Transfert inductif d'énergie électromagnétique
Exercices corrigés
Leçon 1

G. Vinsard

9 septembre 2014

Exercice 1 Traduire les équations de Maxwell en composantes : a) en coordonnées cartésiennes

Correction

Une base est donnée dans laquelle la position est repérée par le triplet $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; les grandeurs scalaires φ doivent être vue comme des applications de

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t, x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & \varphi(t, x_1, x_2, x_3) \end{array} \tag{1}$$

et les grandeurs vectorielles $\vec{u}$ comme des applications de

$$\begin{array}{rccc} \vec{u} & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (t, x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & (u_1(t, x_1, x_2, x_3), u_2(t, x_1, x_2, x_3), u_3(t, x_1, x_2, x_3)) \end{array} \tag{2}$$

.

En omettant les arguments de ces fonctions, en notant ∂_n la dérivée partielle par rapport à x_n, l'opérateur « nabla » $\vec{\nabla}$ de dérivation fonctionne comme

– sur les grandeurs scalaires (gradient) :

$$\vec{\nabla}\varphi = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi) \tag{3}$$

– sur les grandeurs vectorielles (divergence) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 \tag{4}$$

– encore sur les grandeurs vectorielles (rotationnel) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) \tag{5}$$

Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$\begin{array}{rcll} \partial_2 h_3 - \partial_3 h_2 & = & j_1 + \partial_t d_1 & \\ \partial_3 h_1 - \partial_1 h_3 & = & j_1 + \partial_t d_2 & \text{Maxwell-Ampère} \\ \partial_1 h_2 - \partial_2 h_1 & = & j_2 + \partial_t d_3 & \\ \partial_2 e_3 - \partial_3 e_2 & = & -\partial_t b_1 & \\ \partial_3 e_1 - \partial_1 e_3 & = & -\partial_t b_2 & \text{Maxwell-Faraday} \\ \partial_1 e_2 - \partial_2 e_1 & = & -\partial_t b_3 & \\ \multicolumn{3}{l}{\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3 = 0} & \text{Conservation induction magnétique} \\ \multicolumn{3}{l}{\partial_1 d_1 + \partial_2 d_2 + \partial_3 d_3 = \rho} & \text{Gauss} \end{array} \tag{6}$$

Exercice 2 Montrer les relations

$$\psi(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{x} \cdot \vec{u}(\alpha\, \vec{x})\, d\alpha \tag{7}$$

et

$$\vec{v}(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{u}(\alpha\, \vec{x}) \times \vec{x}\, \alpha d\alpha \tag{8}$$

inventer une relation qui permet d'exprimer $\vec{u}$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \rho$ en fonction de ρ.

Correction
$$\vec{\nabla}\left(\int_0^1 \vec{x}\cdot\vec{u}(\alpha\,\vec{x})\;d\alpha\right)=\left(\int_0^1 x_j\;u_j\;d\alpha\right)_{,i}\;\vec{k}_i \tag{9}$$
et
$$\left(\int_0^1 x_j\;u_j\;d\alpha\right)_{,i}=\int_0^1(\underbrace{x_{j,i}}_{=\delta_{ij}}\;u_j+\alpha\;x_j\;u_{j,i})\;d\alpha=\int_0^1(u_i+\alpha\;x_j\;u_{j,i})\;d\alpha \tag{10}$$
Pour $i=1$,
$$\left(\int_0^1 x_j\;u_j\;d\alpha\right)_{,1}=\int_0^1(u_1+\alpha\;(x_1\;u_{1,1}+x_2\;u_{2,1}+x_3\;u_{3,1}))\;d\alpha \tag{11}$$
et comme $\vec{\nabla}\times\vec{u}=\vec{0}$ corrrespond à $u_{1,3}=u_{3,1}$ et $u_{2,1}=u_{1,2}$
$$\left(\int_0^1 x_j\;u_j\;d\alpha\right)_{,1}=\int_0^1(u_1+\alpha\;(x_1\;u_{1,1}+x_2\;u_{1,2}+x_3\;u_{1,3}))\;d\alpha=\int_0^1\left(u_1+\alpha\;\frac{du_1}{d\alpha}\right)\;d\alpha=u_1(\vec{x}) \tag{12}$$
Les autres composantes fournissent le même genre de résultat, ce qui démontre (7). (8) se démontre de façon analogue et le résultat demandé est :
$$\vec{w}(\vec{x})=\int_0^1 \rho(\alpha\;\vec{x})\;\alpha^2\;d\vec{x}^{\,2}\longrightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{w}=\rho \tag{13}$$

