# Transfert inductif de l'énergie

# Leçon 5

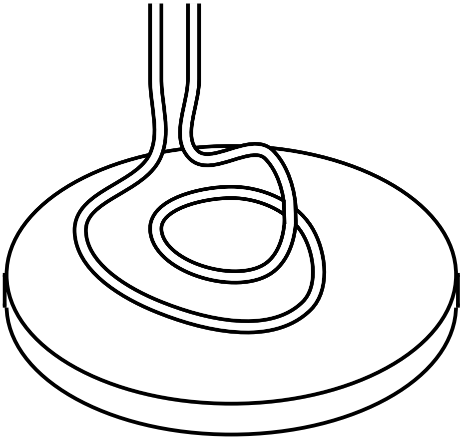
# Induction transversale

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

6 octobre 2014

# L'induction transverse

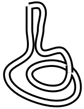


Un inducteur est disposé de manière que son induction source puisse traverser la pièce conductrice dans une direction normale à ses plus grandes dimensions.

# Modèle de calcul

► Le modèle en potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique n'est pas le plus astucieux ; il est préférable d'en utiliser un autre formulé en fonction de courant et potentiel scalaire magnétique.
► Ce modèle n'est pas d'un abord si facile, aussi la géométrie et les propriétés physiques des éléments du dispositif générique à partir duquel il va être introduit vont-elles être simplifiées d'emblée :

- il n'y a en présence que l'inducteur $D_s$ et la charge $D$ supposée être connexe ;
- Comme à la leçon 3, l'inducteur est fermé de manière qu'il puisse être considéré comme un tore. La formulation en courant est choisie.



- Les fonctions de perméabilité et conductivité dans l'espace sont

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 \, \mu_r & \text{dans} \quad D \\ \mu_0 & \text{ailleurs} \end{cases} \; ; \; s = \begin{cases} \sigma & \text{dans} \quad D \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

# Champs sources

- Le courant source est donc

$$\underline{\vec{j}}_s = i_s \, \vec{u}_s$$

où $\vec{u}_s$ est l'élément générateur de l'espace de cohomologie de ce tore.

- L'induction source est l'induction qu'il y aurait en l'absence de l'aspect conducteur de la charge, i.e. $\underline{\vec{h}}_s$, $\underline{\vec{b}}_s$ sont solutions de

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{h}}_s = \underline{\vec{j}}_s \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{b}}_s = 0 \quad ; \quad \underline{\vec{b}}_s = \mu \, \underline{\vec{h}}_s$$

où $\mu$ est la fonction de perméabilité qui prend aussi en compte le magnétisme de la charge.

- le champ électrique source est solution de

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}}_s = -j \, \omega \, \underline{\vec{b}}_s \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{e}}_s = 0$$

D'éventuelles charges d'espace dans l'inducteur ne sont pas prises en compte.

# Champs de réaction d'induit

- $\underline{\vec{b}}_t$, $\underline{\vec{h}}_t$, $\underline{\vec{e}}_t$ sont les induction, champ magnétique, champ électrique totaux ; $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\rho}$ sont les densité de courants induits et charge d'espace ; ils sont solutions de

$$
\begin{array}{lcl}
\vec{\nabla} \times \underline{\vec{h}}_t = \underline{\vec{j}}_s + \underline{\vec{j}} & ; & \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{b}}_t = 0 \\
\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}}_t = -j\,\omega\, \underline{\vec{b}}_t & ; & \epsilon_0\, \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{e}}_t = \underline{\rho} \\
\underline{\vec{b}}_t = \mu\, \underline{\vec{h}}_t & ; & \underline{\vec{j}} = s\, \underline{\vec{e}}_t
\end{array}
$$

avec (rappelons-le)

$$
\mu = \begin{cases} \mu_0\, \mu_r & \text{dans} \quad D \\ \mu_0 & \text{ailleurs} \end{cases} \; ; \; s = \begin{cases} \sigma & \text{dans} \quad D \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}
$$

- $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{h}}$, $\underline{\vec{e}}$ sont tels que

$$
\underline{\vec{b}}_t = \underline{\vec{b}}_s + \underline{\vec{b}} \quad ; \quad \underline{\vec{h}}_t = \underline{\vec{h}}_s + \underline{\vec{h}} \quad ; \quad \underline{\vec{e}}_t = \underline{\vec{e}}_s + \underline{\vec{e}}
$$

ce sont les champs de réaction d'induit.

