Transfert inductif de l'énergie

Leçon 4

Induction longitudinale

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

29 septembre 2014

Objectif de la leçon

On parle d'induction longitudinale lorsque l'induction source est dirigée suivant la plus grand longueur de la charge en l'absence de celle-ci. les objectifs sont

- de discuter dans ce cadre du modèle d'induction formulé en potentiel vecteur magnétique en introduisant la question de la relation magnétique générale ;

- d'expliquer le modèle d'impédance de frontière qui permet de prendre en compte un effet Kelvin prononcé.

Vocabulaire du magnétisme (1/4)

- La relation linéaire locale en espace et en temps

$$\vec{b} = \mu_0 \, \mu_r \, \vec{h}$$

où μ_r est la perméabilité magnétique relative, entre induction et champ magnétiques dans un matériau magnétique est une idéalisation.

- Si cette relation est écrite

$$\vec{b} = \mu_0 \, (\vec{h} + \vec{m})$$

où $\vec{m}$ (em A/m) s'appelle l'aimantation (c'est la densité de moment magnétique (en $A\,m^2$) par unité de volume) alors

  - si $\vec{m}$ ne dépend que de l'espace le matériau est un aimant permanent parfait ;
  - si de plus $\vec{m}$ dépend de $\vec{h}$ on dit qu'il y a magnétisme induit [1].

1. l'adjectif induit signifie que sans champ magnétique il n'y aurait pas de magnétisme. Ce n'est pas le même phénomène que celui de courants induits où l'adjectif indique que s'il n'y avait pas d'incitation extérieur – la variation temporelle du champ magnétique – il n'y aurait pas de courants.

Vocabulaire du magnétisme (2/4)

► L'aimant permanent parfait est encore une idéalisation et le comportement magnétique général est celui du magnétisme induit de façon non-locale en temps, c'est à dire que $\vec{m}$ dépend des valeurs de $\vec{h}$ non seulement à l'instant où on le considère mais aussi celles des instants précédents. C'est une relation hystérésique.

► Par exemple une toujours idéalisation d'un aimant permanent peut être donnée par

$$\vec{m} = \begin{cases} J_r \frac{\vec{h}_x}{|\vec{h}_x|} & \text{si} \quad |\vec{h}_x| = \max_{\tau<t} |\vec{h}|(\tau) > J_c \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

Si à un moment de son histoire le champ magnétique a eu une intensité plus grande que J_c (aimantation coercitive) alors l'aimantation a un module J_r (aimantation rémanente) dirigé dans la direction de ce champ.

Vocabulaire du magnétisme (3/4)

- les matériaux magnétiques sont séparés en deux classes :
  - les matériaux durs qui ont un comportement connexe à celui de l'aimant parfait : ils s'aimantent difficilement mais leur aimantation demeure ;
  - les matériaux mous qui ont un comportement connexe à celui de la relation magnétique linéaire : ils s'aimantent facilement et leur aimantation disparaît avec le champ appliqué.

- Dans le cas de la relation magnétique linéaire, si $\mu_r > 1$ le matériau est dit paramagnétique et diamagnétique dans le cas contraire (μ_r reste cependant positif).

- Un matériau diamagnétique est parfait si $\mu_r = 0$; ce type de matériaux existe, c'est le supraconducteur mais il est (pour l'instant) peu utilisé en induction magnétique parce que la propriété de supraconduction est difficilement compatible les fréquences qui y sont utilisées.

Vocabulaire du magnétisme (4/4)

► le magnétisme porte sur des quantités vectorielles composées d'une amplitude qui est une quantité physique scalaire et d'une orientation de l'espace ; en général la relation n'est pas isotrope mais anisotrope.

► Il y a un lien entre magnétisme et déformation d'un matériau ; typiquement la perméabilité dans la direction du laminage n'est pas la même que dans la direction transverse pour une tôle magnétique.

► Les propriétés magnétiques d'un matériau dépendent de sa température.

Phénoménologie et physique

► L'approche physique du magnétisme consiste à associer tel ou tel autre comportement magnétique à un modèle mettant en œuvre les atomes d'un réseau ou les électrons libres de la bande de conduction ; elle permet d'expliquer le magnétisme et aussi de prévoir des relations magnétiques plus ou moins quantitativement.

