Transfert inductif de l'énergie

Leçon 6

Mouvement et électromagnétisme

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

8 septembre 2014

Objectifs

▶ Introduire la loi d'Ohm dans les milieux en mouvement dans l'approximation des basses fréquences/

▶ Déduire cette loi d'une sorte de limite galiléenne lorsque les vitesses caractéristiques sont très inférieures à celle de la lumière du modèle général covariant avec la transformation de Lorentz.

▶ Montrer que les équations de Maxwell dans le vide sont invariantes par la transformation de Lorentz.

▶ Expliciter les éléments de relativité restreinte nécessaires à ces objectifs.

Einstein 1905

≪ *L'électrodynamique de Maxwell [...] appliquée aux corps en mouvement conduit à une asymétrie qui ne semble pas inhérente aux phénomènes. Prenons par exemple l'action électrodynamique entre un aimant et un conducteur. Le phénomène observable dans ce cas ne dépend que du mouvement relatif du conducteur et de l'aimant, alors que le point de vue habituel établit une distinction nette entre les deux cas pour lesquels l'un ou l'autre de ces objets sont en mouvements. Si l'aimant est en mouvement et le conducteur immobile, il se produit dans le voisinage de l'aimant un champ électrique avec une énergie définie qui génère un courant électrique dans le conducteur. Mais si l'aimant est immobile et le conducteur en mouvement, il n'y a pas de champ électrique au voisinage de l'aimant. Dans le conducteur cependant on trouve une force électromotrice qui ne correspond à aucune énergie mais qui donne lieu - dans l'hypothèse d'égalité du mouvement relatif dans les deux cas examinés - à des courants électriques identiques à ceux produits par les forces électriques dans le premier cas.* ≫

A. Einstein Juin 30, 1905 [1]

1. A. Einstein, "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement [et autres textes]", Jacques Gabay, reprint de l'édition Gauthier-Villars de 1925.

Aimant sphérique tombant dans un tube

La chute libre d'un aimant dans un tube en cuivre devient rapidement un mouvement à vitesse uniforme. Dans le référentiel lié à l'aimant le tube est en mouvement et il est le siège de cette « force électromotrice qui ne correspond à aucune énergie » ; dans le référentiel lié au tube l'aimant est en mouvement et « il se produit dans le voisinage de l'aimant un champ électrique avec une énergie définie qui génère un courant électrique dans le conducteur. »

Cinématique ordinaire

▶ $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ sont les positions dans des repères fixes par rapport à un référentiel :

- $\mathcal{R}$ donné ;
- $\mathcal{R}'$ en mouvement rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}$

Si les origines des repères coïncident à l'instant initial, la relation de changement de référentiel galiléen (ou transformation de Galilée) est

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{v}\,t$$

où t est le temps.

▶ Le principe de relativité galiléenne est que la forme des équations est invariante par changement de référentiel.

Exemple : fluide parfait incompressible

- Dans le référentiel $\mathcal{R}$

$$\rho \left(\partial_t \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u}) \, \vec{u} \right) + \vec{\nabla} P = \vec{0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$\vec{u} \; : \; (t, \vec{x}) \longrightarrow \vec{u}(t, \vec{x})$ est la vitesse eulérienne, ρ la masse volumique du fluide et $P \; : \; (t, \vec{x}) \longrightarrow P(t, \vec{x})$ la pression.

- Dans le référentiel R' : $\vec{u}'$, P' ; les formules de changement de référentiel sont :

$$\vec{u}(t, \vec{x}) = \vec{u}\,'(t, \vec{x} - \vec{v}\, t) + \vec{v} \quad \text{et} \quad P(t, \vec{x}) = P'(t, \vec{x} - \vec{v}\, t)$$

et ($\vec{\nabla}\,'$ est l'opérateur de dérivation par rapport à $\vec{x}\,'$)

$$\begin{array}{lll} \partial_t \vec{u} = \partial_t \vec{u}\,' - (\vec{\nabla}\,' \vec{u}\,') \, \vec{v} & ; & (\vec{\nabla} \vec{u}) = (\vec{\nabla}\,' \vec{u}\,') \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{u}\,' & ; & \vec{\nabla} P = \vec{\nabla}\,' P' \end{array}$$