# Superposition

- En procédant par superposition, $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{h}}$, $\underline{\vec{e}}$ sont solutions de

$$
\begin{array}{lcl}
\vec{\nabla} \times \underline{\vec{h}} = \underline{\vec{j}} & ; & \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{b}} = 0 \\
\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} = -j\,\omega\,\underline{\vec{b}} & ; & \epsilon_0\,\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{e}} = \underline{\rho} \\
\underline{\vec{b}} = \mu\,\underline{\vec{h}} & ; & \underline{\vec{j}} = s\,(\underline{\vec{e}} + \underline{\vec{e}}_s)
\end{array}
$$

C'est ce système qui va être considéré.

- Le terme source est $\underline{\vec{e}}_s$, qui peut être appelé le champ électromoteur, n'est actif que là où $s \neq 0$ c'est à dire dans $D$. La caractéristique majeure est que s'il se réduisait au gradient d'un potentiel dans $D$ la solution du système serait

$$\underline{\vec{e}} = -\underline{\vec{e}}_s \text{ dans } E_3 \Longrightarrow \underline{\vec{j}} = \vec{0} \text{ et donc } \underline{\vec{b}} = \vec{0} \text{ dans } E_3$$

Les courants induits sont donc contrôlés par le rotationnel $\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}}_s$ du champ électromoteur qui est (par Maxwell-Faraday) la variation temporelle de l'induction source $-j\,\omega\,\underline{\vec{b}}_s$.

# La fonction de courant et le potentiel scalaire magnétique

► Si $D$ est connexe, la densité de courant peut être paramétrisée par la fonction de courants $\underline{\vec{T}}$ telle que

$$\begin{cases} \underline{\vec{j}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}} \; ; \; \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{T}} = 0 & \text{dans} \quad D \\ \underline{\vec{T}} \times \vec{n} = \vec{0} & \text{sur} \quad \partial D \\ \underline{\vec{T}} = \vec{0} & \text{dans} \quad E_3 - D \end{cases}$$

La propriété sur le bord $\partial D$ de $D$ entraîne que

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

et donc le courant induit reste confiné à l'intérieur de $D$.

► Puisque $\underline{\vec{T}}$ n'a pas de discontinuité tangentielle, la relation de Maxwell-Ampère se réécrit alors comme

$$\vec{\nabla} \times (\underline{\vec{h}} - \underline{\vec{T}}) = \vec{0} \text{ dans } E_3$$

et le lemme de Poincaré *ad hoc* permet de poser

$$\underline{\vec{h}} = \underline{\vec{T}} - \vec{\nabla}\underline{\Omega} \text{ dans } E_3$$

où $\underline{\Omega}$ est le potentiel scalaire magnétique.

# Conservation de l'induction magnétique

L'injection de ces nouvelles variables dans le reste des équations du système fournit

- Pour $\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{b}} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \, (\underline{\vec{T}} - \vec{\nabla} \underline{\Omega})) = 0 \text{ dans } E_3$$

soit [1]

$$\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{\nabla} \underline{\Omega} + \mu \, \underline{\vec{T}} \cdot \vec{n} \, \delta_{\partial D} = 0 \text{ dans } E_3$$

qui est l'équation permettant le calcul de $\underline{\Omega}$ connaissant

$$\underline{\vec{T}} \cdot \vec{n} \text{ sur } \partial D$$

$\delta_{\partial D}$ est la distribution surfacique telle que

$$\forall \varphi \ : \ \int_{E_3} \varphi \, \delta_{\partial D} \, d\vec{x}^3 = \int_{\partial D} \varphi \, d\vec{x}^2$$

1. on suppose $\mu$ uniforme dans $D$

# Maxwell-Faraday dans la charge

- l'équation $\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} = -j\,\omega\,\underline{\vec{b}}$ s'écrit dans $D$ comme

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} = -j\,\omega\,\mu\,\underline{\vec{T}} - j\,\omega\,\mu\,\vec{\nabla}\underline{\Omega} \text{ dans } D$$

