Transfert inductif de l'énergie

Leçon 7

Induction électromagnétique en présence de mouvement

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

8 septembre 2014

Objectifs

- Compléter la synthèse de la leçon No 4 sur la formulation en potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique en introduisant la loi d'Ohm dans les milieux en mouvement.

- Rappeler l'utilisation du tenseur de Maxwell pour le calcul des forces électromagnetiques.

- Donner une brève description de l'approximation du découplage électro-mécanique.

Mouvement dans les milieux continus

- La vitesse eulérienne dans l'espace est

$$\begin{array}{rcccl} \vec{v} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & E_3(m/s) \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{v}(t, \vec{x}) \end{array}$$

- La trajectoire $\vec{X}(t)$ d'une particule qui se trouverait à la position $\vec{x}_0$ à l'instant initial est la solution de l'EDO

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{v}(t, \vec{X}) \quad ; \quad \vec{X}(t = 0) = \vec{x}_0$$

- L'application « flot du champ de vecteur $\vec{v}$ » est

$$\begin{array}{rcccl} L & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & E_3 \\ & & (t, \vec{x}_0) & \longrightarrow & \vec{X}(t) \text{ solution de l'EDO} \end{array}$$

L est supposée inversible

$$\begin{array}{rcccl} \exists \ L^{-1} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & E_3 \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & L^{-1}(t, \vec{x}) \text{ tq } L(t, L^{-1}(t, \vec{x})) = \vec{x} \end{array}$$

Mouvement dans les milieux continus

- Un domaine quelconque $D_0 \subset E_3$ défini à l'instant initial devient à l'instant t un domaine $D(t)$ défini comme image de D_0 par $L(t, .)$

$$D(t) = L(t, D_0)$$

- Un domaine D globalement invariant dans le mouvement est tel que

$$\vec{x} \in D \Longrightarrow L(t, \vec{x}) \in D$$

dans ce cas nécessairement

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D \;\; (\vec{n} \text{ normales extérieures à } D_c \text{ sur son bord } \partial D)$$

- Une fonction $f(t, \vec{x})$ fournissant une caractéristique physique (par exemple une conductivité électrique) en tout point de l'espace à l'instant t est définie à partir de sa détermination initiale $f_0(\vec{x})$ par

$$f(t, L(t, \vec{x})) = f_0(\vec{x}) \Longleftrightarrow f(t, \vec{x}) = f_0(L^{-1}(t, \vec{x}))$$

Géométrie et restrictions (1/2)

▶ La géométrie d'un problème d'induction électromagnétique comporte *a minima* trois parties : la région D_s de l'inducteur où le courant source $\vec{j}_s$ n'est pas nul ; celle D_c de la charge où la conductivité $s(t, \vec{x})$ n'est pas nulle et la perméabilité magnétique n'est pas celle du vide ; la région intermédiaire D_e appelée l'entrefer. Pour la commodité de l'exposé, l'espace est découpé en deux parties

- la région de l'espace dans laquelle n'est pas située la source et où se trouve la charge
$$D = \{\vec{x} \in E_3 \ : \ \vec{j}_s = \vec{0}\}$$
ce n'est pas le domaine D_c mais un domaine qui le contient : $D_c \subset D$.
- son complémentaire dans lequel la charge n'est pas située et où se trouve la source
$$\overline{D} = E_3/D \text{ et } \vec{x} \in \overline{D} \Longrightarrow s(t, \vec{x}) = 0$$
de même ce n'est pas le domaine D_s mais mais un domaine qui le contient : $D_s \subset \overline{D}$

Géométrie et restrictions (2/2)