- D'où

$$\rho \left(\partial_t \vec{u}\,' + (\vec{\nabla}\,' \vec{u}\,') \, \vec{u}\,' \right) + \vec{\nabla}\,' P' = \vec{0} \quad ; \quad \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{u}\,' = 0$$

Les équations du fluide parfait incompressible sont dites « covariantes » par rapport à la transformation de Galilée.

Changement de référentiel galiléen et eqs. de Maxwell

► les champ électrique, induction magnétique, densité de charges et de courant [2] exprimés dans le référentiel $\mathcal{R}$ sont

$$\begin{array}{lllllllllll} \vec{e} & : & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{e}(t,\vec{x}) & ; & \vec{b} & : & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{b}(t,\vec{x}) \\ \rho & : & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \rho(t,\vec{x}) & ; & \vec{j} & : & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{j}(t,\vec{x}) \end{array}$$

► ces mêmes champ électrique, induction magnétique, densité de charges et de courant exprimés cette fois dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sont

$$\begin{array}{lllllllllll} \vec{e}\,' & : & (t,\vec{x}\,') & \longrightarrow & \vec{e}\,'(t,\vec{x}\,') & ; & \vec{b}\,' & : & (t,\vec{x}\,') & \longrightarrow & \vec{b}\,'(t,\vec{x}\,') \\ \rho\,' & : & (t,\vec{x}\,') & \longrightarrow & \rho\,'(t,\vec{x}\,') & ; & \vec{j}\,' & : & (t,\vec{x}\,') & \longrightarrow & \vec{j}\,'(t,\vec{x}\,') \end{array}$$

► la question est de trouver des formules de changement de référentiel liant les grandeurs avec et sans prime telles que ces grandeurs avec prime d'une part et sans prime d'autre part satisfassent les équations de Maxwell.

---

2. dans le vide il est inutile de séparer induction et champ

Changement de référentiel galiléen et eqs. de Maxwell

- Donc

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{b} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{e} & ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 & ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \rho/\epsilon_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \vec{\nabla}' \times \vec{b}' = \mu_0 \vec{j}' + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{e}' & ; \quad \vec{\nabla}' \times \vec{e}' = -\partial_t \vec{b}' \\ \vec{\nabla}' \cdot \vec{b}' = 0 & ; \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{e}' = \rho/\epsilon_0 \end{cases}$$

Quelles relations introduire entre $\vec{h}$, $\vec{e}$, $\vec{j}$, ρ et $\vec{h}'$, $\vec{e}'$, $\vec{j}'$, ρ' ? pour que les deux systèmes soient équivalents ?

- Personne n'a jamais trouvé de telles formules de changement de référentiel. La raison de cet échec est que ces formules n'existent pas ; c'est ce que traduit l'énoncé selon lequel *les équations de Maxwell ne sont pas covariantes par rapport à la transformation de Galilée.*

Cinématique de la relativité restreinte

- $(t, \vec{x})$ et $(t', \vec{x}')$ sont les temps et positions dans des repères temporo-spatials fixes par rapport à un référentiel :
  - $\mathcal{R}$ donné ;
  - $\mathcal{R}'$ en mouvement rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}$

Si les origines des repères coïncident à l'instant initial, la relation de changement de référentiel de Lorentz est $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}}$

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\,\vec{v} + \gamma\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} - t\right)\vec{v} \quad ; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)$$

forme équivalente ↓

$$\vec{x}\,' = \vec{x} + \left((\gamma - 1)\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} - \gamma\, t\right)\,\vec{v}$$

- le temps se transforme aussi.

