

① densité de quantité (Nb/m^2)

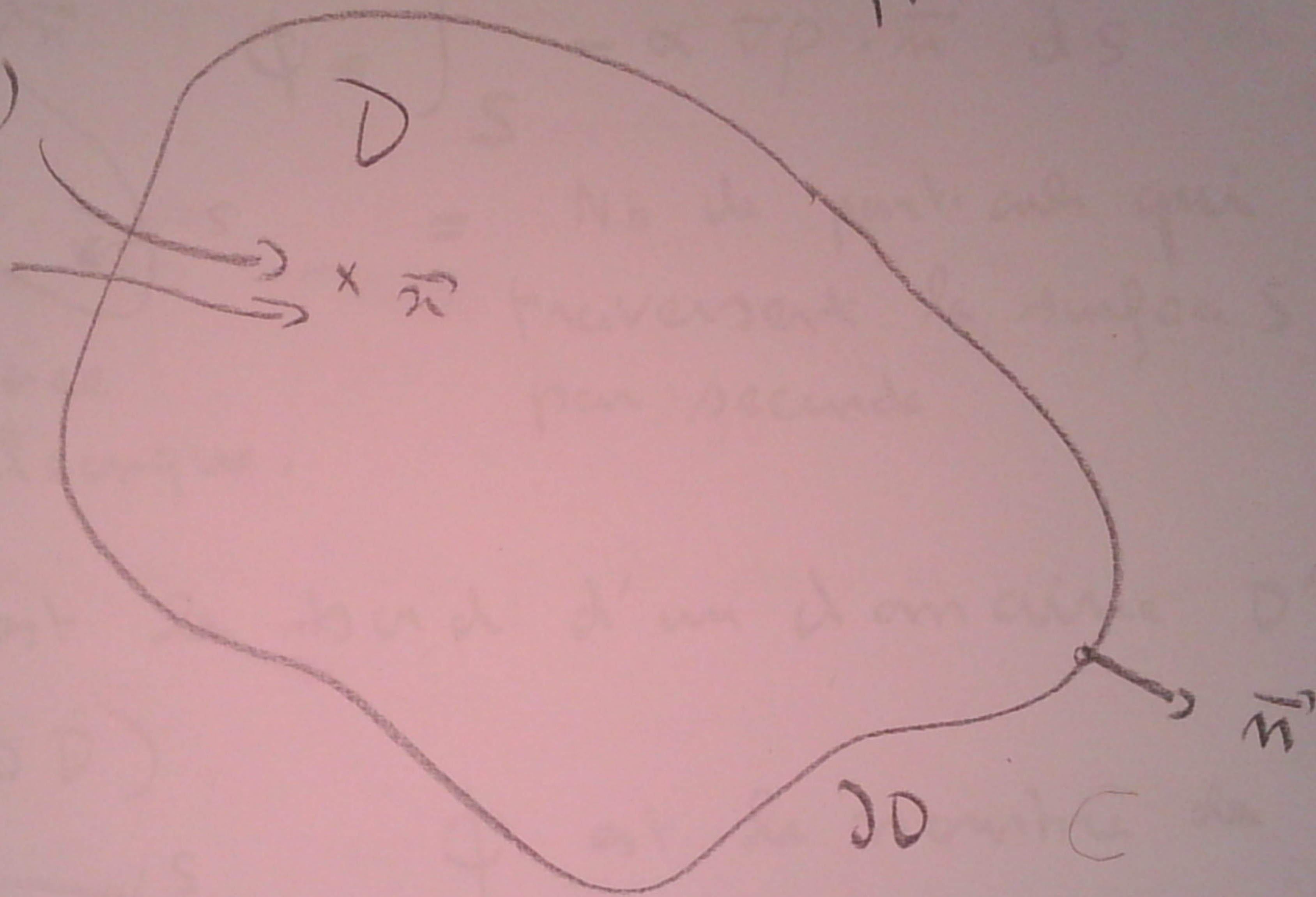
Diffusion

$\rho(t, \vec{x})$