- Le champ de vitesse eulérien est supposé nul dans $\overline{D}$ et donc le mouvement n'a lieu que dans la région D qui contient la charge et pas la source du champ électromagnétique.
Cette hypothèse n'est pas essentielle mais elle a l'intérêt de ne pas nécessiter la description du transport du courant source $\vec{j}_s$
- De plus le domaine de la charge

$$D_c = \{\vec{x} \in E_3 \ : \ s(t,\vec{x}) \neq 0\} \subset D$$

est supposé globalement invariant par rapport au champ de vitesse

$$\vec{x} \in D_c \Longrightarrow L(t,\vec{x}) \in D_c$$

- Dans ces circonstances le champ de vitesse eulérien a pour propriété

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D_c ($\vec{n}$ normales extérieures à D_c sur son bord ∂D_C)

- L'hypothèse supplémentaire est que le champ de vitesses est conservatif

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \text{ dans } D_c$$

Problème d'induction

- le problème d'induction est alors, formulé en potentiels vecteur magnétique $\vec{a}$ et scalaire électrique φ

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + s \left(\partial_t \vec{a} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{\nabla} \varphi \right) & = & \vec{j}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \varphi \right) + \rho & = & 0 \\ \vec{a}(t = 0, \vec{x}) & = & \vec{0} \end{cases}$$

où la loi d'Ohm dans les milieux en mouvement (cf. leçon No 6) a été utilisée. Les fonctions de conductivité et de perméabilité sont

$$\begin{array}{ccccl} s & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & s(t, \vec{x}) = \begin{cases} \sigma & \text{pour} \quad \vec{x} \in D_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ \mu & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \mu(t, \vec{x}) = \begin{cases} \mu_0 \, \mu_r & \text{pour} \quad \vec{x} \in D_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{array}$$

mais comme le domaine de la charge est globalement invariant, la dépendance en t de ces fonctions n'est que formelle.

Hypothèse d'un nombre de Reynolds magnétique modéré

- Dans la charge

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \ \mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + \sigma \ \left(\partial_t \vec{a} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{\nabla} \varphi \right) = \vec{0}$$

Le rapport entre l'ordre de grandeur des termes $\sigma \ \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$ et $\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right)$ est, en appelant V et L les grandeurs caractéristiques de la vitesse $\vec{v}$ et de la dimension du domaine D_c, le nombre de Reynolds magnétique

$$R_m = \sigma \ \mu_0 \ \mu_r \ V \ L$$

Si ce nombre de Reynolds magnétique était grand devant l'unité la prise en compte du terme de convection « $\sigma \ \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$ » demanderait un traitement approprié pour le calcul effectif de la solution [1]. Pour des raisons de simplicité d'exposé, il sera supposé que cette difficulté est inexistante.

1. À la limite où il est très grand l'équation dégénère en $\partial_t \vec{a} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{\nabla} \varphi = 0$ qui est du premier ordre. On parle de champ magnétique gelé dans la matière.

Bilan de puissance

- En multipliant

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + s \left(\partial_t \vec{a} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{\nabla} \varphi \right) = \underbrace{\vec{j}_s}_{= i(t)\ u_s}$$

par $-\vec{e} = (\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi)$, en intégrant sur tout l'espace, en prenant en compte l'invariance globale du domaine D et en posant $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$ il vient

$$\begin{aligned} i(t)\ \underbrace{\int_{D_s} -\vec{u}_s \cdot \vec{e}\ d\vec{x}^3}_{= V(t)} \quad &= \quad \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{E_3} \frac{\vec{b}^{\,2}}{2\mu}\ d\vec{x}^3}_{= W(t)} \\ &+ \quad \underbrace{\int_{D_c} \sigma(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{b})^2\ d\vec{x}^3}_{= p_j(t)} + \underbrace{\int_{D_c} \vec{v} \cdot \left(\vec{j} \times \vec{b} \right)\ d\vec{x}^3}_{= p_m(t)} \end{aligned}$$

Les termes du bilan de puissance

- $V(t) = \int_{D_s} -\vec{u}_s \cdot \vec{e}\, d\vec{x}^3$ est la force électromotrice qu'il faut apporter à l'inducteur pour y forcer le courant $i(t)$.
- $W(t) = \int_{E_3} \frac{\vec{b}^{\,2}}{2\mu}\, d\vec{x}^3$ est l'énergie magnétique instantanée.