Il est possible d'ajouter que

$$\underline{\vec{e}} = \frac{\underline{\vec{j}}}{\sigma} - \underline{\vec{e}}_s = \frac{\vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}}}{\sigma} - \underline{\vec{e}}_s \text{ dans } D$$

et donc elle prend la forme

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}}}{\sigma} \right) - \underbrace{\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}}_s}_{= -j\,\omega\,\underline{\vec{b}}_s} = -j\,\omega\,\mu\,\underline{\vec{T}} - j\,\omega\,\mu\,\vec{\nabla}\underline{\Omega} \text{ dans } D$$

et comme

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{T}} = 0 \text{ dans } D \;;\; \underline{\vec{T}} \times \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \partial D$$

ce système permet le calcul de $\underline{\vec{T}}$ dans $D$ dès lors que $\underline{\Omega}$ est supposé connu.

# Maxwell-Faraday en dehors de la charge

- l'équation $\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} = -j\,\omega\,\underline{\vec{b}}$ s'écrit en dehors de $D$ comme

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} = -j\,\omega\,\mu\,\vec{\nabla}\underline{\Omega} \text{ dans } E_3 - D$$

Elle est compatible avec $\vec{\nabla} \cdot \mu\vec{\nabla}\underline{\Omega} + \mu\,\underline{\vec{T}} \cdot \vec{n}\,\delta_{\partial D} = 0$ dans $E_3$ qui s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \mu\vec{\nabla}\underline{\Omega} = 0 \text{ dans } E_3 - D$$

Si on considère qu'il n'y a pas de charges d'espace en dehors de $D$, l'équation de Gauss s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{e}} = 0 \text{ dans } E_3 - D$$

Et comme $\underline{\vec{e}}$ doit être continu tangentiellement sur $\partial D$ on dispose de la condition aux limites

$$\underline{\vec{e}}_{|\text{côté } E_3 - D} \times \vec{n} = \underline{\vec{e}}_{|\text{côté } D} \times \vec{n} \text{ sur } \partial D$$

qui complète les conditions permettant le calcul de $\underline{\vec{e}}$ dans $E_3 - D$

# Formulation $\mathbf{T}-\mathbf{\Omega}$

La forme finale du système permettant le calcul de la fonction de courant $\underline{\vec{T}}$ connaissant le potentiel scalaire magnétique $\underline{\Omega}$ est alors

$$\left\{\begin{array}{lll} \vec{\nabla}\times\left(\dfrac{1}{\sigma}\,\vec{\nabla}\times\underline{\vec{T}}\right) = -j\,\omega\,\mu\,\underline{\vec{T}} - j\,\omega\,\mu\,\vec{\nabla}\underline{\Omega} - j\,\omega\,\underline{\vec{b}}_s & \text{dans} & D \\ \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{T}} = 0 & - & D \\ \underline{\vec{T}}\times\underline{\vec{T}} = \vec{0} & \text{sur} & \partial D \end{array}\right.$$

et ce qu'on appelle formulation $\mathbf{T}-\mathbf{\Omega}$ est constitué de ce système auquel est adjoint l'équation déjà établie permettant le calcul de $\underline{\Omega}$

$$\vec{\nabla}\cdot\mu\vec{\nabla}\underline{\Omega} + \mu\,\underline{\vec{T}}\cdot\vec{n}\,\delta_{\partial D} = 0 \text{ dans } E_3$$

De plus le système

$$\left\{\begin{array}{lll} \vec{\nabla}\times\underline{\vec{e}} = -j\,\omega\,\mu\,\vec{\nabla}\underline{\Omega} & \text{dans} & E_3 - D \\ \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{e}} = 0 & - & E_3 - D \\ \underline{\vec{e}}_{|\text{côté } E_3 - D}\times\vec{n} = \underline{\vec{e}}_{|\text{côté } D}\times\vec{n} & \text{sur} & \partial D \end{array}\right.$$

permet d'accéder aux charges surfaciques sur $\partial D$ par

$$\rho_s = \underline{\vec{e}}_{|\text{côté } E_3 - D}\cdot\vec{n} + \underline{\vec{e}}_s\cdot\vec{n}$$