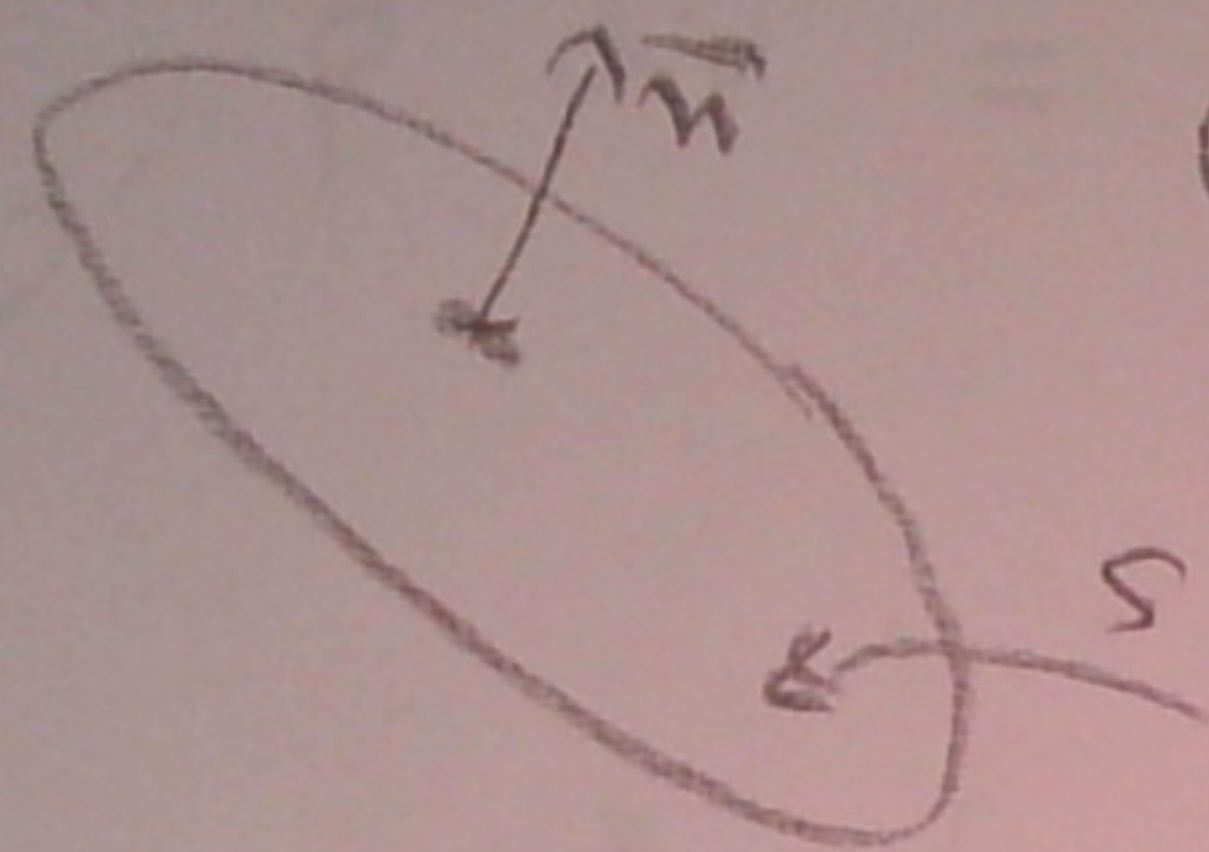
$$\vec{\Phi} = -\alpha \vec{\nabla} \rho$$

flux de
quantité
(Nb/m^2s)