Attention ! le terme de variation d'énergie magnétique $\frac{dW}{dt}$ ne prend cette forme simple que parce que le domaine est supposé globalement invariant : et donc du point de vue de l'énergie magnétique tout se passe comme si la fonction de perméabilité magnétique ne dépendait pas du temps.

- $p_j(t) = \int_D \sigma(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{b})^2\, d\vec{x}^3$ est la puissance Joule instantanée dissipée dans la charge.
- $p_m(t) = \int_D \vec{v} \cdot \left(\vec{j} \times \vec{b}\right)\, d\vec{x}^3$ est la puissance mécanique, i.e. le rapport à l'intervalle de temps δt du travail de la force de Laplace $\vec{j} \times \vec{b}$ dans un déplacement $\vec{v}\,\delta t$.

Commentaire sur la puissance mécanique

- Le terme nouveau par rapport au cas où le domaine conducteur est fixe est celui de la puissance mécanique duquel émerge la densité de force de Laplace

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{b}$$

qui est la contrepartie mécanique du champ électromoteur $\vec{v} \times \vec{b}$ de la loi d'Ohm en présence de mouvement $\vec{j} = \sigma\,(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{b})$. En effet

$$P_m = \int_D \vec{v} \cdot \left(\vec{j} \times \vec{b}\right)\, d\vec{x}^3 = -\int_D \vec{j} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{b}\right)\, d\vec{x}^3$$

- C'est d'une certaine façon une sorte de réciprocité comme l'est la troisième loi de Newton en mécanique mais qui s'exerce à travers le couplage électromécanique.

Tenseur de Maxwell et forces électromagnétiques

- La densité de force de Laplace $\vec{j} \times \vec{b}$ ayant été identifiée, il est possible d'établir un bilan local de force à partir de $\vec{\nabla} \times (\vec{b}/\mu) = \vec{j}$, soit

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{b}}{\mu}\right)\times\vec{b} = \underbrace{\vec{j}\times\vec{b}}_{\substack{\text{densité de force de Laplace}\\ \text{sur les courants induits}}} + \underbrace{\vec{j}_s\times\vec{b}}_{\substack{\text{densité de force de Laplace}\\ \text{sur les courants inducteurs}}}$$

- Le terme du premier membre a pour composantes

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{b}}{\mu}\right)\times\vec{b}\right)_i &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}\left(\frac{b_m}{\mu}\right)_{,l} b_k\\ 0 & \text{sinon}\\ &= \left(\frac{b_i\ b_k}{\mu}\right)_{,k} - \left(\frac{b_k\ b_k}{2\mu}\right)_{,i} - \frac{b_k\ b_k}{2}\left(\frac{1}{\mu}\right), i\end{aligned}$$

- Le tenseur des efforts de Maxwell $\overline{\overline{T}}$ est défini en composantes par

$$\overline{\overline{T}}_{ik} = \frac{b_i\ b_k}{\mu} - \delta_{ik}\frac{b_l\ b_l}{2\mu}$$

Tenseur de Maxwell et forces électromagnétiques

- Sa divergence est le vecteur

$$\vec{\nabla}\overline{\overline{T}}_i = \overline{\overline{T}}_{ik,k} = \left(\frac{b_i\ b_k}{\mu}\right)_{,k} - \delta_{ik}\left(\frac{b_l\ b_l}{2\mu}\right)_{,k}$$

- D'où

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{b}}{\mu}\right) \times \vec{b} = \vec{\nabla}\overline{\overline{T}} - \frac{\vec{b}^{\,2}}{2}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

- Le bilan local de force s'écrit alors

$$\vec{\nabla}\overline{\overline{T}} = \vec{j} \times \vec{b} + \vec{j}_s \times \vec{b} + \frac{\vec{b}^{\,2}}{2}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

où le terme

$$\frac{\vec{b}^{\,2}}{2}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

est la densité de force magnétique ; c'est à dire la force qui s'exerce à l'interface entre domaines de perméabilités différentes.