Inversion de la formule de changement de référentiel

Inversement ($\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}}$)

$$\vec{x} = \vec{x}\,' - \frac{\vec{x}\,' \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\,\vec{v} + \gamma\left(\frac{\vec{x}\,' \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} + t'\right)\vec{v} \quad ; \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\vec{x}\,' \cdot \vec{v}}{c^2}\right)$$

Et ces formules peuvent être obtenue :

- en permutant grandeur avec prime et sans prime et en changeant le signe de $\vec{v}$;
- en résolvant les formules directes par rapport à $\vec{x}'$ et t' [3]

3. La résolution est facilitée avec le concept de produit tensoriel (ou diadique) si $\vec{n}^2 = 1$, $\vec{y} = \vec{x} - \alpha\,(\vec{n} \cdot \vec{x})\,\vec{n} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{y} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\,(\vec{n} \cdot \vec{y})\,\vec{n}$.

Transformation du mouvement d'un point matériel

- Le mouvement d'un point matériel est décrit dans le référentiel $\mathcal{R}$ par $\vec{X} \ : \ t \longrightarrow \vec{X}(t)$
- la question est d'exprimer ce même mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}'$, soit de déterminer la fonction $\vec{X}\,' \ : \ t' \longrightarrow \vec{X}\,'(t')$ telle que $(\vec{X}\,'(t'), t')$ soit la transformée de Lorentz de $(\vec{X}(t), t)$, soit

$$\vec{X}\,'(t') = \vec{X}(t) + \left((\gamma - 1) \frac{\vec{X}(t) \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} - \gamma \, t \right) \vec{v} \quad ; \quad t = \gamma \left(t' + \frac{\vec{X}\,'(t') \cdot \vec{v}}{c^2} \right)$$

$\vec{X}\,'(t')$ n'est pas alors calculable explicitement ; on trouve l'équation implicite

$$\vec{X}\,'(t') = \vec{X}\left(\gamma \left(t' + \frac{\vec{X}\,'(t') \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \right) + \left((\gamma - 1) \frac{\vec{X}\left(\gamma \left(t' + \frac{\vec{X}\,'(t') \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \right) \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} - \gamma^2 \left(t' + \frac{\vec{X}\,'(t') \cdot \vec{v}}{c^2} \right) \right) \vec{v}$$

Cette solution existe toujours et est unique à condition que la vitesse du point matériel soit toujours inférieure à la vitesse de la lumière : $\left| \frac{dX}{dt}(t) \right| < c$

Transformation des vitesses

▶ Un objectif moins ambitieux à celui du paragraphe précédent est de chercher comment se transforme un simple mouvement rectiligne et uniforme ; si donc

$$\vec{X}(t) = \vec{U}\ t$$

alors

$$\vec{X}\,'(t') = \vec{U}\,\gamma\left(t' + \frac{\vec{X}\,'(t')\cdot\vec{v}}{c^2}\right) + \left((\gamma-1)\frac{\gamma\left(t' + \frac{\vec{X}\,'(t')\cdot\vec{v}}{c^2}\right)\ \vec{U}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} - \gamma^2\ \left(t' + \frac{\vec{X}\,'(t')\cdot\vec{v}}{c^2}\right)\right)\ \vec{v}$$

soit encore

$$\vec{X}\,'(t') = \vec{U}\,'\ t' \text{ avec } \vec{U}\,' = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\vec{U} - \frac{\vec{U}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\vec{v}}{1 - \frac{\vec{U}\cdot\vec{v}}{c^2}} - \frac{1 - \frac{\vec{U}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}}{1 - \frac{\vec{U}\cdot\vec{v}}{c^2}}\vec{v}$$

▶ Le mouvement exprimé dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse U' : les composantes de la vitesse $\vec{U}$ qui sont orthogonales à $\vec{v}$ ne se transforment pas de la même façon que la composante dans la direction de $\vec{v}$.

