

①

Transformée de Laplace

$\text{Re}(p) > 0$

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow f(t)$$

TL

$$\tilde{f}: \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$$

$$p \rightarrow \tilde{f}(p)$$

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$



$$\tilde{f}(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{f}(p) = 0$$

$$\tilde{f}' = \text{TL}(f')$$

$$\tilde{f}'(p) = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = p \tilde{f}(p) - f(0)$$

$$= \left[f(t) e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) (-e^{-pt}) dt$$

②

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \tilde{f}(p) = f(0)$$

$$\mathcal{TL}(f_\tau \text{ avec } f_\tau(t) = f(t-\tau)) = \tilde{f}(p) e^{p\tau}$$

$$\mathcal{TL}(f(t) e^{-t/2}) = \tilde{f}(p + \frac{1}{2})$$

③ Pour la diffusion

$$TL\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$TL\left(2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right) = \frac{1}{p^{3/4}}$$

$$TL\left(\exp\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right)\right) = \frac{1}{p} e^{-s\sqrt{p}}$$

$$TL\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-s^2/4t}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-s\sqrt{p}}$$

$$TL\left(2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-s^2/4t} - s \exp\left(\frac{s}{2\sqrt{t}}\right)\right) = \frac{1}{p^{3/4}} e^{-s\sqrt{p}}$$

④ Exemple

$$\begin{array}{c} | \\ \hline 0 \qquad \qquad \qquad \infty \end{array}$$

$$\partial_t p = \alpha \partial_{xx}^2 p = 0 \quad 0 < x$$

$$p(t=0, x) = 0$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} \partial_t p(t, x=0) = C(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p = \alpha \frac{\partial p}{\partial x}(t, x=0) = \Phi(t) \end{array} \right.$$

$$\textcircled{5} \quad \tilde{p}(p, x) = \int_0^{+\infty} p(t, x) e^{-pt} dt$$

$$\rightarrow p \tilde{p} - \alpha \partial_{xx}^2 \tilde{p} = 0$$

$$\rightarrow \tilde{p} = a e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}} x} + b e^{+\sqrt{\frac{p}{\alpha}} x}$$

"0 can
 $\tilde{p} \rightarrow 0$ à l'infini

$$\text{si } p(t, x=0) = C(t)$$

$$\tilde{p}(p, x=0) = \tilde{C}(p) \quad \left(\int_0^{+\infty} C(t) e^{-pt} dt \right)$$

$$\text{et } \boxed{\tilde{p} = \tilde{C}(p) e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}} x}}$$

⑥ Si $C(t) = C_0$ constante

$$\tilde{C}(p) = \frac{C_0}{p}$$

et $\tilde{\rho}(p, x) = \frac{C_0}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}} x}$ $h = \frac{2\ell}{\sqrt{\alpha}}$

$$\rightarrow \rho(t, x) = C_0 \exp\left(-\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

Reste à savoir ce qu'est $\exp$

$\rightarrow$ TD

②

$$\text{si} \quad -\alpha \frac{\partial \rho}{\partial n}(t, n=0) = \phi(t)$$

$$+ \alpha \sqrt{\frac{p}{\alpha}} a = \tilde{\phi}(p) \quad (= \int_0^{\infty} \phi(t) e^{-pt} dt)$$

$$\text{et} \quad \boxed{\tilde{\rho} = \frac{+\tilde{\phi}(p)}{\sqrt{\alpha p}} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}} x}}$$