Tenseur de Maxwell et forces électromagnétiques

► Dans le cas où le domaine magnétique est invariant dans le mouvement

$$\vec{\nabla}\mu \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow \frac{\vec{b}^{\,2}}{2}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot \vec{v} = 0$$

Le travail par unité de temps de la densité de force magnétique est nul, comme attendu.

► Puisque $\vec{\nabla}\overline{\overline{T}}_i = \overline{\overline{T}}_{ij,j}$ et que l'induction magnétique disparaît à l'infini, L'intégration sur tout l'espace conduit à

$$\underbrace{\int_{E_3} \vec{\nabla}\overline{\overline{T}}\, d\vec{x}^3}_{=\vec{0}} = \underbrace{\int_{E_3} \vec{j}_s \times \vec{b}\, d\vec{x}^3}_{\text{inducteur}} + \underbrace{\int_{E_3} \vec{j} \times \vec{b}\, d\vec{x}^3 + \int_{E_3} \frac{\vec{b}^{\,2}}{2}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu}\right)\, d\vec{x}^3}_{\text{charge}}$$

d'où vient que la force exercée sur l'inducteur est égale et opposée à la force exercée sur la charge qui comporte deux contributions, l'une magnétique et l'autre de Laplace.

Tenseur de Maxwell et forces électromagnétiques

► Si l'intégration est limitée au domaine D où est la charge (et donc pas l'inducteur) alors

$$\int_D \vec{j} \times \vec{b}\, d\vec{x}^3 + \int_D \frac{\vec{b}^{\,2}}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu} \right)\ d\vec{x}^3 = \int_{\partial D} \overline{\overline{T}} \vec{n}\, d\vec{x}^3 = \int_{\partial D} T_{ij}\ n_j\ d\vec{x}^3$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal exterieur au bord ∂D de D.

► Les forces électromagnétiques s'exerçant à l'intérieur d'un domaine D sont égales au flux du tenseur des contraintes de Maxwell sur le bord de ce domaine.

► Il aurait été possible d'écrire la même chose sur le domaine $\overline{D}$ où est l'inducteur (et pas la charge) pour trouver

$$\int_{E_3} \vec{j}_s \times \vec{b}\, d\vec{x}^3 = \int_{\partial \overline{D}} \overline{\overline{T}} \vec{\mathfrak{n}}\, d\vec{x}^3$$

où le champ de normal $\vec{\mathfrak{n}}$ sur $\partial \overline{D}$ est opposé à $\vec{n}$ sur ∂D.

L'aimant et le tube

- Le modèle d'aimant dans un tube de la leçon No 6 est

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{\nabla}\times\left(\dfrac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)+s\left(\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})+\vec{\nabla}\varphi\right) & = & \vec{j}_s \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{a} & = & 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\left(\epsilon_0\vec{\nabla}\varphi\right)+\rho & = & 0 \end{array}\right.$$

où $\vec{j}_s$ est le courant ampérien de l'aimant, $\mu = \mu_0$ partout puisque aucun domaine magnétique n'est introduit, s la fonction de conductivité

$$s(\vec{x}) = \left\{\begin{array}{lll} \sigma & \text{dans} & D_c \text{ (le domaine du tube)} \\ 0 & \text{ailleurs} & \end{array}\right.$$

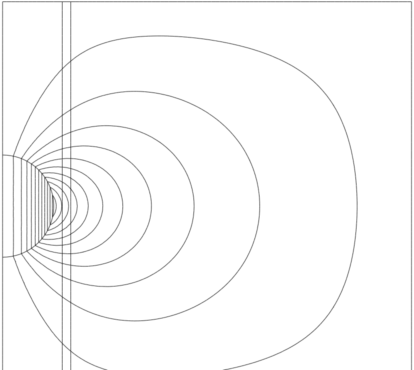
Si l'axe d'aimantation de l'aimant coïncide avec l'axe du tube, le problème devient axisymétrique et donc comme tel se réduit à