► L'approche phénoménologique (ou empirique) constate l'existence du comportement magnétique et cherche à en rendre compte de la façon la plus économique possible sans s'occuper de l'expliquer.

► C'est l'approche phénoménologique qui est déclinée ici en différents aspects.

Les matériaux magnétiques

▶ Dans le contexte de l'induction électromagnétique, le matériau magnétique par excellence est le fer sous ses formes alliées (aciers ou fonte).

▶ Les autres matériaux utilisés ne sont pas magnétiques ($\mu = \mu_0$) ; en fait les métaux sont paramagnétiques mais très faiblement $\mu_r \approx 1 + 10^{-6}$ et on néglige cet aspect.

▶ Le magnétisme des aciers (et du fer) s'appelle le ferromagnétisme : ses caractères les plus saillants sont que :

- c'est un magnétisme non-linéaire, anisotrope et hystérétique ;
- il existe en deçà d'une température appelée la température de Curie ($\approx 750\ ^oC$) et pas au delà.

Le modèle à modifier

Le modèle de calcul en potentiel vecteur magnétique de la leçon précédente est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \, \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) & = & \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = & 0 \end{array} \right.$$

où

- les entrées sont : $s : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mu : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions de conductivité électrique et de perméabilité magnétique ; $\underline{\vec{j}}_s$ la densité de courant source ;
- les sorties sont :

$$P + j \, Q = \int_{E_3} s \, \left| j\omega \, \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 \, d\vec{x}^3 + j \, \omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^2 \, d\vec{x}^3$$

(on suppose les aspects capacitifs négligeables).

La perméabilité complexe

Si la perméabilité magnétique est choisie complexe, par exemple

$$\begin{array}{rcccl} \mu = \underline{\mu} & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \mu(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mu_0\ \underline{\mu}_r & \text{dans} \quad D_m \\ \mu_0 & \text{ailleurs} \end{array} \right. \end{array}$$

où D_m est le domaine dans lequel on souhaite prendre en compte un comportement magnétique hystérétique par (le signe « - » vient de ce qu'on conjugue l'expression en $j\,\omega/\mu|\vec{\nabla}\times\underline{\vec{a}}$)

$$\mu_r = \mu_{r\mathcal{R}} - j\ \mu_{r\mathcal{J}}$$

Rien ne change formellement dans le modèle à ceci près que P et Q se transforment comme

$$\begin{aligned} P + j\ Q \quad = \quad & \int_{E_3} s\ \left| j\omega\ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi} \right|^2\ d\vec{x}^3 + \omega \int_{D_m} \frac{\mu_{r\mathcal{J}}}{|\mu_r|^2}\ |\vec{\nabla}\times\underline{\vec{a}}|^2\ d\vec{x}^3 \\ & + j\ \omega \left(\int_{E_3 - D_m} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla}\times\underline{\vec{a}}|^2\ d\vec{x}^3 + \int_{D_m} \frac{\mu_{r\mathcal{R}}}{|\mu_r|^2}\ |\vec{\nabla}\times\underline{\vec{a}}|^2\ d\vec{x}^3 \right) \end{aligned}$$

La perméabilité complexe

Le résultat net du modèle avec perméabilité magnétique complexe est que :

- les valeurs de $\underline{\vec{a}}$ et φ sont modifiées puisque μ_r est modifié dans D_m ;
- l'expression de calcul de la puissance active est modifiée par le terme

$$\omega \int_{D_m} \frac{\mu_r \mathcal{J}}{|\mu_r|^2} \, |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^2 \, d\vec{x}^3$$

Il est difficile d'estimer *a priori* l'effet de la modification des valeurs de $\underline{\vec{a}}$ et φ. Par contre il est très possible d'analyser la signification des expressions modifiant les puissances.