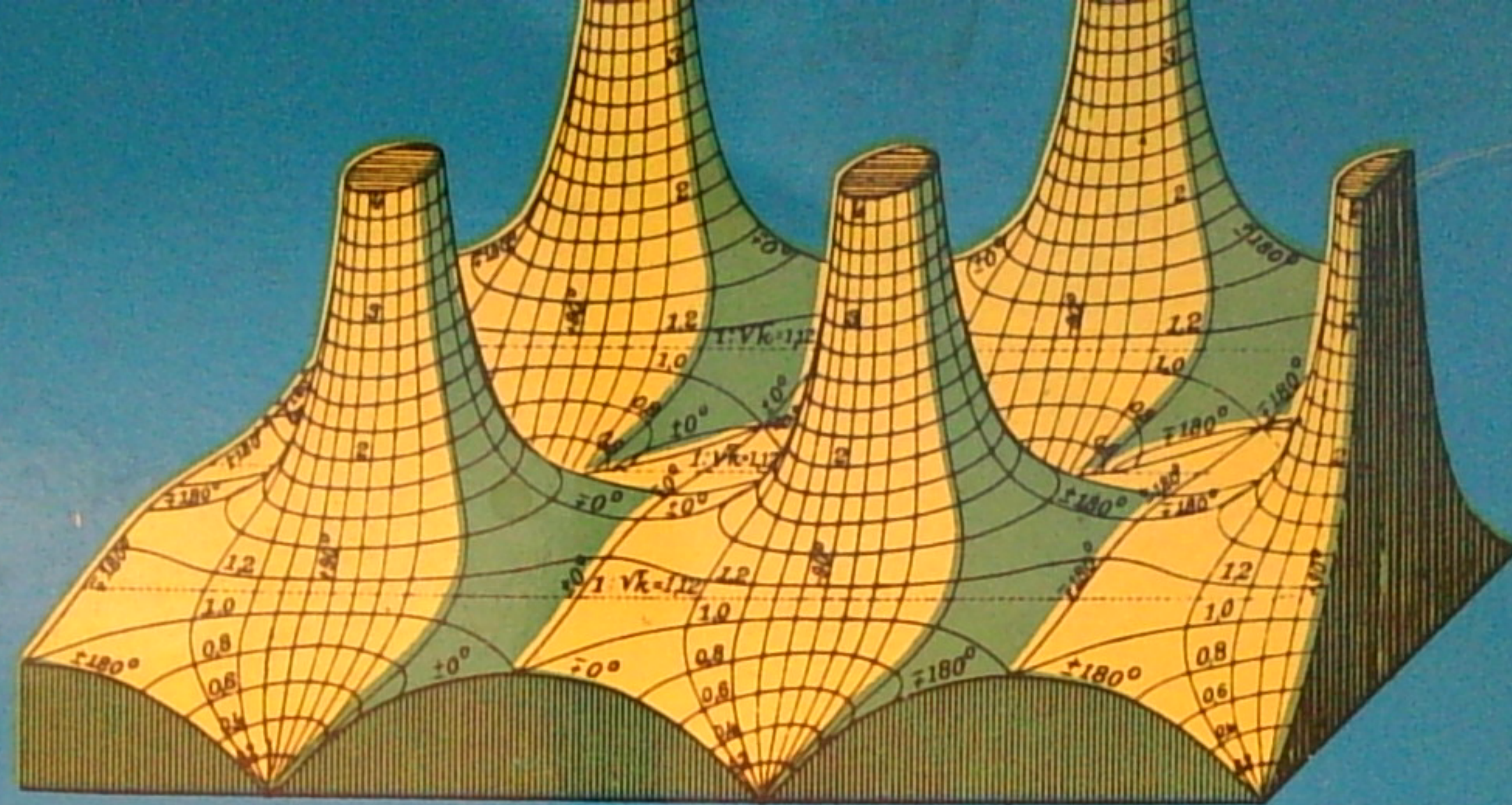
$$\text{si} \quad \phi(t) = \phi_0 \quad \text{si } t \rightarrow \infty \quad \tilde{\phi}(p) = \frac{\phi_0}{p}$$

$$\text{et} \quad \tilde{\rho}(p, x) = \frac{+\phi_0}{\sqrt{\alpha} p^{3/2}} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}} x} \quad (\text{est.})$$

⑧

$$\rightarrow \rho(t, x) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{\alpha}} \left(2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} - \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right)$$