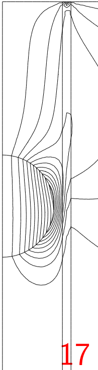
$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_r\left(\dfrac{\partial_r(r\ a)}{r}\right)+\partial_{zz}a+\mu_0\ s\ v\ \partial_z a = j_s & \text{pour} & -\infty < z < \infty\ ;\ 0 < r < \infty \\ a \longrightarrow 0 & \text{si} & z\longrightarrow\infty \text{ ou } r\longrightarrow\infty \end{array}\right.$$

L'aimant et le tube : lignes d'induction [2]

- Lignes $r\,a =$ Constante

1. $s = 0$ ou $v = 0$; il n'y a pas de tube ou encore le tube est immobile ;
2. le tube est présent et se déplace à une certaine vitesse ;
3. seul le courant induit génère une induction ; il suffit de soustraire à l'induction totale (cas 2) l'induction due à l'aimant seul (cas 1).





L'aimant et le tube : puissances (1/2)

► Le champ électrique $\vec{e}$ est nul dans le référentiel de l'aimant et l'induction magnétique $\vec{b}$ ne dépend pas du temps ; le bilan de puissance se réduit donc à

$$p_j + p_m = 0 \text{ avec } \begin{cases} p_j = \int_D \sigma (\vec{v} \times \vec{b})^2 \, d\vec{x}^3 \\ p_m = \int_D \vec{v} \cdot \left(\underbrace{\vec{j}}_{= \sigma \, \vec{v} \times \vec{b}} \times \vec{b} \right) \, d\vec{x}^3 \end{cases}$$

► La puissance Joule et la puissance mécanique s'équilibrent. Puisque la première est positive, il faut que la seconde soit négative et donc que la force de Laplace $\int_D \vec{j} \times \vec{b} \, d\vec{x}$ soit dirigée en sens inverse de la vitesse uniforme $\vec{v}$. La force de Laplace tend donc à s'opposer au déplacement du tube.

L'aimant et le tube : puissances (2/2)

- Dans le référentiel du tube c'est l'aimant qui se déplace Les forces qui s'exercent sur lui sont :
  - la force de Laplace sur les courants ampérien qui peut se calculer comme
    $$\int_{\partial D_S} \vec{j}_s \times \vec{b}$$
    Mais cette force de Laplace est égale et opposée à la force de Laplace sur les courants induit du tube maintenu fixe ;
  - la force de gravité d'intensité $M\,g$ où M est la masse de l'aimant.

Comme la vitesse de l'aimant est constante ces forces s'équilibrent et donc

$$M\,g\,v = p_j$$

Le travail par unité de temps de la force de gravité est directement converti en chaleur dans le tube.

L'action à distance

- Cet exemple de l'aimant qui tombe dans un tube est emblématique du caractère ≪ d'action à distance ≫ du phénomène d'induction électromagnétique.

- Une force (la gravité)(s'exerce quelque part et ça échauffe quelque chose (le tube) autre part.

- Un autre aspect est que si le tube est placé sur une balance et que l'aimant est lâché dans ce tube alors le poids mesuré par la balance s'accroît du poids de l'aimant sans que l'aimant ait jamais touché le tube. C'est un exemple de force électromagnétique à distance.

Régime sinusoïdal établi

- Si la vitesse $\vec{v}$ est stationnaire (i.e. elle ne dépend pas du temps) et que le courant inducteur est sinusoïdal, alors, après que le régime transitoire ait disparu, ne subsiste plus que le régime sinusoïdal.
- Sous cette hypothèse si

$$\vec{j}_s(t,\vec{x}) = \sqrt{2}\,\Re\left\{\underline{\vec{j}}_s(\vec{x})\ \exp^{j\omega t}\right\}$$

les potentiels et la densité de charge prennent la forme

$$\begin{array}{l} \vec{a}(t,\vec{x}) = \sqrt{2}\,\Re\left\{\underline{\vec{a}}(\vec{x})\ \exp^{j\omega t}\right\} \quad ; \quad \varphi(t,\vec{x}) = \sqrt{2}\,\Re\left\{\underline{\varphi}(\vec{x})\ \exp^{j\omega t}\right\} \\ \rho(t,\vec{x}) = \sqrt{2}\,\Re\left\{\underline{\rho}(\vec{x})\ \exp^{j\omega t}\right\} \end{array}$$

