Transfert inductif d'énergie électromagnétique
Exercices corrigés
Leçon 5

G. Vinsard

7 octobre 2014

Exercice No 1 Réécrire le modèle $\mathbf{T} - \mathbf{\Omega}$ dans l'hypothèse des courants induits uniformes dans une tranche de plaque axisymétrique soumise à une induction source uniforme.

Le modèle de calcul de $\underline{\vec{T}}$ connaissant $\underline{\Omega}$ est

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\dfrac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}} \right) = -j\,\omega\,\mu\,\underline{\vec{T}} - j\,\omega\,\mu\,\vec{\nabla}\underline{\Omega} - j\,\omega\,\underline{\vec{b}}_s & \text{dans} \quad D \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{T}} = 0 & - \quad D \\ \underline{\vec{T}} \times \vec{n} = \vec{0} & \text{sur} \quad \partial D \end{cases}$$

L'hypothèse d'axisymétrie, l'induction source étant uniforme et dirigée suivant l'axe de symétrie, et avec les notations du cours, conduit à

$$\underline{\vec{b}}_s = \mu\,\underline{h}_s\,\vec{k}_z \;;\; \underline{\vec{T}} = \underline{T}_r(r,z)\,\vec{k}_r + \underline{T}_z(r,z)\,\vec{k}_z$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial\,(r\,\underline{T}_r)}{\partial r} \right) + \dfrac{\partial^2 \underline{T}_r}{\partial z \partial z} - \dfrac{1+j}{\delta} \left(\underline{T}_r + \dfrac{\partial \underline{\Omega}}{\partial r} \right) = 0 \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial \underline{T}_z}{\partial r} \right) + \dfrac{\partial^2 \underline{T}_z}{\partial z \partial z} - \dfrac{1+j}{\delta} \left(\underline{T}_z + \dfrac{\partial \underline{\Omega}}{\partial r} + h_s \right) = 0 \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial (r\,T_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial T_z}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \text{dans } D$$

$$T_z = 0 \text{ sur } \Gamma_l \,;\; T_r = 0 \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \Gamma_n$$

Ce problème peut sembler curieux (la source $\underline{h}_s$ n'intervient que dans l'équation portant sur $\underline{T}_z$; l'équation portant sur $\underline{T}_r$ n'est impactée par cette source que par l'équation de conservation de $\underline{\vec{T}}$; les conditions aux limites ne portent pas sur toute l'étendue de la frontière pour chacune des variables) mais il devrait (je ne l'ai pas fait donc il y a un risque) s'implanter avec des élements de Nedelec.

D'autre part le problème permettant le calcul de $\underline{\Omega}$ à partir de $\underline{\vec{T}}$ est

$$\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{\nabla} \underline{\Omega} + \mu\,\underline{\vec{T}} \cdot \vec{n}\,\delta_{\partial D} = 0 \text{ dans } E_3$$

Elle devient

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\mu\,\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\,\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial z} \right) + \mu\,\underline{T}_z\,\delta_{\Gamma_n} - \mu\,\underline{T}_z\,\delta_{\Gamma_s} + \mu\,\underline{T}_r\,\delta_{\Gamma_l} = 0 \text{ pour } (r,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

Ce n'est pas le modèle le plus astucieux pour traiter le problème (le potentiel vecteur est plus efficace) mais la fonction de l'exercice était de faire manipuler le modèle $\mathbf{T} - \mathbf{\Omega}$