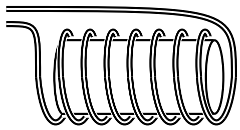
Transfert inductif d'énergie électromagnétique
Exercices corrigés
Leçon 3

G. Vinsard

15 septembre 2014

Exercice No 1 Reprendre l'exemple de la leçon No2



en supposant que
- l'inducteur est composé de N spires axisymétriques de même axe dans lesquels circule le même courant ;
- que la charge est également axisymétrique (de même axe que les spires) ;

et fournir un modèle de calcul dont la variable d'état est la composante orthoradiale du potentiel vecteur.

Corrigé Si $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ sont les vecteurs de bases avec lesquels la position $\vec{x}$ est repérée par $\vec{x} = x_1\ \vec{k}_1 + x_2\ \vec{k}_2 + x_3\ \vec{k}_3$ au moyen des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) alors les coordonnées cylindriques sont définies par

$$\begin{aligned} \vec{x} &= r\cos\theta\ \vec{k}_1 + r\sin\theta\ \vec{k2} + z\ \vec{k}_3 \\ &= r\ \vec{k}_r + z\ \vec{k}_Z \end{aligned} \tag{1}$$

avec

$$\vec{k}_r = \cos\theta\ \vec{k}_1 + \sin\theta\ \vec{k}_2 \quad ; \quad \vec{k}_z = \vec{k}_3 \quad ; \quad \vec{k}_\theta = \vec{k}_z \times \vec{k}_r \tag{2}$$

Pour introduire, la symétrie axisymétrique il suffit de reprendre ce qui précède dans le cas particulier où les domaines D_i et D sont invariants par une rotation d'axe passant par l'origine et dirigé suivant $\vec{k}_3$.

Les densités de courant, le potentiel vecteur et le champ électrique sont dirigés suivant le vecteur $\vec{k}_\theta$ et leurs amplitudes ne dépendent pas de θ

$$\vec{j} = j(t,r,z)\ \vec{k}_\theta \quad ; \quad \vec{a} = a(t,r,z)\ \vec{k}_\theta \quad ; \quad \vec{e} = e(t,r,z)\ \vec{k}_\theta \tag{3}$$

et corrélativement les inductions et champ magnétique sont dirigés suivant les vecteurs $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_z$ et leurs amplitudes ne dépendent pas de θ

$$\vec{b} = \underbrace{b_r(t,r,z)}_{=-\partial_z a}\ \vec{k}_r + \underbrace{b_z(t,r,z)}_{\frac{1}{r}\partial_r(r\ a)}\ \vec{k}_z \quad ; \quad \vec{h} = \vec{b}/\mu(r,z) \tag{4}$$

Il reste maintenant à exprimer ce qui précède dans cette hypothèse axisymétrique.

Tout d'abord le problème général

$$\left\{\begin{array}{lcl}\vec{\nabla}\times\left(\dfrac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)+s\left(\partial_t\vec{a}+\vec{\nabla}\varphi\right) & = & \vec{j}_s \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{a} & = & 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\left(\epsilon_0\vec{\nabla}\varphi\right)+\rho & = & 0 \\ \vec{a}(t=0,\vec{x}) & = & \vec{0}\quad\text{la condition initiale nulle sur } \vec{a}\end{array}\right. \tag{5}$$

il devient

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\mu\, r}\dfrac{\partial(r\ a)}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{\mu}\partial(r\ a)\partial r\right)-s\ \dfrac{\partial a}{\partial t}+j_S & = & 0 \\ a(t=0,r,z) & = & 0\end{array}\right. \tag{6}$$

où le potentiel électrique n'a plus lieu d'être puisque son gradient devrait être dirigé suivant $\vec{k}_\theta$ et que cela supposerait que le potentiel dépende de θ. Les fonctions de perméabilité, de conductivité et la densité de courant source

$$\begin{array}{l}\mu(\vec{x})=\left\{\begin{array}{lll}\mu_0\ \mu_r & \text{pour} & \vec{x}\in D \\ 0 & \text{ailleurs} & \end{array}\right. \quad ; \quad s(\vec{x})=\left\{\begin{array}{lll}\sigma & \text{pour} & \vec{x}\in D \\ 0 & \text{ailleurs} & \end{array}\right. \\ \vec{j}_s(t,\vec{x})=i(t)\ \left\{\begin{array}{lll}\vec{u}_s(\vec{x}) & \text{pour} & \vec{x}\in D_s \\ \vec{0} & \text{ailleurs} & \end{array}\right.\end{array} \tag{7}$$

utilisées dans (6) s'expriment comme

$$\begin{array}{l}\mu(r,z)=\left\{\begin{array}{lll}\mu_0\ \mu_r & \text{pour} & \vec{x}\in Tr(D) \\ 0 & \text{ailleurs} & \end{array}\right. \quad ; \quad s(r,z)=\left\{\begin{array}{lll}\sigma & \text{pour} & \vec{x}\in Tr(D) \\ 0 & \text{ailleurs} & \end{array}\right. \\ j_s(t,\vec{x})=i(t)\ \left\{\begin{array}{lll}u_s(r,z) & \text{pour} & \vec{x}\in Tr(D_s) \\ \vec{0} & \text{ailleurs} & \end{array}\right.\end{array} \tag{8}$$

où l'application trace « Tr » est définie par

$$\vec{x}=r\cos\theta\ \vec{k}_1+r\sin\theta\ \vec{k2}+z\ \vec{k}_3\in D\Longleftrightarrow r\ \vec{k}_r+z\ \vec{k}_z\in Tr(D) \tag{9}$$

et où u_s peut être explicité comme

$$u_s(r,z)=\frac{1}{r\displaystyle\int_{Tr(D_s)}\frac{dr\ dz}{r}} \tag{10}$$

par l'analyse de

$$\begin{array}{ll}\vec{\nabla}\times\vec{u}_s=\vec{0}\ ;\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}_s=0 & \text{dans } D_s \\ \vec{u}_s\cdot\vec{n}=0 & \text{sur } \partial D_s \text{ (le bord de } D_s\text{)} \\ \int_\Gamma\vec{u}_s\cdot\vec{n}\ d\Gamma=1 & \text{où } \Gamma \text{ est une surface de coupure connexifiant } D_s\end{array} \tag{11}$$

en symétrie axisymétrique.