$$\alpha \sim m^2/s$$



②



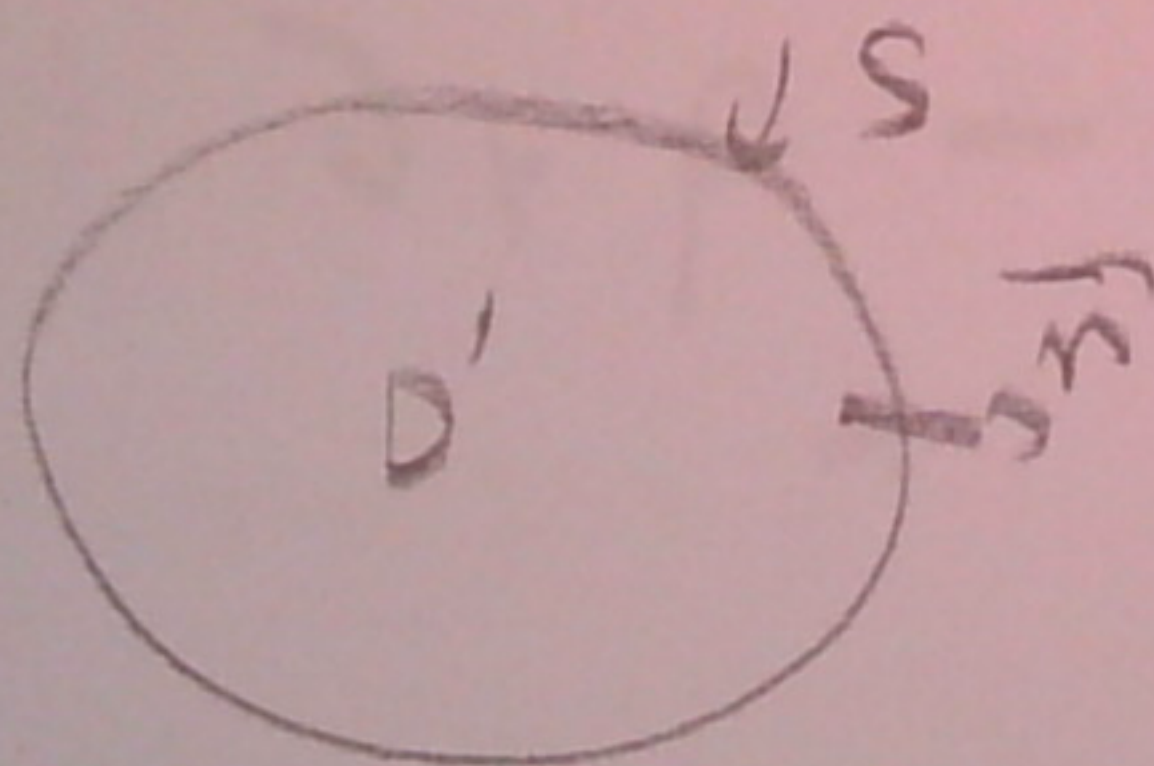
Surface
quelconque.

$$\Phi = \int_S -\alpha \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{n} \, dS$$

= Nb de particules qui
traversent la surface S
par seconde

Si S est le bord d'un domaine D'