Relation magnétique avec retard en circuit électrique

Une relation magnétique avec retard en circuit électrique est

$$\varphi(t) = l\ i(t-\tau)$$

où i est le courant électrique et φ le flux magnétique. La tension est

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

et la puissance instantanée du composant

$$p = \frac{d\varphi}{dt}\ i$$

Si $i(t)$ est périodique de période T la moyenne temporelle de cette puissance est

$$P = \int_0^T p = \int_0^T l\ \frac{d\varphi}{dt}(t-\tau)\ i(t)$$

Relation magnétique avec retard en circuit électrique

Si

$$i(t) = \sqrt{2}\,\Re\{\underline{i}\ \exp^{j\,\omega t}\}\ \text{avec}\ T = \frac{2\pi}{\omega}$$

la puissance moyenne P devient

$$P = \Re\{j\ l\ \omega\ \exp^{-j\,\omega\tau}\ \ |\underline{i}|^2\} = l\ \omega\ \sin\omega\ \tau\ |\underline{i}|^2$$

Une inductance dans laquelle il y a un retard entre le flux magnétique et le courant est dissipative et le taux de dissipation est proportionel à la fréquence.
Cela peut se modéliser en introduisant une inductance complexe

$$\underline{l} = \frac{l}{\cos\omega\tau + j\ \sin\omega\tau}$$

car la puissance complexe devient

$$P + j\ Q = j\ \underline{l}\ \omega\ |\underline{i}|^2 = \sin\omega\ \tau\ l\ |\underline{i}|^2 + j\cos\omega\tau\ l\ |\underline{i}|^2$$

Relation magnétique avec retard

Si la relation magnétique dans D_m est

$$\vec{b}(t,\vec{x}) = \mu_0\ \mu_r\ \vec{h}(t-\tau,\vec{x})$$

alors le passage aux amplitudes complexes la transforme en

$$\underline{\vec{b}}(\vec{x}) = \mu_0\ \mu_r\ \exp^{-j\,\omega\,\tau}\ \ \underline{\vec{h}}(\vec{x})$$

où encore

$$\underline{\vec{b}}(\vec{x}) = \mu_0\ \underline{\mu}_r\ \underline{\vec{h}}(\vec{x}) \text{ avec } \underline{\mu}_r = \underbrace{\mu_r\ \cos\omega\tau}_{=\mu_{r\mathcal{R}}} - j\ \underbrace{\mu_r\ \sin\omega\tau}_{=\mu_{r\mathcal{I}}}$$

on retrouve alors exactement l'expression de la puissance $P + j\ Q$ du transparent 10.
La perméabilité complexe traduit un retard entre la densité surfacique de flux magnétique ($\vec{b}$) et densité linéique de courant électrique ($\vec{h}$).

Hystérésis

L'hystéresis ne se laisse pas si aisément réduire à une simple relation de retard entre flux magnétique et courant ; en fait elle peut s'écrire sous la forme d'une convolution comme par exemple

$$\vec{b}(t,\vec{x}) = \mu_0 \int_{-\infty}^{0} \alpha(\beta)\ \vec{h}(t-\beta)\ d\tau$$

où α est une fonction de pondération de toute les valeurs du champ magnétique qui précède l'instant actuel t. Pour le retard simple

$$\alpha(\beta) = \delta(\beta - \tau)$$

δ la distribution de Dirac telle que

$$\forall f\ :\ \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\ \delta(\beta-\tau)\ d\beta = f(\tau)$$

L'intégration de telles relations dans un modèle de calcul reste de nos jour une affaire de spécialistes.

Anisotropie

L'anisotropie (sans hystérésis) dans un domaine magnétique D_m peut être prise en compte en transformant le coefficient scalaire μ en un tenseur, c'est à dire que si

$$\vec{b} = b_1\ \vec{k}_1 + b_2\ \vec{k}_2 + b_3\ \vec{k}_3\ ;\ \vec{h} = h_1\ \vec{k}_1 + h_2\ \vec{k}_2 + h_3\ \vec{k}_3$$

alors la relation magnétique s'écrit

$$\text{pour } i = 1, 2, 3\ : \vec{b}_i = \sum_{j=1}^{3} \mu_{ij}\ \vec{h}_j$$

Si on introduit le tenseur de reluctivité

$$\nu_{ij} \text{ tel que } \mu_{ik}\ \nu_{kj} = \delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker}$$

le modèle de calcul n'est guère modifié. Les logiciels modernes prennent en compte la possibilité de relations tensorielles entre induction et champ.