Changement de référentiel du champ électromagnétique

Les champ électrique, induction magnétique, densité de charges et de courant sont

- exprimés dans le référentiel $\mathcal{R}$ sont

$$\begin{array}{lllllllllll} \vec{e} & : & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{e}(t,\vec{x}) & ; & \vec{b} & : & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{b}(t,\vec{x}) \\ \rho & : & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \rho(t,\vec{x}) & ; & \vec{j} & : & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{j}(t,\vec{x}) \end{array}$$

ils sont liés par

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\times\vec{b} = \mu_0\,\vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\,\partial_t\vec{e} & ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{e} = -\partial_t\vec{b} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{b} = 0 & ; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{e} = \rho/\epsilon_0 \end{array}$$

- exprimés dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sont

$$\begin{array}{lllllllllll} \vec{e}\,' & : & (t',\vec{x}\,') & \longrightarrow & \vec{e}\,'(t',\vec{x}\,') & ; & \vec{b}\,' & : & (t',\vec{x}\,') & \longrightarrow & \vec{b}\,'(t',\vec{x}\,') \\ \rho\,' & : & (t',\vec{x}\,') & \longrightarrow & \rho\,'(t',\vec{x}\,') & ; & \vec{j}\,' & : & (t',\vec{x}\,') & \longrightarrow & \vec{j}\,'(t',\vec{x}\,') \end{array}$$

ils sont liés par

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\,'\times\vec{b}\,' = \mu_0\,\vec{j}\,' + \dfrac{1}{c^2}\,\partial_{t'}\vec{e}\,' & ; \quad \vec{\nabla}\,'\times\vec{e}\,' = -\partial_{t'}\vec{b}\,' \\ \vec{\nabla}\,'\cdot\vec{b}\,' = 0 & ; \quad \vec{\nabla}\,'\cdot\vec{e}\,' = \rho\,'/\epsilon_0 \end{array}$$

Changement de référentiel du champ électromagnétique

Cela arrive[4] avec les formules de changement de référentiels

$$\begin{cases} \vec{e}\,' = \gamma \left(\vec{e} - \dfrac{\vec{e}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\vec{v} \right) + \dfrac{\vec{e}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\,\vec{v} + \gamma\,\vec{v}\times\vec{b} \\ \vec{b}\,' = \gamma \left(\vec{b} - \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\vec{v} \right) + \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\,\vec{v} - \gamma\,\vec{v}\times\dfrac{\vec{e}}{c^2} \\ \vec{j}\,' = \left(\vec{j} - \dfrac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\,\vec{v} \right) + \gamma \left(\dfrac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} - \rho \right)\,\vec{v} \\ \rho\,' = \gamma \left(\rho - \dfrac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{c^2} \right) \end{cases}$$

► Les équations de Maxwell sont dites alors covariantes par rapport à la transformation de Lorentz.

4. Les calculs permettant de vérifier cette assertion sont plutôt difficiles à faire si les variables d'espace et de temps sont séparées : si par contre elles sont regroupées de manière à former une position dans l'espace-temps, que cet espace-temps à 4 dimension soit muni d'une métrique *ad hoc* et que la notion de quadrivecteurs soit introduite alors les calculs deviennent plus simples. Mais c'est au prix de l'introduction de concepts qui eux ne sont si pas simples, voir par exemple Landau.

Changement de référentiel du champ électromagnétique

L'inversion des formules de changement de référentiel est

$$\vec{e} = \gamma \left(\vec{e}\,' - \frac{\vec{e}\,' \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} \vec{v} \right) + \frac{\vec{e}\,' \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} \vec{v} - \gamma \, \vec{v} \times \vec{b}\,'$$

$$\vec{b} = \gamma \left(\vec{b}\,' - \frac{\vec{b}\,' \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} \vec{v} \right) + \frac{\vec{b}\,' \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} \vec{v} + \gamma \, \vec{v} \times \frac{\vec{e}\,'}{c^2}$$

$$\vec{j} = \left(\vec{j}\,' - \frac{\vec{j}\,' \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} \vec{v} \right) + \gamma \left(\frac{\vec{j}\,' \cdot \vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} + \rho\,' \right) \vec{v}$$

$$\rho = \gamma \left(\rho\,' + \frac{\vec{j}\,' \cdot \vec{v}}{c^2} \right)$$

qui peut être obtenu

- en permutant grandeur avec prime et sans prime et en changeant le signe de $\vec{v}$;
- en résolvant [5] les formules directes par rapport à $\vec{b}'$, $\vec{e}'$, $\vec{j}'$, ρ'.