et les équations de l'induction deviennent

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\underline{\vec{a}}\right) + s\left(j\omega\underline{\vec{a}} + \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{a}}) + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right) & = & \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{a}} & = & 0 \\ \vec{\nabla}\times\left(\epsilon_0\vec{\nabla}\underline{\varphi}\right) + \underline{\rho} & = & 0 \end{array}\right.$$

Bilan de puissances complexes

- Le bilan de puissance correspondant se fait en multipliant

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}) + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) = \underline{\vec{j}}_s$$

par le conjugué de l'amplitude complexe du champ électrique (i.e. $\underline{\vec{e}}$ avec $\vec{e}(t, \vec{x}) = \sqrt{2}\, \Re \left\{ \underline{\vec{e}}(\vec{x}) \ \exp^{j\omega t} \right\}$), en introduisant l'amplitude complexe de l'induction magnétique, et en intégrant sur tout l'espace.

- Si $i(t) = \Re \left\{ \underline{i} \exp^{j\omega t} \right\}$ et en introduisant l'amplitude complexe du courant induit

$$\underline{\vec{j}} = \sigma(\underline{\vec{e}} + \vec{v} \times \underline{\vec{b}})$$

alors

$$\left(\int_{D_s} -\vec{u}_s \cdot \underline{\vec{e}} \, d\vec{x}^3 \right) \underline{i}^* = \int_D \vec{v} \cdot \Re\{ \underline{\vec{j}} \times \underline{\vec{b}}^* \} \, d\vec{x}^3 + \int_D \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma} \, d\vec{x}^3 + j\omega \int_{E_3} \frac{|\underline{\vec{b}}|^2}{\mu} \, d\vec{x}^3$$

Termes du bilan de puissances

- $\underline{V} = \int_{D_s} -\vec{u}_s \cdot \underline{\vec{e}} \, d\vec{x}^3$ est l'amplitude complexe de la force électromotrice qu'il faut apporter à l'inducteur pour y forcer le courant d'amplitude complexe $\underline{i}$.

- $Q = \omega \int_{E_3} \frac{|\underline{\vec{b}}|^2}{\mu} \, d\vec{x}^3$ est la puissance réactive (par définition).

- $P_j = \int_D \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma} \, d\vec{x}^3$ est la puissance moyenne Joule dissipé dans la charge.

- $P_m = \int_D \vec{v} \cdot \Re\{\underline{\vec{j}} \times \underline{\vec{b}}^*\} \, d\vec{x}^3$ est la puissance mécanique correspondant à la moyenne temporelle de la force de Laplace.

- $\underline{S} = (P_j + P_m) + j\, Q$ est la puissance complexe ; $P = P_j + P_m$ est la puissance active.

Découplage électro-mécanique

- La possibilité d'un régime sinusoïdal établi suppose *a priori* que le champ de vitesses eulérien $\vec{v}$ ne dépende pas du temps. Ce qui n'est jamais le cas.

- Toutefois les dispositifs réels sont généralement tels que l'inertie mécanique est très grande devant l'inertie électromécanique.

- Dans ces cas il est alors possible d'accepter l'approximation selon laquelle
  - le champ de vitesse $\vec{v}$ ne s'est presque pas transformé pendant le temps que les potentiels $\vec{a}$ et φ ont eux effectués un grand nombre d'alternances ; on utilise donc $\vec{v}$ directement comme s'il ne dépendait pas du temps dans le modèle d'induction ;
  - la force de Laplace qui est envoyée au problème mécanique correspondant est expurgée de sa partie fluctuante, soit donc $\Re\{\underline{\vec{j}} \times \underline{\vec{b}}^*\}$

C'est l'hypothèse de découplage électro-mécanique.