Non-linéarité magnétique

La non-linéarité magnétique (isotrope et sans retard) se traduit par une relation du type

$$\vec{b}(t,\vec{x}) = \mu_0\ \mu_r\left(|\vec{h}(t,\vec{x})|\right)\ \vec{h}(t,\vec{x})$$

où $\mu_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}+$ est une fonction traduisant la non-linérarité du matériau magnétique.
Bien évidemment il n'est plus possible d'utiliser les amplitudes complexes parce que si

$$\vec{h}(t,\vec{x}) = \sqrt{2}\ \Re\{\underline{\vec{h}}(\vec{x})\ \mathrm{exp}^{j\,\omega t}\}$$

alors

$$\begin{aligned}\vec{b}(t,\vec{x}) &= \mu_0\ \mu_r\left(|\sqrt{2}\ \Re\{\underline{\vec{h}}(\vec{x})\ \mathrm{exp}^{j\,\omega t}\}|\right)\ \sqrt{2}\ \Re\{\underline{\vec{h}}(\vec{x})\ \mathrm{exp}^{j\,\omega t}\}\\ &\text{en général } \neq \sqrt{2}\ \Re\{\underline{\vec{b}}(\vec{x})\ \mathrm{exp}^{j\,\omega t}\}\end{aligned}$$

et il est nécessaire de revenir à un modèle où les variables dépendent du temps.

Hystérésis+Anisotropie+Non-linéarité magnétique

Le mélange de ces trois aspects relève plus d'un travail de recherche que d'un cours sur l'induction électromagnétique. Cependant on trouve souvent cette argumentation de type « chaudron de Freud » pour justifier le manque :

- de nombreuses applications peuvent être abordées avec succès (bonne relation entre résultats de calcul et de mesure) avec un modèle simple de perméabilité magnétique constante (scalaire et même pas complexe) ; (d'abord ça marche)
- cette approximation garde généralement la vertu d'indiquer correctement les tendances, c'est à dire de permettre des dimensionnements d'installations ; (ensuite même si ça ne marche pas trop bien c'est quand même un peu)
- en chauffage par induction le véritable problème est plutôt de situer les zones qui sont en deçà et au delà du point de Curie. (de toute façon ça ne sert à rien)

L'effet Kelvin

L'effet Kelvin est le phénomène selon lequel les courants induits ne pénètrent dans le matériau (domaine D) qui en est le siège que sur une profondeur de

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \ \mu_r \ \sigma \ \omega}}$$

à partir de sa surface ∂D. Lorsqu'il est prononcé, c'est à dire lorsque simultanément le produit de la courbure locale C de ∂D par δ et sa plus petite dimension caractéristique L sont telles que

$$\delta \ C << 1 \text{ et } \frac{\delta}{L} << 1$$

Il est possible de considérer que ces courants induits sont surfaciques, c'est à dire définis par un champ de vecteur $\vec{k}$ sur ∂D en considérant que si $\vec{x}$ est une position dans D, que $\vec{x}_\partial$ est sa projection orthogonale sur ∂D,

$$\underline{\vec{j}}(\vec{x} \in D) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \ \underline{\vec{k}}(\vec{x}_\partial) & \text{si} \qquad |\vec{x} - \vec{x}_\partial| < \delta \\ \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

Étude locale de l'effet Kelvin (1/5)

Si les conditions

$$\delta\ C << 1 \text{ et } \frac{\delta}{L} << 1$$

sont remplies le domaine conducteur peut localement être défini par le demi-espace

$$x_1 > 0$$

où on considère un point origine du repère situé sur la surface de la charge conductrice tel que $\vec{k_1}$ soit dirigé vers l'intérieur et $\vec{k_2}$, $\vec{k_3}$ sont les directions tangentes à la surface.

Cette approximation permet une étude locale de l'effet Kelvin dans le domaine conducteur qui débouchera sur une modèle où ce domaine conducteur sera éludé et remplacé par une condition aux limites équivalente sur son bord.

Étude locale de l'effet Kelvin (2/5)

Les potentiels vecteur et scalaire du modèle s'écrivent en composantes

$$\underline{\vec{a}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{k}_i = a_i \vec{k}_i ; \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} = a_{i,i} \text{ et } \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} = \epsilon_{ijk} a_{k,j} \vec{k}_i$$

$$\vec{\nabla} \underline{\varphi} = \sum_{i=1}^{3} \varphi_{,i} \vec{k}_i = \varphi_{,i} \vec{k}_i$$

où on note

$$a_{j,k} = \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \; ; \; \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & - \quad (i,j,k) \in \{(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étude locale de l'effet Kelvin (3/5)

