et d'autre part souffre des mêmes apories que dans le cas 1D.

Convolution – 2

► Parmi toutes les utilisations qui peuvent être faite du produit de convolution, l'une d'entre elle est particulièrement utile. Si on donne $T_{\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}}$, c'est une distribution parce que $\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}$ est localement sommable. Le seul problème possible est en $\vec{x} = \vec{0}$ et

$$\int_{|\vec{x}| < R} \frac{1}{|\vec{x}|} dV = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^R r^2 dr \frac{1}{r} = 2\pi R^2$$

► On a $\Delta T_{\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}} = -4\pi \delta$, en effet

$$\langle \Delta T_{\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}}, \varphi \rangle = \langle T_{\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}}, \Delta \varphi \rangle$$

Compte tenu qu'en sphérique

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2}$$

le second terme conduit facilement au résultat.

Convolution – 3

► La solution de $\Delta f + \rho = 0$ où $\rho : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ peut être cherchée : 1/ en considérant le problème T

$$\Delta T_f + T_\rho = 0$$

2/ en convoluant cette expression par $T_{\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}}$ on obtient

$$T_{\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}} * \Delta T_f + T_{\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}} * T_\rho = 0$$

compte tenu que

$$T_{\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}} * \Delta T_f = \Delta T_{\vec{x} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x}|}} * T_f = -4\pi \delta * T_f = -4\pi T_f$$

et en revenant aux fonctions on obtient

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dV$$

(la variable muette d'intégration est $\vec{y}$)

Formulaire de transformées de Fourier des fonctions – 1

- Deux notations pour la transformée de Fourier

$$\tilde{f}(\nu) = \text{TF}(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp^{-2i\pi\nu x} dx$$

- Transformée de Fourier inverse (conjuguée)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu) \exp^{+2i\pi\nu x} d\nu$$

- Quelques transformées

Original	Transformée	Original	Transformée
$f'(x)$	$2i\pi\nu \tilde{f}(\nu)$	$f(x/X)$	$ X \tilde{f}(X\nu)$
$-2i\pi x f(x)$	$\tilde{f}'(\nu)$	$f(x) \exp^{(2i\nu_0\pi x)}$	$\tilde{f}(\nu - \nu_0)$
$f(x-a)$	$e^{-2i\pi\nu a} \tilde{f}(\nu)$	$e^{-x^2/(2\sigma^2)} / (\sqrt{2\pi}\sigma)$	$\exp^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$

► Propriétés

$$\tilde{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu$$

$$\text{TF}(f * g) = \text{TF}(f) \text{TF}(g)$$

$$\text{TF}(f g) = \text{TF}(f) * \text{TF}(g)$$

► Bien entendu, il y a des limitations à ces formules qui sont sujettes aux dépendances fonctionnelles des fonctions (sommables $\in L^1$ et/ou $\in L^2$).

Pages 43 à 46.5 : Transformée de Fourier des distributions

- La définition de la transformée de Fourier des distributions est

$$\langle \text{TF}(T), \varphi \rangle = \langle T, \text{TF}(\varphi) \rangle$$

Mais elle est problématique parce que si dans le membre de gauche $\varphi \in \mathcal{D}$ alors $\text{TF}(\varphi) \notin \mathcal{D}$.

- D'où la nécessité d'élargir l'espace $\mathcal{D}$ par l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions à décroissance rapide (ou de Schwartz) (def. p. 43). On a $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$

- Les distributions tempérées seront celles des distributions de $\mathcal{D}'$ qui sont des formes linéaires, continues sur $\mathcal{S}$. On les note $\mathcal{S}'$
*C'est cohérent parce que si $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$
(c'est une propriété de la dimension infinie, plus l'espace de fonctions est grand, plus son dual –les formes linéaires construites sur lui– est petit).*

Pages 45 : Les éléments de $\mathcal{S}'$

- Les distributions à support (p. 34) compact sont éléments de $\mathcal{S}'$, notamment $\delta \in \mathcal{S}'$ et (p. 47)

$$\text{TF}(\delta)(\nu) = T_{\nu \rightarrow 1}$$

- Les fonctions localement à croissance lente (def. 5.3, p. 44) permettent de construire une distribution tempérée régulières ;
- Ainsi que les fonctions de L^1 ($\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|$ existe).
- La dérivée d'une distribution tempérée est une distribution tempérée ;
- Pour la multiplication avec une fonction, il faut regarder au cas à cas.

Formulaire de transformées de Fourier des distributions

$$\blacktriangleright \text{TF}(\delta)(\nu) = T_{\nu \rightarrow 1}$$

$$\blacktriangleright \text{TF}(T_{x \rightarrow 1})(\nu) = \delta$$

$$\blacktriangleright \text{TF}(\sqcup) = \sqcup$$

$$\blacktriangleright \text{TF}(T_{x \rightarrow Y(x)})(\nu) = \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2i\pi} \text{vp} \left(\frac{1}{\nu} \right)$$

Transformée de Fourier de champs – 1

- Si ψ est un champ de scalaire, sa transformée de Fourier est $\tilde{\psi}$ qui est un champ de scalaire déterminé par

$$\tilde{\psi}(\vec{k}) = \int_{E_3} \psi(\vec{x}) \exp^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dV_{\vec{x}}$$

et, la TF d'un champ de vecteurs $\vec{v}$ est $\tilde{\vec{v}}$ qui est un champ de vecteur déterminé par

$$\tilde{\vec{v}}(\vec{k}) = \int_{E_3} \vec{v}(\vec{x}) \exp^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dV_{\vec{x}}$$

- Les inverses sont

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{E_3} \tilde{\psi}(\vec{k}) \exp^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} dV_{\vec{k}}$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{E_3} \tilde{\vec{v}}(\vec{k}) \exp^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} dV_{\vec{k}}$$

Transformée de Fourier de champs – 2

$$\blacktriangleright \text{TF}(\vec{\nabla}\psi)(\vec{k}) = i \vec{k} \text{TF}(\psi)(\vec{k})$$

$$\blacktriangleright \text{TF}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})(\vec{k}) = i \vec{k} \cdot \text{TF}(\vec{v})(\vec{k})$$

$$\blacktriangleright \text{D'où } \text{TF}(\Delta(\psi))(\vec{k}) = -|\vec{k}|^2 \text{TF}(\psi)(\vec{k})$$

Pour ces deux planches, je n'ai pas eu le temps de vérifier les constantes de normalisation, elles ne sont là que pour faire remarquer que ce n'est pas plus difficile de pratiquer la TF sur des champs que sur des fonctions à variable (et valeur) réelle.

Bibliographie

Appel, W. (2002). Mathématiques pour la physique et les physiciens. H & K.

Petit, R. (1987). L'outil mathématique pour la physique. Dunod.

Pinchard, L. (1990). Électromagnétisme classique et théorie des distributions. Ellipse.

Roubine, E. (1982). Distributions, Signal. Eyrolles.

Schwartz, L. (1957). Théorie des distributions (t. 1 & 2). Hermann (bon, là c'est pour rigoler).