# Plaque plane :courant uniforme sur la tranche

Si la charge a une forme de plaque plane d'épaisseur plus grande que la profondeur de pénétration de l'effet Kelvin, alors il est possible de supposer que le courant ne varie pas suivant $\vec{k}_3$ et d'approximer le courant induit par

$$\underline{\vec{j}} = \underline{j}_1(x_1, x_2)\ \vec{k}_1 + \underline{j}_2(x_1, x_2)\ \vec{k}_2 \text{ dans } D$$

et $\underline{\vec{j}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}}$ se traduit par

$$\underline{\vec{T}} = \underline{T}(x_1, x_2)\ \vec{k}_3 \Longrightarrow \underline{j}_1 = \partial_2 \underline{T}\ ;\ \underline{j}_2 = -\partial_1 \underline{T}$$

La condition

$$\underline{\vec{T}} \times \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \Gamma_n$$

est respectée et il reste à ajouter n à ajouter

$$\underline{T} = 0 \text{ sur } \Gamma_l$$

pour qu'elle le soit sur $\Gamma_l$.

# Plaque plane : premiers résultats

La projection de

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\sigma} \, \vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}} \right) = -j \, \omega \, \mu \, \underline{\vec{T}} - j \, \omega \, \mu \, \vec{\nabla} \underline{\Omega} - j \, \omega \, \underline{\vec{b}}_s \text{ dans } D$$

le long de l'axe $\vec{k}_3$ est

$$\Delta \underline{T} - j \, \omega \, \sigma \left( \mu \, \underline{T} + \mu \, \partial_3 \underline{\Omega} + \underbrace{\underline{\vec{b}}_s \cdot \vec{k}_3}_{= \underline{b}_3} \right) = 0 \text{ dans } D$$

L'équation du potentiel scalaire magnétique devient

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \mu \vec{\nabla} \underline{\Omega} \right) + \mu \, \underline{T} \, \delta_{\Gamma_n} - \mu \, \underline{T} \, \delta_{\Gamma_s} = 0$$

où $\delta_{\Gamma_n}$ et $\delta_{\Gamma_s}$ sont les distributions surfaciques

$$\forall \varphi \ : \ \int_{E_3} \varphi \, \delta_{\Gamma_n} \, d\vec{x}^3 = \int_{\Gamma_n} \varphi \, d\vec{x}^2 \ ; \ \int_{E_3} \varphi \, \delta_{\Gamma_s} \, d\vec{x}^3 = \int_{\Gamma_s} \varphi \, d\vec{x}^2$$

# Plaque plane : affaiblissement de l'éq. du courant (1/2)

Le modèle devient alors

$$\begin{cases} \Delta \underline{T} - j\,\omega\,\sigma\ (\mu\ \underline{T} + \mu\ \partial_3 \underline{\Omega} - \underline{b}_3) = 0 & \text{dans} \quad D \\ \underline{T} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_l \\ \vec{\nabla} \cdot \left( \mu \vec{\nabla} \underline{\Omega} \right) + \mu\ \underline{T}\ \delta_{\Gamma_n} - \mu\ \underline{T}\ \delta_{\Gamma_s} = 0 & \text{dans} \quad E_3 \end{cases}$$

L'équation de la fonction de courant $\underline{T}$ n'est pas cohérente puisque $\underline{T}$ ne dépend pas de $x_3$ alors que $\underline{\vec{b}}_s$ et $\underline{\Omega}$ en dépendent *a priori*.

L'approximation faite sur l'uniformité de $\underline{\vec{j}}$ dans la tranche de la plaque doit donc être complétée par une approximation sur cette équation qui consiste à ne retenir d'elle que sa valeur moyenne sur cette tranche, soit

$$\Delta \underline{T} - j\,\omega\,\sigma\ \left( \mu\ \underline{T} + \mu\ \frac{1}{e} \int_0^e \partial_3 \underline{\Omega}\ dx_3 + \frac{1}{e} \int_0^e \underline{b}_3\ dx_3 \right) = 0$$

# Plaque plane : affaiblissement de l'éq. du courant (2/2)

En posant

$$\underline{\Omega}_n = \underline{\Omega}(x_1, x_1, e) \quad ; \quad \underline{b}_s(x_1, x_2) = \frac{1}{e}\int_0^e \underline{b}_3(x_1, x_2, x_3)\, dx_3$$
$$\underline{\Omega}_s = \underline{\Omega}(x_1, x_1, 0)$$

l'équation moyenne devient

$$\Delta \underline{T} - j\,\omega\,\sigma\,\left(\mu\,\underline{T} - j + \mu\,\frac{\underline{\Omega}_n - \underline{\Omega}_s}{e} + \underline{b}_s\right) = 0$$