Si donc le domaine conducteur est défini localement par

$$x_1 > 0$$

Le modèle

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \, \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) & = & \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = & 0 \end{cases}$$

s'y écrit alors comme

$$\forall i \in \{1,2,3\} : \quad \begin{array}{l} a_{i,ll} - \left(\frac{1+j}{\delta} \right)^2 a_i - \frac{2}{\delta^2 \, \omega} \, \varphi_{,i} = 0 \quad \text{pour } x_1 > 0 \\ a_{i,i} = 0 \end{array}$$

Étude locale de l'effet Kelvin (4/5)

Avec l'hypothèse que les a_i varient beaucoup moins vite suivant les directions 2 et 3

$$a_{i,2} << a_{i,1} \; ; \; a_{i,3} << a_{i.1} \; \ldots$$

il vient

$$\forall i \in 2,3 : a_{i,11} - \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 a_i = 0$$

$$a_{1,1} = 0 \Longrightarrow a_{1,11} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 a_1 - \frac{2}{\delta^2\,\omega}\,\varphi_{,1} = 0$$

Comme de plus

$$\varphi_{,11} = 0$$

il faut que φ soit une fonction linéaire de x_1 et donc a_1 serait une constante. Avec l'hypothèse supplémentaire que

$$\forall i \in \{1,2,3\} \lim_{x_1 \longrightarrow \infty} a_i = 0$$

cette constante ne peut qu'être nulle et donc

$$a_1 = 0 \text{ pour } x_1 > 0$$

Étude locale de l'effet Kelvin (5/5)

La résolution de

$$\forall i \in 2,3 : a_{i,11} - \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 a_i = 0 \text{ avec } \lim_{x_1 \longrightarrow \infty} a_2 = \lim_{x_1 \longrightarrow \infty} a_3 = 0$$

donne

$$\forall i \in 2,3 : a_i(x_1, x_2, x_3) = a_i(0, x_2, x_3) \exp^{-(1+j)x_1/\delta}$$

Les composantes a_1, a_2 et a_3 sont continues à la traversée de $x_1 = 0$ et le champ magnétique tangent est également continu

$$\forall i \in \{2,3\} : \lim_{\substack{x_1 \longrightarrow 0 \\ x_1 < 0}} \frac{a_{i,1}}{\mu} = \lim_{\substack{x_1 \longrightarrow 0 \\ x_1 > 0}} \frac{a_{i,1}}{\mu}$$

ce qui permet d'abandonner le système de coordonnées locales et de condenser ces résultats en

$$-(\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}) \times \vec{n} = \frac{1+j}{\delta\ \mu_r}\ \underline{\vec{a}} \text{ sur } \partial D$$

où $\vec{n}$ est la normale à ∂D entrant dans D.

Le modèle d'impédance de frontière

Si donc pour le domaine conducteur D

$$\delta\ C << 1 \text{ et } \frac{\delta}{L} << 1$$

le modèle prenant en compte un effet Kelvin prononcé est

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) = \underline{\vec{j}}_s & \text{dans} \quad E_3 - D \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} = 0 & \text{dans} \quad E_3 - D \\ -\frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}) \times \vec{n} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\mu_0 \mu_r}}\ \underline{\vec{a}} & \text{sur} \quad \partial D \end{cases}$$

où la contribution du domaine D au calcul se réduit à une contribution de sa frontière ∂D qui est une condition aux limites appelée équation d'impédance de frontière.

Les caractéristiques du modèle d'impédance de frontière

- Les courants induits surfaciques sont

$$\underline{\vec{k}} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}) \times \vec{n} \quad (\text{en } A/m)$$

- L'impédance est

$$z = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r \omega}{\sigma}} \longrightarrow j\omega\ \underline{\vec{a}} = z\ \underline{\vec{k}}$$

qui met en rapport le champ électrique électromoteur $j\omega\ \underline{\vec{a}}$ (en V/m) et le courant surfacique $\underline{\vec{k}}$ comme

$$j\ \omega\ \underline{\vec{a}} = z\ \underline{\vec{k}}$$

- le potentiel scalaire électrique $\underline{\varphi}$ est éliminé du modèle : c'est normal parce dès lors que la composante normale de $\underline{\vec{a}}$ à la frontière du domaine conducteur est nulle la source du problème de potentiel scalaire disparaît.