5. voir note No 3

Application : densité de charges vs courant électrique

- Un courant électrique de convection de charges électrique ρ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est une densité de courant $\vec{j}$ pour laquelle il existe un champ de vitesses $\vec{u}(t, \vec{x})$ tel que

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x})\ \vec{u}(t, \vec{x})$$

On s'attend à ce que les règles de transformation des densités ρ et $\vec{j}$ dans un changement dréférentiel coïncident avec celle de la transformation du champ de vitesse.

- Le courant correspondant à $\vec{j}$ exprimé dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est

$$\vec{j}\,' = \left(\vec{j} - \frac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\ \vec{v}\right) + \gamma\left(\frac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} - \rho\right)\ \vec{v}$$

et la densité de charges

$$\rho\,' = \gamma\left(\rho - \frac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)$$

Application : densité de charges vs courant électrique

- d'autre part le champ de vitesses $\vec{u}\,'$ est obtenu en appliquant en chacune des positions $\vec{x}$ la formule de changement de transformation des vitesses

$$\vec{u}\,' = \frac{1}{\gamma}\frac{\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\vec{v}}{1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}} - \frac{1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}}{1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}}\vec{v}$$

- Et donc

$$\vec{j}\,'(t', \vec{x}\,') = \rho\,'(t', \vec{x}\,')\ \vec{u}\,'(t', vx')$$

devient

$$\vec{j}\,' = \left(\vec{j} - \frac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\ \vec{v}\right) + \gamma\left(\frac{\vec{j}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}} - \rho\right)\ \vec{v}$$

c'est à dire la même expression que celle qui est obtenue directement sans supposer que le courant électrique est un courant de convection de charges.

Application : charge au repos et en mouvement

Si, dans le référentiel $\mathcal{R}$, les sources sont ρ, une densité stationnaire invariante dans la direction de $\vec{v}$ ($\Longrightarrow \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{v} = 0$) et $\vec{j} = \vec{0}$ alors le champ électromagnétique est

$$\vec{b} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{e} \text{ solution de } \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{e} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \rho/\epsilon_0 \end{cases} \quad \text{avec } \vec{e}\cdot\vec{v} = 0 \text{ et } (\vec{\nabla}\vec{e})\ \vec{v} = \vec{0}$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ ces sources et champs se transforment comme

$$\vec{j}\,' = -\gamma\rho\ \vec{v} \quad ; \quad \rho\,' = \gamma\rho$$
$$\vec{e}\,' = \gamma\ \vec{e} \quad ; \quad \vec{b}\,' = -\gamma\ \vec{v} \times \frac{\vec{e}}{c^2}$$

alors les champs dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sont stationnaires (c'est pour trouver cela que la densité a été supposée invariante dans la direction de $\vec{v}$), solutions de

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\,' \times \vec{b}\,' = \mu_0\, \vec{j}\,' \\ \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{b}\,' = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{\nabla}\,' \times \vec{e}\,' = 0 \\ \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{e}\,' = \rho\,'/\epsilon_0 \end{cases}$$

Application : charge au repos et en mouvement

Il vient alors

$$\vec{b}\,' = -\gamma\,\vec{v} \times \frac{\vec{e}}{c^2} \Longrightarrow \vec{b}\,' = -\vec{v} \times \frac{\vec{e}\,'}{c^2}$$

et donc

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\,' \times \left(-\vec{v} \times \dfrac{\vec{e}\,'}{c^2}\right) = -\mu_0\,\rho\,'\vec{v} \\ \vec{\nabla}\,' \cdot \left(-\vec{v} \times \dfrac{\vec{e}\,'}{c^2}\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\,' \times \left(\vec{v} \times \vec{e}\,'\right) = \dfrac{\rho\,'}{\epsilon_0}\vec{v} \\ \vec{\nabla}\,' \cdot \left(\vec{v} \times \vec{e}\,'\right) = 0 \end{cases}$$