Exercice 3 $\displaystyle\int_{E_3}\vec{e}^2\;d\vec{x}^{\,3}$ est-elle finie quand $\vec{\nabla}\times\vec{e}=\vec{0}$ et $\vec{\nabla}\cdot\vec{e}=\rho$ avec $\displaystyle\int_{E_3}\rho\;d\vec{x}^{\,3}\neq 0$ et ρ étant fini et satisfaisant à
$$\exists\;D\text{ domaine borné }\subset E_3\text{ et contenant }\vec{0}\text{ tel que }\vec{x}\notin D\Longrightarrow\vec{j}(t,\vec{x})=\vec{0}\;;\;\rho(t,\vec{x})=0 \tag{14}$$

Correction Avec les lemmes de Poincaré
$$\begin{array}{lll}\vec{\nabla}\times\vec{u}=\vec{0} & \Longrightarrow & \exists\;\varphi\text{ (appelé le potentiel scalaire de }\vec{u}\text{) tel que }\vec{u}=\vec{\nabla}\varphi\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0 & \Longrightarrow & \exists\;\vec{v}\text{ (appelé le potentiel vecteur de }\vec{u}\text{) tel que }\vec{u}=\vec{\nabla}\times\vec{v}\end{array} \tag{15}$$
on a
$$\vec{e}=-\vec{\nabla}\psi\text{ avec }\Delta\psi+\rho=0 \tag{16}$$
Avec la formule de Biot et Savart
$$\psi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi}\int_{E_3}\frac{\alpha(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\;d\vec{y}^{\,3} \tag{17}$$
vient
$$\psi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi}\int_{E_3}\frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\;d\vec{y}^{\,3} \tag{18}$$
Avec l'analyse des développements mutipolaire, si
$$\int_{E_3}\rho\;d\vec{x}\neq 0 \tag{19}$$
alors le comportement à l'infini de ψ est en $1/|\vec{x}|$ et donc celui de $\vec{e}$ est en $1/|\vec{x}|^2$ et celui de $\vec{e}^2$ est en $1/|\vec{x}|^4$. L'intégrale est donc finie.

Exercice 4 Démontrer la formule du potentiel retardé
$$\psi(t,\vec{x})=\frac{1}{4\pi}\int_{E_3}\frac{\alpha\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\;d\vec{y}^{\,3} \tag{20}$$
en admettant : 1) celle de Biot et Savart (17), 2) qu'il est possible de permuter dérivations et intégration sans précautions.

Correction Par un calcul direct

$$
\begin{aligned}
\Delta\psi(t,\vec{x}) = \quad & \frac{1}{4\pi}\int_{E_3} \Delta\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right)\ \alpha\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)\ d\vec{y}^{\,3} \\
+ \quad & \frac{1}{4\pi}\int_{E_3} -2\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right)\cdot\vec{\nabla}\left(|\vec{x}-\vec{y}|\right)\ \frac{1}{c}\,\partial_t\alpha\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)\ d\vec{y}^{\,3} \\
+ \quad & \frac{1}{4\pi}\int_{E_3} -\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right)\ \Delta\left(|\vec{x}-\vec{y}|\right)\ \frac{1}{c}\,\partial_t\alpha\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)\ d\vec{y}^{\,3} \\
+ \quad & \frac{1}{4\pi}\int_{E_3} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ \vec{\nabla}\left(|\vec{x}-\vec{y}|\right)^2\ \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\alpha\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)\ d\vec{y}^{\,3}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Or si (17) est juste alors

$$
\frac{1}{4\pi}\int_{E_3} \Delta\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right)\ \alpha\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)\ d\vec{y}^{\,3} = -\alpha(t,\vec{x})
\tag{22}
$$

et d'autre part quelques calculs montrent que

$$
\vec{\nabla}\left(|\vec{x}-\vec{y}|\right) = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \quad ; \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right) = -\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \quad ; \quad \Delta\left(|\vec{x}-\vec{y}|\right) = \frac{2}{|\vec{x}-\vec{y}|}
\tag{23}
$$

et donc

$$
\Delta\psi(t,\vec{x}) = \quad -\alpha(t,\vec{x}) + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_{E_3} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\alpha\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)\ d\vec{y}^{\,3}}_{=\ \partial_{tt}\psi(t,\vec{x})/c^2}
\tag{24}
$$

qui est le résultat attendu.