$$\rho(t, x=0) = \frac{2\Phi_0}{\pi\sqrt{\alpha}} \sqrt{t}$$



Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun

	$f(s)$	$F(t)$		$f(s)$
29.3.41	$\frac{1}{\sqrt{s}(s+a^2)}$	$\frac{2}{a\sqrt{\pi}} e^{-a^2 t} \int_0^{a\sqrt{t}} e^{\lambda^2} d\lambda$	7	29.3.58 $(\sqrt{s^2+a^2}-s)^k$ ($k>0$)
29.3.42	$\frac{b^2-a^2}{(s-a^2)(b+\sqrt{s})}$	$e^{a^2 t} [b-a \operatorname{erf} a\sqrt{t}] - b e^{b^2 t} \operatorname{erfc} b\sqrt{t}$	7	29.3.59 $\frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^\nu}{\sqrt{s^2-a^2}}$ ($\nu>-1$)
29.3.43	$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+a)}$	$e^{a^2 t} \operatorname{erfc} a\sqrt{t}$	7	29.3.60 $\frac{1}{(s^2-a^2)^k}$ ($k>0$)
29.3.44	$\frac{1}{(s+a)\sqrt{s+b}}$	$\frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{-at} \operatorname{erf} (\sqrt{b-a}\sqrt{t})$	7	29.3.61 $\frac{1}{s} e^{-ks}$
29.3.45	$\frac{b^2-a^2}{\sqrt{s}(s-a^2)(\sqrt{s}+b)}$	$e^{a^2 t} \left[\frac{b}{a} \operatorname{erf} (a\sqrt{t}) - 1 \right] + e^{b^2 t} \operatorname{erfc} b\sqrt{t}$	7	29.3.62 $\frac{1}{s^2} e^{-ks}$
29.3.46	$\frac{(1-s)^n}{s^{n+\frac{1}{2}}}$	$\frac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi t}} H_{2n}(\sqrt{t})$	22	29.3.63 $\frac{1}{s^\mu} e^{-ks}$ ($\mu>0$)
29.3.47	$\frac{(1-s)^n}{s^{n+\frac{1}{2}}}$	$\frac{n!}{(2n+1)!\sqrt{\pi}} H_{2n+1}(\sqrt{t})$	22	29.3.64 $\frac{1-e^{-ks}}{s}$
29.3.48	$\frac{\sqrt{s+2a}}{\sqrt{s}} - 1$	$a e^{-at} [I_1(at) + I_0(at)]$	9	29.3.65 $\frac{1}{s(1-e^{-ks})} = \frac{1+\coth \frac{1}{2}ks}{2s}$
29.3.49	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-\frac{1}{2}(a+b)t} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$	9	29.3.66 $\frac{1}{s(e^{ks}-a)}$
29.3.50	$\frac{\Gamma(k)}{(s+a)^k(s+b)^k}$ ($k>0$)	$\sqrt{\pi} \left(\frac{t}{a-b}\right)^{k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(a+b)t} I_{k-\frac{1}{2}}\left(\frac{a-b}{2}t\right)$	10	29.3.67 $\frac{1}{s} \tanh ks$
29.3.51	$\frac{1}{(s+a)^{\frac{1}{2}}(s+b)^{\frac{1}{2}}}$	$t e^{-\frac{1}{2}(a+b)t} \left[I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right) + I_1\left(\frac{a-b}{2}t\right) \right]$	9	
29.3.52	$\frac{\sqrt{s+2a}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+2a}+\sqrt{s}}$	$\frac{1}{t} e^{-at} I_1(at)$	9	
29.3.53	$\frac{(a-b)^k}{(\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b})^{2k}}$ ($k>0$)	$\frac{k}{t} e^{-\frac{1}{2}(a+b)t} I_k\left(\frac{a-b}{2}t\right)$	9	
29.3.54	$(\sqrt{s+a}+\sqrt{s})^{-2\nu}$	1		

⑨ Formule d'inversion de la TL

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

↓

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(p_0 + i\omega) e^{(p_0 + i\omega)t} d\omega$$

avec $p_0 > \alpha$ où α est tel que

$$|\tilde{f}(x + iy)| < \infty \quad \text{si } x > \alpha$$

⑩ Example

$$f(t) = e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad \tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} e^{-pt} dt$$
$$= \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_0 + i\omega + \frac{1}{\tau}} e^{(p_0 + i\omega)t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(p_0 + \frac{1}{\tau}) - i\omega}{(p_0 + \frac{1}{\tau})^2 + \omega^2} e^{p_0 t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega$$

Possibly $h = (p_0 + \frac{1}{\tau}) t$

(11)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b/t - i\omega}{b^2/t^2 + \omega^2} e^{Pot} (\cos \omega t + i \sin \omega t) d\omega$$

Posons $u = \omega t$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b - iu}{b^2 + u^2} e^{Pot} (\cos u + i \sin u) du$$

$$= \frac{e^{Pot}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{b \cos u}{b^2 + u^2} + \frac{u \sin u}{b^2 + u^2} + i \left(\frac{b \sin u}{b^2 + u^2} - \frac{u \cos u}{b^2 + u^2} \right) \right) du$$

o (par impaire)

$$et \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u}{b^2 + u^2} du = \frac{\pi e^{-b}}{b}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u \sin u}{b^2 + u^2} du = \pi e^{-b}$$

(12) d'au

$$= e^{p_0 t} e^{-t} = e^{p_0 t} e^{-(p_0 + \frac{1}{2})t} = \underline{e^{-t/2}}$$

On a bien retrouvé l'original mais...

— au prix d'un calcul fastidieux.

— et d'un calcul qui suppose qu'on connaît des intégrales particulières comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u}{1+u^2} du$$

⑬ En fait la formule d'inversion

$$\left\{ \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\rho_0 + i\omega) e^{(\rho_0 + i\omega)t} d\omega \end{aligned} \right.$$

avec $\rho_0 > \alpha \dots$

n'est applicable que si on la restitue
dans le contexte de l'intégration dans
le plan complexe des fonctions de
variable complexe

Ex sur l'exemple il fallait prendre $\rho_0 > \frac{1}{2}$
pour éviter $b = 0$

(14)

la difficulté de la méthode de la
transformée de Laplace est le retour à
l'original!