Comme

$$\begin{array}{lll} \vec{v} \text{ uniforme} & \Longrightarrow & \vec{\nabla}\,' \times (\vec{v} \times \vec{e}\,') + (\vec{\nabla}\,'\vec{e}\,')\,\vec{v} = (\vec{\nabla}\,' \cdot \vec{e}\,')\,\vec{v} \\ & \text{et} & \vec{\nabla}\,' \cdot (\vec{v} \times \vec{e}\,') = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\,' \times \vec{e}\,' \end{array}$$

Les deux problèmes en $\vec{e}\,'$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\,' \times \vec{e}\,' = 0 \\ \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{e}\,' = \rho\,'/\epsilon_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{\nabla}\,' \times \left(\vec{v} \times \vec{e}\,'\right) = \dfrac{\rho\,'}{\epsilon_0}\vec{v} \\ \vec{\nabla}\,' \cdot \left(\vec{v} \times \vec{e}\,'\right) = 0 \end{cases}$$

sont identiques.

Approximation galiléenne : position/vitesse

Dans le cas où $\vec{v}$, la vitesse relative des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, et le rapport des dimension L et temps T caractéristiques du dispositif qu'il s'agit de modéliser sont petits devant la vitesse de la lumière c

$$|\vec{v}| << c \quad ; \quad L/T << c$$

les relations de changement de référentiel de Lorentz écrites à l'ordre 1 en $\vec{v}/c$ (i.e. en développant par rapport à $\vec{v}/c$ et en négligeant tous les termes de degrés supérieurs à 2)

$$\vec{x}\,' \;=\; \vec{x} - \vec{v}\,t \quad ; \quad t' \;=\; t$$

Ce sont les relations de changement de référentiel de Galilée.

Approximation galiléenne : champ électromagnétique

▶ Les formules de transformation des champs électromagnétiques deviennent

$$\begin{array}{rclcrcl} \vec{e}\,' & = & \vec{e} + \vec{v} \times \vec{b} & ; & \vec{b}\,' & = & \vec{b} \\ \vec{j}\,' & = & \vec{j} - \rho\,\vec{v} & ; & \rho\,' & = & \rho \end{array}$$

La densité de courant, l'induction magnétique et la densité de charges restent les mêmes par contre le champ électrique est modifié.

▶ Il est tentant de croire que le système approché par l'approximation des basses fréquences est covariant par rapport à la transformation de Galilée ; mais ce n'est pas le cas.

L'approximation galiléenne n'est pas Galilée-invariante

Si le courant de déplacement est négligé dans les équations de Maxwell il reste

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{b} = \mu_0 \vec{j} & ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 & ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \rho/\epsilon_0 \end{cases}$$

Or

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{b} = \vec{\nabla}\,' \times \vec{b}\,' & ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} = \vec{\nabla}\,' \times (\vec{e}\,' - \vec{v} \times \vec{b}\,') \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{b}\,' & ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \vec{\nabla}\,' \cdot (\vec{e}\,' - \vec{v} \times \vec{b}\,') \\ \partial_t \vec{b} = \partial_t' \vec{b}\,' - (\vec{\nabla}\,' \vec{b}\,') \vec{v} & \end{array}$$

D'autre part

$$\vec{v} \text{ uniforme et } \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{b}\,' = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\,' \times (\vec{v} \times \vec{b}\,') + (\vec{\nabla}\,' \vec{b}\,') \vec{v} = \vec{0}$$

d'où

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\,' \times \vec{b}\,' = \mu_0 \, (\vec{j}\,' + \rho\,' \, \vec{v}) & ; \quad \vec{\nabla}\,' \times \vec{e}\,' = -\partial_t \vec{b} \\ \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{b}\,' = 0 & ; \quad \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{e}\,' = \rho\,'/\epsilon_0 + \mu_0 \, (\vec{j}\,' + \rho\,' \, \vec{v}) \cdot \vec{v} \end{cases}$$

qui ne sont pas rigoureusement l'approximation galiléenne des équations de Maxwell dans $\mathcal{R}'$.