Le domaine où elle est définie est $\Gamma$ la projection (suivant $\vec{k}_3$) dans le plan $E_2$ du domaine $D$ et le bord $\partial\Gamma$ de ce domaine est la projection dans ce plan du bord latéral $\Gamma_l$ de $D$. La condition aux limites sur $\Gamma_l$ devient alors

$$\underline{T} = 0 \text{ sur } \partial\Gamma$$

ce qui permet le calcul effectif de $\underline{T}$ connaissant $\underline{b}_s$ et $\underline{\Omega}$.

# Modèle $\mathbf{T} - \Omega$ de la plaque plane

En excluant les aspects capacitifs, le modèle final est

$$\begin{cases} \Delta \underline{T} - \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \left(\underline{T} + \frac{\underline{\Omega_n} - \underline{\Omega_s}}{e} + \underline{h}_s\right) = 0 & \text{dans} \quad \Gamma \\ \underline{T} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Gamma \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\mu \vec{\nabla} \underline{\Omega}\right) + \mu \, \underline{T} \, \delta_{\Gamma_n} - \mu \, \underline{T} \, \delta_{\Gamma_s} = 0 & \text{dans} \quad E_3 \\ \underline{\Omega}_n = \underline{\Omega}_{|\Gamma_n} \, ; \; \underline{\Omega}_s = \underline{\Omega}_{|\Gamma_s} & \end{cases}$$

où $\underline{h}_s = \underline{b}_s / \mu$ et

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \, \mu_0 \, \mu_r \, \omega}}$$

est la profondeur de pénétration de l'effet Kelvin dans la plaque.

La fonction de courant $\underline{T}$ est circonscrite à un domaine 2D alors que le potentiel scalaire magnétique a des valeurs dans tout l'espace ; mais seules ses valeurs sur les bords nord et sud de la plaque sont utilisées.

# Modèle en fonction de courant

Pour une plaque non-magnétique

$$\mu_r = 1$$

cela conduit à d'importantes simplifications. Notamment le champ source se calcule par Biot et Savart

$$\underline{\vec{a}}_s(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \underline{i}_s \int_{D_s} \frac{u_s(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\ d\vec{y}^3 \Longrightarrow \underline{\vec{b}}_s(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \underline{i}_s \int_{D_s} \frac{u_s(\vec{y}) \times (\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^{3/2}}\ d\vec{y}^3$$

et comme il n'est utilisé que dans la plaque (en dehors du domaine inducteur $D_s$) il n'y a pas de difficultés numériques pour obtenir ses valeurs.

Mais de plus le problème du potentiel scalaire magnétique peut également être formulé sous intégrale comme

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\underline{T}(x_1,x_2)\ dy_2\ dy_3}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(e-x_3)^2}} \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\underline{T}(x_1,x_2)\ dy_2\ dy_3}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+x_3^2}} \end{aligned}$$

## Cas d'une plaque conductrice et non-magnétique

Le potentiel scalaire magnétique est utilisé en $x_3 = 0$ et $x_3 = e$ et les deux intégrales sont symétriques dans le sens que la valeur en $x_3 = 0$ de la première est la valeur en $x_3 = e$ de l'autre et vice-versa. le modèle peut donc être réarrangé en posant

$$\underline{F} = e\ \underline{T}$$

comme

$$\begin{cases} \Delta \underline{F} - \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \left(\underline{F} + 2\left(\underline{\psi}_0 - \underline{\psi}_e\right) + e\ \underline{h}_s\right) = 0 & \text{dans} \quad \Gamma \\ \underline{F} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Gamma \\ \underline{\psi}_0 = \frac{1}{4\pi\ e} \int_\Gamma \frac{\underline{F}(x_1, x_2)\ dy_2\ dy_3}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} & \\ \underline{\psi}_e = \frac{1}{4\pi\ e} \int_\Gamma \frac{\underline{F}(x_1, x_2)\ dy_2\ dy_3}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + e^2}} & \end{cases}$$

L'interêt est que $F(x, y)$ est directement la quantité de courant qui traverse une courbe quelconque joignant le point $(x, y)$ à un point quelconque du bord de $\Gamma$.