$\Rightarrow$ tables, comme celle d'Abrahamowitz
Stegun (ou logiciel de calcul symboli-
que)

(15)

Tantefois la TL est utile pour résoudre des problèmes de commande.

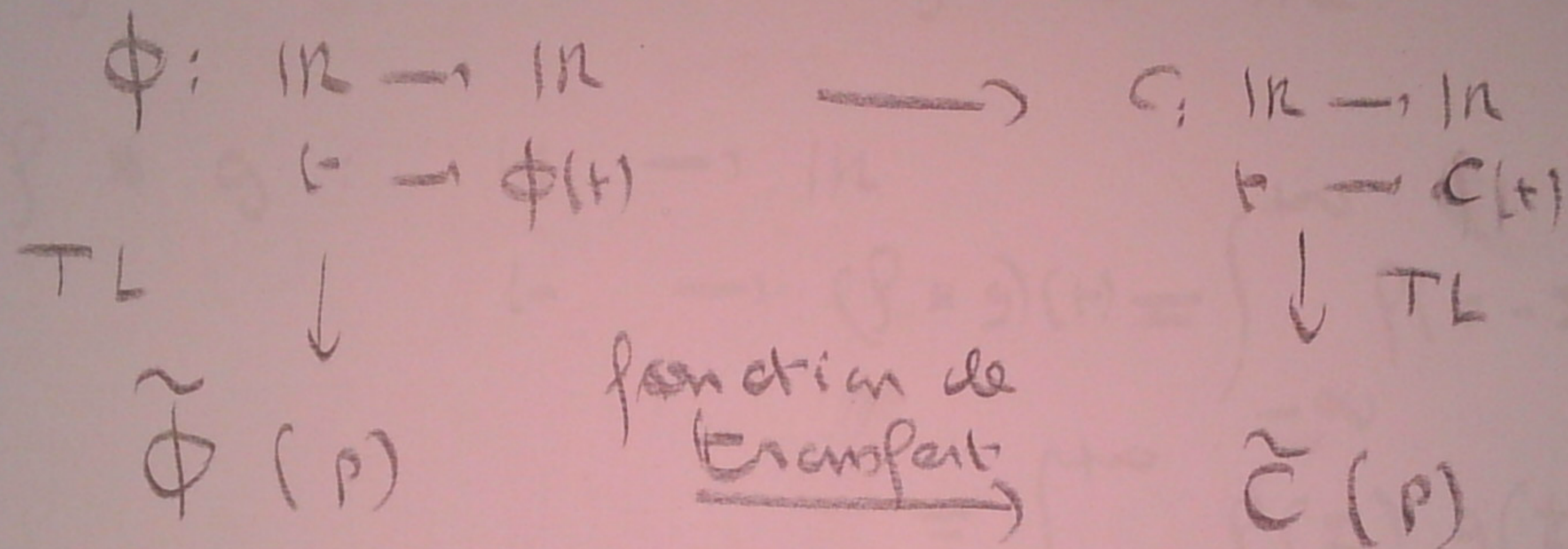
Par exemple on peut choisir la loi d'injection de porteurs $\phi(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(t) \\ \hline n=0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \partial_t \rho - \alpha \partial_{nn}^2 \rho = 0 \\ \rho(t=0) = c \\ \alpha \partial_n \rho(n=0, t) = \phi(t) \end{array} \quad \infty$$

et on cherche celle qui correspond à la consigne $\rho(t, n=0) = C(t)$

⑥

Avec la transformée de Laplace



$$\tilde{C}(p) = \frac{\tilde{\Phi}(p)}{\sqrt{\alpha p}}$$

soit $\tilde{\Phi}(p) = \sqrt{\alpha p} \tilde{C}(p)$

① Convolution

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$(f * g) = (g * f)$$

Il y a des conditions d'existence...

(18) Échelon d'Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$(fH)(t) = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} fH * gH(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) H(t-\tau) g(\tau) H(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

(15)

$$fH * gH \xrightarrow{TL} \tilde{f} \tilde{g}$$

Em offer

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) H(t-\tau) g(\tau) H(\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t-\tau) H(t-\tau) e^{-pt} dt \right) g(\tau) H(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(p) e^{-p\tau} g(\tau) H(\tau) d\tau \\ &= \tilde{f}(p) \tilde{g}(p) \end{aligned}$$

(20)

Si on a une relation

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Commande}}}{\tilde{Q}(p)} = \tilde{F}(p) \underset{\substack{\leftarrow \text{consigne}}}{\tilde{C}(p)}$$

alors

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t-\tau) H(t-\tau) C(\tau) H(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t F(t-\tau) C(\tau) d\tau \end{aligned}$$