L'approximation galiléenne est Galilée-acceptable

Toutefois l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\nabla}\,' \times \vec{e}\,' = -\partial_t \vec{b}\,'$ considérée seule est covariante par rapport à la transformation de Galilée et c'est sur la base de cette covariance partielle qu'est bâti l'électromagnétisme adapté au génie électrique. En effet si

- les problèmes considérés ne comportent pas de charges électriques (en fait si les charges positives compensent les charges négative en tout point et à chaque instant) ;
- le changement de référentiel se fait de manière que la densité de courant soit orthogonale à la vitesse (de manière que le terme $\vec{j}' \cdot \vec{v}$ s'annule)

alors tout se passe comme si l'approximation galiléenne était invariante par transformation de Galilée.

► Ce cas est très fréquent en induction électromagnique où l'utilisation de changements de référentiel galiléen plutôt que lorentzien est possible comme approximation maîtrisée.

La loi d'Ohm dans l'approximation galiléenne

► Dans un milieu immobile dans le référentiel $\mathcal{R}$ la loi d'Ohm s'écrit comme

$$\vec{j} = \sigma\ \vec{e}$$

Les formules de changement de référentiel

$$\begin{array}{lllllllll} \vec{e}\,' & = & \vec{e} + \vec{v} \times \vec{b} & ; & \vec{b}\,' & = & \vec{b} & ; & \vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{v}\ t \\ \vec{j}\,' & = & \vec{j} - \rho\ \vec{v} & ; & \rho\,' & = & \rho & ; & t' = t \end{array}$$

permettent d'écrire dans $\mathcal{R}'$

$$\vec{j}\,' + \rho'\ \vec{v} = \sigma\ \left(\vec{e}\,' - \vec{v} \times \vec{b}\,'\right)$$

► Si inversement il s'agit d'écrire dans un référentiel $\mathcal{R}$ la loi d'Ohm d'un milieu en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à ce référentiel et donc dans lequel elle s'écrirait dans le référentiel $\mathcal{R}'$

$$\vec{j}\,' = \sigma\ \vec{e}\,' \Longrightarrow \vec{j} - \rho\ \vec{v} = \sigma\ \left(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{b}\right)$$

D'où la règle selon laquelle le champ électromoteur dans un milieu en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la somme du champ électrique dans ce référentiel et du produit vectoriel entre cette vitesse et l'induction magnétique.

La loi d'Ohm dans un milieu en mouvement

► L'origine de la contribution $\vec{v} \times \vec{b}$ au champ électrique vient de l'état de mouvement du milieu en un point, il est possible de supposer que ce milieu n'est pas animé d'une vitesse uniforme mais plutôt par un champ de vitesse eulérien

$$\vec{v} \quad : \quad \mathbb{R} \times E_3 \quad \longrightarrow \quad E_3(m/s)$$

La loi d'Ohm dans un tel milieu, où de plus les charges d'espace sont absentes, s'écrit donc

$$\vec{j} = \sigma(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{b})$$

► Par exemple dans le cas d'un mouvement de rotation de solide laissant le domaine conducteur globalement invariant

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{x}$$

et

$$\vec{j} = \sigma(\vec{e} + \vec{x}\,(\vec{\Omega} \cdot \vec{b}) - \vec{\Omega}\,(\vec{x} \cdot \vec{b}))$$

La chute libre d'un aimant dans un tube de cuivre

► L'aimant est sphérique, d'aimantation uniforme M dirigé suivant $\vec{k}_3$; il tombe à vitesse constante à l'intérieur d'un un tube de cuivre droit d'axe également dirigé suivant $\vec{k}_3$.