Bilan de puissance

En notant $\vec{\underline{b}} = \vec{\nabla} \times \vec{\underline{a}}$, $\vec{\underline{e}} = -j\,\omega\,\vec{\underline{a}}$ et avec $\vec{\underline{j}}_s = \underline{i}_s\,\vec{u}_s$ le bilan de puissance est

$$\left(\int_{D_s} -\vec{u}_s \cdot \vec{\underline{e}}\; d\vec{x}^3\right) \underline{i}_s^* = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\mu_0\mu_r}}\; \omega \int_{\partial D} |\vec{\underline{a}}|^2\; d\vec{x}^2 + j\omega \int_{E_3 - D} \frac{|\vec{\underline{b}}|^2}{\mu}\; d\vec{x}^3$$

où les quantités intégrales s'interprètent comme

- $\underline{v}_s = \displaystyle\int_{D_s} -\vec{u}_s \cdot \vec{\underline{e}}\; d\vec{x}^3$: l'amplitude complexe de la force électromotrice qu'il faut apporter à l'inducteur pour y forcer le courant d'amplitude complexe $\underline{i}_s$;
- $Q = \omega \displaystyle\int_{E_3 - D} \frac{|\vec{\underline{b}}|^2}{\mu}\; d\vec{x}^3 + \omega\,\delta \int_{\partial D} \frac{1}{\mu_0\mu_r} |\frac{\vec{\underline{a}}}{\delta}|^2$: la puissance réactive ;
- $P = \delta \displaystyle\int_{\partial D} \sigma\; \frac{|j\omega\vec{\underline{a}}|^2}{2}\; d\vec{x}^3$: la puissance active = la puissance moyenne Joule dissipée dans la charge.

Les modes de l'effet Kelvin

La profondeur de pénétration de l'effet Kelvin peut être telle que

$$\delta \; C << 1 \text{ et } \frac{\delta}{L} << 1$$

pour trois raisons.

- si $\sigma \longrightarrow \infty$ alors la condition aux limites d'impédance de frontière

$$-\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}) \times \vec{n} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\mu_0 \mu_r}} \; \underline{\vec{a}}$$

montre que pour que $|\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|$ reste finie, il faut que

$$|\underline{\vec{a}}| \text{ soit en } \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \text{ sur } \partial D \Longrightarrow P \text{ est en } \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \longrightarrow 0$$

Un domaine très conducteur ne dissipe presque pas de puissance Joule ; mais un courant circule à sa surface qui annule l'induction magnétique dans son volume.

Les modes de l'effet Kelvin

▶ si $\omega \longrightarrow \infty$ alors la condition aux limites d'impédance de frontière

$$-\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}) \times \vec{n} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\mu_0\mu_r}}\, \underline{\vec{a}}$$

montre que pour que $|\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|$ reste finie, il faut que

$$|\underline{\vec{a}}| \text{ soit en } \frac{1}{\sqrt{\omega}} \text{ sur } \partial D \Longrightarrow P \text{ est en } \sqrt{\omega} \longrightarrow \infty$$

Plus on augmente la fréquence, plus le courant induit est important.

Les modes de l'effet Kelvin

- si $\mu_r \longrightarrow \infty$ alors la condition aux limites devient

$$-\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}) \times \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \partial D$$

et le domaine D ne se différencie pas d'un domaine purement magnétique pour lequel les lignes d'induction arrivent normalement sur la surface de ce domaine. Dans ce cas $\underline{\vec{a}}$ prend une valeur finie sur ∂D et

$$P \text{ est en } \frac{1}{\sqrt{\mu_r}} \longrightarrow 0$$

C'est un résultat paradoxal dans le sens à ce que l'étude analytique de la leçon 2 prédit le contraire ($P \longrightarrow \infty$ en $\sqrt{\mu_r}$). Cela vient de ce que dans cette étude les lignes d'induction ne peuvent être normales à la surface de la charge, ce qui interdit la prise en compte des fuites magnétiques qui sont à l'origine du résultat. Quoiqu'il en soit ce cas limite n'a pas grand sens et dans la pratique on limite la valeur de μ_r.

Exercice

Reprendre l'exemple axisymétrique de la leçon No3 en lui ajoutant une condition aux limites d'impédance de frontière.