# Réaction d'induit négligée et induction source uniforme

La réaction d'induit est prise en compte par le terme

$$(\underline{\psi}_0 - \underline{\psi}_e)$$

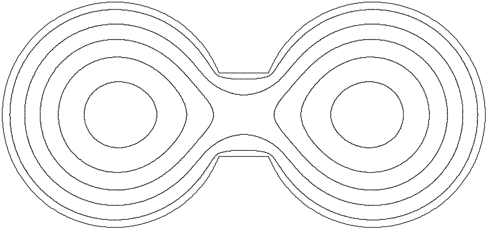
Si cette contribution est négligée, et que de plus l'induction source est uniforme (la plaque est placée à l'intérieur d'une bobine de hauteur $L$) le problème de la recherche du courant induit devient assez simple : il suffit de calculer la solution de

$$\begin{cases} \Delta \underline{F} - \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \left(\underline{F} + N\underline{i}\,\frac{e}{L}\right) = 0 & \text{dans} \quad \Gamma \\ \underline{F} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Gamma \end{cases}$$

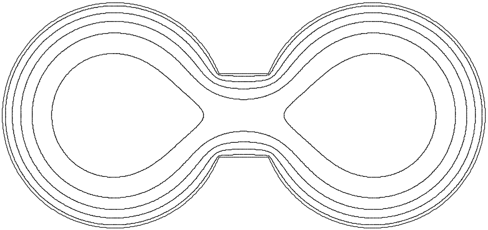
où $N\,\underline{i}$ sont les ampères-tours de la bobine inductrice.

Les résultats de calcul donnent des informations qualitatives intéressantes sur les chemins de passage du courant.