► L'aimant est immobile dans son référentiel $\mathcal{R}'$: si $\vec{j}'_s$ est la densité de courant surfacique ampérienne, alors l'induction magnétique due à l'aimant seul est solution de

$$\begin{cases} \vec{\nabla}' \times \vec{b}'_s = \mu_0 \vec{j}'_s \\ \vec{\nabla}' \cdot \vec{b}'_s = 0 \end{cases}$$

d'où, après quelques calculs, l'expression valable en dehors du domaine de l'aimant

$$\vec{b}'_s(\vec{x}') = \vec{\nabla}' \times \vec{a}'_s \text{ où } \vec{a}'_s(\vec{x}') = \frac{\mu_0}{|\vec{x}'|^3} \frac{M}{3} \vec{k}_3 \times \vec{x}'$$

Équation dans le tube

▶ Toujours dans le référentiel de l'aimant mais en introduisant le tube, les équations de Maxwell dans l'approximation galiléenne (courant de déplacement négligé [6] ; loi d'Ohm des milieux en mouvement) sont

$$\begin{cases} \vec{\nabla}' \times \vec{b}' = \mu_0 \vec{j}' + \mu_0 \vec{j}_s & ; \quad \vec{\nabla}' \times \vec{e}' = -\partial_{t'} \vec{b}' \\ \vec{\nabla}' \cdot \vec{b}' = 0 & ; \quad \vec{\nabla}' \times \vec{e}' = 0 \\ \vec{j}' = \begin{cases} \sigma(\vec{e}' - \vec{v} \times \vec{b}') & \text{dans le tube} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{cases}$$

▶ En régime stationnaire $\vec{e}' = \vec{0}$ d'où

$$\begin{cases} \vec{\nabla}' \times \vec{b}' = \mu_0 \vec{j}' + \mu_0 \vec{j}'_s & ; \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{b}' = 0 \\ \vec{j}' = \begin{cases} -\sigma\, \vec{v} \times \vec{b}' & \text{dans le tube} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{cases}$$

6. la densité de charges électrique est nulle du fait de la symétrie axisymétrique du dispositif)

Superposition

► En enlevant au problème complet (aimant + tube) la partie qui correspond à l'aimant seul, il vient que les courants induits dans le tube $\vec{j}\,'$ sont tels que

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\,' \times \vec{b}_r\,' = \mu_0\, \vec{j}\,' & ; \quad \vec{\nabla}\,' \cdot \vec{b}_r\,' = 0 \\ \vec{j}\,' = \begin{cases} -\sigma\ \vec{v} \times (\vec{b}_s + \vec{b}_r\,') & \text{dans le tube} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{cases}$$

où

- $\vec{b}_r\,'$ est l'induction magnétique due aux courants induits $\vec{j}\,'$ seuls ;
- $\vec{b}_s\,'$ est l'induction magnétique

$$\vec{b}\,'_s(\vec{x}\,') = \vec{\nabla}\,' \times \vec{a}\,'_s \text{ avec } \vec{a}\,'_s(\vec{x}\,') = \frac{\mu_0}{|\vec{x}\,'|^3}\frac{M}{3}\ \vec{k}_3 \times \vec{x}\,'$$

Le modèle est complet et prêt à être calculé.

Exercices

▶ Trouver le mouvement $\vec{x}\,'(t')$ dans $\mathcal{R}'$ pour un mouvement $\vec{X}(t)$ dans $\mathcal{R}$ si la vitesse entre les deux référentiels est

$$\vec{v} = v\ \vec{k}_3 \text{ avec } \vec{X}(t) \cdot \vec{k}_3 = 0$$

Si le mouvement est de la forme $\vec{X}(t) = r\ \cos\omega t\ \vec{k}_1 + r\ \sin\omega t\ \vec{k}_2$ que peut-on dire de $\vec{X}\,'(t')$?

▶ Écrire le modèle de calcul des courants induits lors de la chute libre d'un aimant dans un tube dans le référentiel lié au tube.