Ces notations développées sont un peu lourdes ; un moyen de les alléger consiste à introduire l'opérateur nabla bidimensionnel comme

$$\vec{\nabla}=\partial_r\ \vec{k}_r+\partial_z\ \vec{k}_z \tag{12}$$

et à réécrire (6) comme

$$\left\{\begin{array}{lcl}\vec{\nabla}\left(\dfrac{1}{\mu\ r}\vec{\nabla}(r\ a)\right)-s\ \partial_t a+j_S & = & 0 \\ a(t=0,r,z) & = & 0\end{array}\right. \tag{13}$$

Avec ces notations le bilan de puissances

$$i(t)\ \int_{D_s}-\vec{u}_s\cdot\vec{e}\ d\vec{x}^3=\frac{d}{dt}\int_{E_3}\frac{\vec{b}^2}{2\mu}\ d\vec{x}^3+\int_D\sigma\vec{e}^2\ d\vec{x}^3 \tag{14}$$

devient

$$i(t)\ 2\pi \frac{\displaystyle\int_{Tr(D_s)} -e\ drdz}{\displaystyle\int_{Tr(D_s)} \frac{drdz}{r}} = \frac{d}{dt} 2\pi \int_{Tr(E_3)} \frac{\vec{b}^2}{2\mu}\ r\ drdz + 2\pi \int_{Tr(D)} \sigma e^2\ r\ drdz \tag{15}$$

où les quantités intégrales s'interprètent comme

$v(t) = 2\pi \frac{\displaystyle\int_{Tr(D_s)} -e\ drdz}{\displaystyle\int_{Tr(D_s)} \frac{drdz}{r}}$	la force électromotrice qu'il faut apporter à l'inducteur pour y forcer le courant $i(t)$
$W(t) = 2\pi \displaystyle\int_{Tr(E_3)} \frac{\vec{b}^2}{2\mu}\ r\ drdz$	l'énergie magnétique
$p(t) = 2\pi \displaystyle\int_{Tr(D)} \sigma e\ r\ drdz$	la puissance Joule instantanée dissipée dans la charge

L'approximation du régime sinusoïdal conduit au système

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu\ r}\vec{\nabla}(r\ \underline{a})\right) - j\ \omega\ \underline{a} + \underline{j}_S \quad = \quad 0 \tag{16}$$

où $\underline{a}$ et $\underline{j}_s$ sont les amplitudes complexes de a et j_s comme dans

$$\begin{array}{l} \vec{a}(t,\vec{x}) = \sqrt{2}\ \Re\left\{\underline{\vec{a}}(\vec{x})\ \exp^{j\omega t}\right\} \quad ; \quad \varphi(t,\vec{x}) = \sqrt{2}\ \Re\left\{\underline{\varphi}(\vec{x})\ \exp^{j\omega t}\right\} \\ \rho(t,\vec{x}) = \sqrt{2}\ \Re\left\{\underline{\rho}(\vec{x})\ \exp^{j\omega t}\right\} \end{array} \tag{17}$$

et

$$\vec{j}_s(t,\vec{x}) = \sqrt{2}\ \Re\left\{\underline{\vec{j}}_s(\vec{x})\ \exp^{j\omega t}\right\} \tag{18}$$

Et le bilan de puissance correspondant est (cf

$$\left(\int_{D_s} -\vec{u}_s \cdot \underline{\vec{e}}\ d\vec{x}^3\right) \underline{i}^* = \int_D \sigma|\underline{\vec{e}}|^2\ d\vec{x}^3 + j\omega \int_{E_3} \frac{|\underline{\vec{b}}|^2}{\mu}\ d\vec{x}^3 \tag{19}$$

)

$$i^*\ 2\pi \frac{\displaystyle\int_{Tr(D_s)} -\underline{e}\ drdz}{\displaystyle\int_{Tr(D_s)} \frac{drdz}{r}} = j\omega\ 2\pi \int_{Tr(E_3)} \frac{|\vec{b}|^2}{2\mu}\ r\ drdz + 2\pi \int_{Tr(D)} \sigma|e|^2\ r\ drdz \tag{20}$$

où les quantités intégrales s'interprètent comme

$\underline{v} = 2\pi \frac{\displaystyle\int_{Tr(D_s)} -\underline{e}\ drdz}{\displaystyle\int_{Tr(D_s)} \frac{drdz}{r}}$	l'amplitude complexe de la force électromotrice qu'il faut apporter à l'inducteur pour y forcer le courant d'amplitude complexe $\underline{i}$
$Q = j\omega\ 2\pi \displaystyle\int_{Tr(E_3)} \frac{|\vec{b}|^2}{2\mu}\ r\ drdz$	la puissance réactive (par définition)
$P = 2\pi \displaystyle\int_{Tr(D)} \sigma|e|^2\ r\ drdz$	la puissance active = la puissance moyenne Joule dissipé dans la charge en l'absence de mouvement