# Haltère, $R = 1, e = 0.8, d = 2.3, \delta = 0.3, N\,\underline{i}e/L = 1$

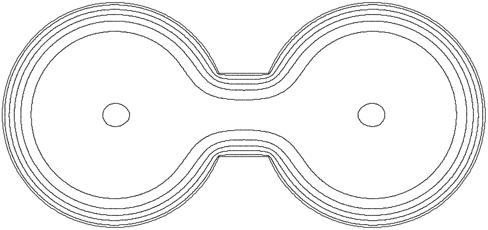


Partie réelle
$-0.005 < \Re\{\underline{F}\} < 1$

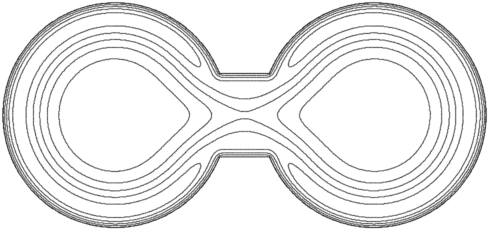


Partie imaginaire
$0 < \Im\{\underline{F}\} < 0.55$

## Haltère, $R = 1, e = 0.8, d = 2.3, \delta = 0.1, N\,\underline{i}e/L = 1$

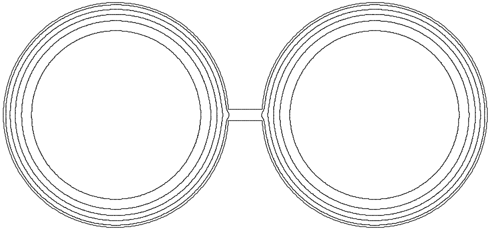


Partie réelle
$-0.1 < \Re\{\underline{E}\} < 1$

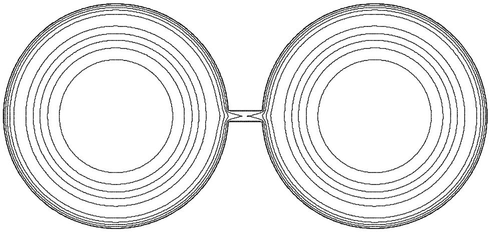


Partie imaginaire
$-.02 < \Im\{\underline{E}\} < 0.35$

# Haltère, $R = 1, e = 0.1, d = 2.3, \delta = 0.1, N\,\underline{i}e/L = 1$

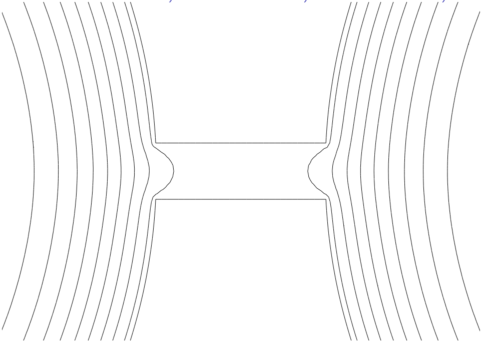


Partie réelle
$-0.09 < \Re\{\underline{F}\} < 1$

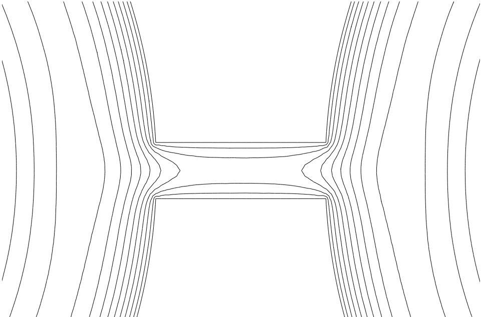


Partie imaginaire
$-0.02 < \Im\{\underline{F}\} < 0.35$

## Haltère, $R = 1, e = 0.1, d = 2.3, \delta = 0.1, N\,\underline{i}e/L = 1$

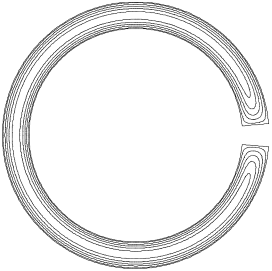


Partie réelle
$-0.09 < \Re\{\underline{F}\} < 1$

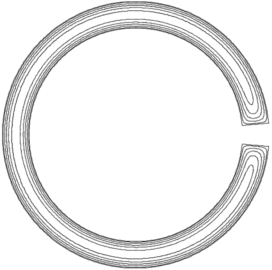


Partie imaginaire
$-0.02 < \Im\{\underline{F}\} < 0.35$

# Couronne coupée, $R = 2, R1 = 0.8, \delta = 1, N \, \underline{i}e/L = 1$

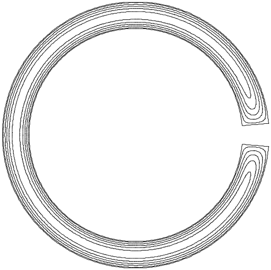


Partie réelle
$0.99999 < \Re\{\underline{F}\} < 1$

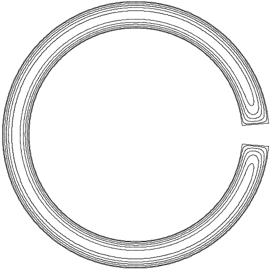


Partie imaginaire
$0 < \Im\{\underline{F}\} < 0.0035$

# Couronne coupée, $R = 2, R1 = 0.8, \delta = 0.1, N\,\underline{i}e/L = 1$

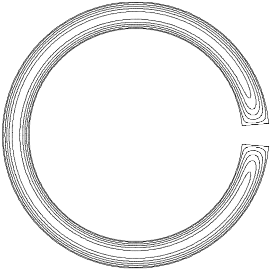


Partie réelle
$0.90 < \Re\{\underline{F}\} < 1$

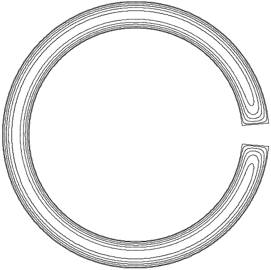


Partie imaginaire
$0 < \Im\{\underline{F}\} < 0.32$

# Couronne coupée, $R = 2, R1 = 0.8, \delta = 0.1, N\,\underline{i}e/L = 1$

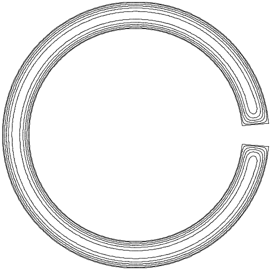


Partie réelle
$0.90 < \Re\{\underline{F}\} < 1$

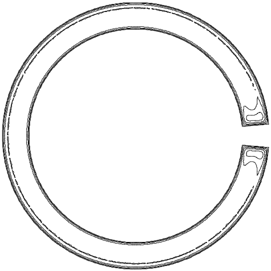


Partie imaginaire
$0 < \Im\{\underline{F}\} < 0.32$

# Couronne coupée, $R = 2, R1 = 0.8, \delta = 0.03, N\ \underline{i}e/L = 1$



Partie réelle
$-0.14 < \Re\{\underline{F}\} < 1$



Partie imaginaire
$0 < \Im\{\underline{F}\} < 0.48$

# Bilan de puissances

Quelques manipulations permettent d'établir que

$$\int_D \underline{\vec{e}_s} \cdot (\vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}}^*) \, d\vec{x}^3 = P + j\, Q$$