$$(S = \partial D)$$



Φ est le nombre de
particules qui quittent
 D' par seconde

③

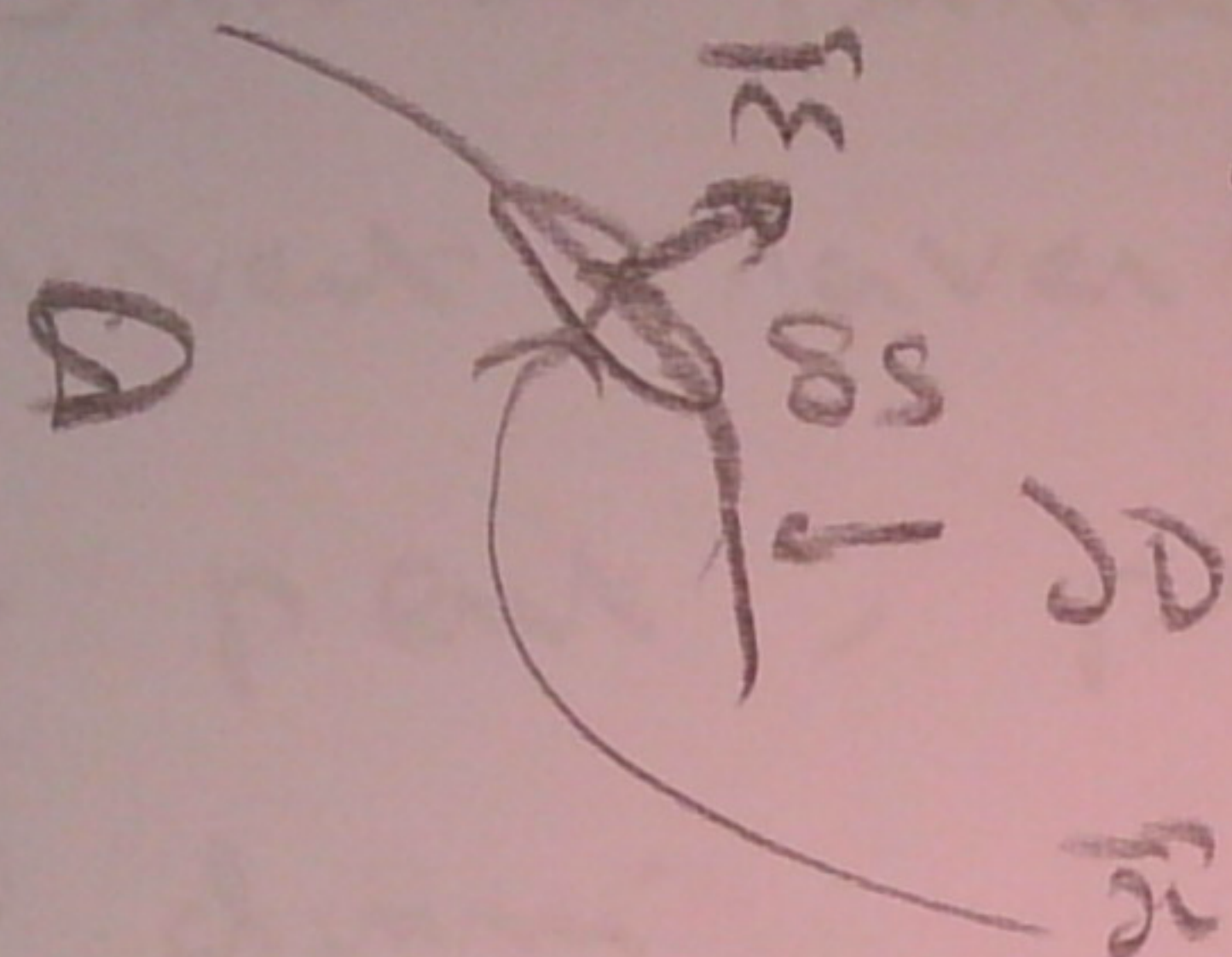
$$\int_{D'} \rho \, dv = \text{Nombre de particules dans le domaine } D'$$

—
donc $\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho \, dv + \int_{\partial D'} -\alpha \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{n} \, dS = 0$

Si D' est un très petit domaine autour de $\vec{r} \in D$

$$\rightarrow \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} \rho) = 0$$

④ Sur ∂D



$-\alpha \nabla \rho \cdot \vec{n} \cdot SS = \text{nombre}$
de particules qui quittent
 D en passant par SS

Sur

• Les parties de ∂D imperméables au partial
on écrit $-\alpha \nabla \rho \cdot \vec{n} = 0$

• Sur les autres on doit expliciter ce
nombre. $-\alpha \nabla \rho \cdot \vec{n} = \Phi$ donné

⑤

Sur les parties de DD que les particules
peuvent traverser,

on peut, plutôt que de spécifier
 Φ donné

dire que $p = \underline{p}_{\text{donné}}$

(par raison d'approximation
d'un mécanisme physique complexe)

⑥ détails de calcul

$$\rho(t, \vec{r}) = \rho(t, x, y, z)$$

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{\Phi}(t, \vec{r}) = \Phi_x(t, x, y, z) \vec{e}_x + \Phi_y(t, x, y, z) \vec{e}_y + \Phi_z(t, x, y, z) \vec{e}_z$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$$

⑦

Coord. cylindriques

$$\rho(t, \vec{r}) = \rho(t, r, \theta, z)$$

$$r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{\Phi}(t, \vec{r}) = \Phi_r(t, r, \theta, z) \vec{e}_r + \Phi_\theta(t, r, \theta, z) \vec{e}_\theta + \Phi_z(t, r, \theta, z) \vec{e}_z$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$$

⑧

Coord. Sphériques

$$\rho(t, \vec{r}) = \rho(t, r, \theta, \varphi)$$

$$r \parallel \vec{e}_r$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_3 + \cos \theta (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\Phi}' = \Phi_r(t, r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + \Phi_\theta(t, r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + \Phi_\varphi(t, r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Phi_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Phi_\theta) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_\varphi \end{aligned}$$