avec

$$\begin{aligned} P &= \int_D \frac{|\vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}}|^2}{\sigma} \, d\vec{x}^3 \\ Q &= \omega \left( \int_D \mu \, |\underline{\vec{T}} - \vec{\nabla}\underline{\Omega}|^2 \, d\vec{x}^3 + \int_{E_3 - D} \mu \, |\vec{\nabla}\underline{\Omega}|^2 \, d\vec{x}^3 \right) \end{aligned}$$

Ce n'est qu'un bilan de puissances partiel puisque le terme source est le champ électromoteur $\underline{\vec{e}_s}$ et donc qu'il manque le raccord au problème source permettant le calcul de $\underline{\vec{e}_s}$ en fonction du courant $\underline{i}_s$.

Néanmoins il est intéressant d'examiner sa structure

# Puissances active et réactive

En remplaçant $\underline{\vec{j}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{T}}$ et $\underline{\vec{h}} = \begin{cases} \underline{\vec{T}} - \vec{\nabla}\underline{\Omega} & \text{dans} \quad D \\ -\vec{\nabla}\underline{\Omega} & \text{ailleurs} \end{cases}$

il vient

$$P = \int_D \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma} \, d\vec{x}^3 \quad ; \quad Q = \omega \int_{E_3} \mu \, |\underline{\vec{h}}|^2 \, d\vec{x}^3$$

qui sont exactement les formes attendues pour les puissances. À ceci près que la puissance réactive $Q$ n'est pas complète puisqu'elle devrait être

$$Q = \omega \int_{E_3} \mu \, |\underline{\vec{h}} + \underline{\vec{h}}_s|^2 \, d\vec{x}^3$$

d'où la remarque sur le fait que le bilan n'est que partiel.

# Champ électromoteur

Si $D$ était un tore et que $\underline{\vec{e}}_s$ soit un élément d'un espace de cohomologie de la forme

$$\underline{\vec{e}}_s = \underline{v} \, \frac{\vec{u}}{\displaystyle\int_D \vec{u}_s^2 \, d\vec{x}^3}$$

l'expression

$$P + j\, Q = \int_D \underline{\vec{e}}_s \cdot \underline{\vec{j}}^* \, d\vec{x}^3$$

pourrait être mise sous la forme

$$P + j\, Q = \underline{v}\ \underline{i}^* \text{ avec } \underline{i} = \frac{\int_D \vec{u} \cdot \underline{\vec{j}}}{\displaystyle\int_D \vec{u}^2 \, d\vec{x}^3} \, d\vec{x}^3$$

Mais $D$ n'est pas un tore. Cependant un effet Kelvin prononcé a le même effet qu'enlever la partie centrale de $D$, c'est à dire de le transformer en tore. . .

# L'avenir du modèle $\mathbf{T}-\mathbf{\Omega}$

La description faite du modèle $\mathbf{T}-\mathbf{\Omega}$ est incomplète, manquent :

- le bilan de puissance incluant le champ source ;
- la description des modalités permettant de prendre en compte les effets capacitifs dans la charge et l'inducteur ;
- une extension du modèle de plaque plane à une plaque de géométrie quelconque.

Mais surtout il manque un modèle permettant de décrire comme un tore (ou un objet plus compliqué topologiquement) un domaine charge connexe soumis à un champ électromoteur $\underline{\vec{e}}_s$ dans le cas où l'effet Kelvin est prononcé ; ça relève encore d'une activité de recherche.

# Exercice

Réécrire le modèle $\mathbf{T} - \mathbf{\Omega}$ dans l'hypothèse des courants induits uniformes dans une tranche de plaque axisymétrique soumise à un induction source uniforme.