

Transfert inductif de l'énergie



Leçon 3



Modèle d'induction électromagnétique en
amplitudes complexes du potentiel vecteur et du
potentiel scalaire

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

1 octobre 2013

Objectif de la leçon

Tel que défini leçon No 1, le modèle en potentiel vecteur magnétique \vec{a} et potentiel scalaire électrique φ est

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + s \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \right) = \vec{j}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \varphi \right) + \rho = 0 \\ \vec{a}(t=0, \vec{x}) = \vec{0} \end{array} \right.$$

- ▶ les données sont : \vec{j}_s la densité de courant source ;
 $\mu : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $s : E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions de perméabilité et de conductivité électrique ;
- ▶ les grandeurs à calculer sont : \vec{a} , φ , ρ

La façon d'obtenir l'**impédance** du dispositif, la répartition de la **puissance Joule** et celle des **densités de forces de Laplace et magnétique** du dispositif ainsi modélisé n'est pas spécifiée. C'est l'objet de cette leçon.

Le régime sinusoïdal établi

Si la densité de courant source dépend sinusoïdalement du temps

$$\vec{j}_s(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \Re \left\{ \vec{j}_s(\vec{x}) \exp^{j\omega t} \right\}$$

alors \vec{a} , φ et ρ comportent une **partie transitoire** dépendant de leurs valeurs initiales qui les amènent vers leur dépendance sinusoïdale de **régime sinusoïdal** établi

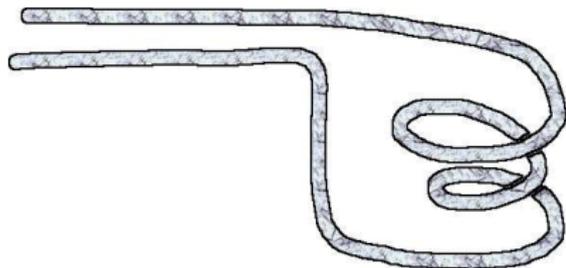
$$\begin{aligned} \vec{a}(t, \vec{x}) &= \sqrt{2} \Re \left\{ \underline{\vec{a}}(\vec{x}) \exp^{j\omega t} \right\} & ; & \quad \varphi(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \Re \left\{ \underline{\varphi}(\vec{x}) \exp^{j\omega t} \right\} \\ \rho(t, \vec{x}) &= \sqrt{2} \Re \left\{ \underline{\rho}(\vec{x}) \exp^{j\omega t} \right\} \end{aligned}$$

Le modèle devient alors

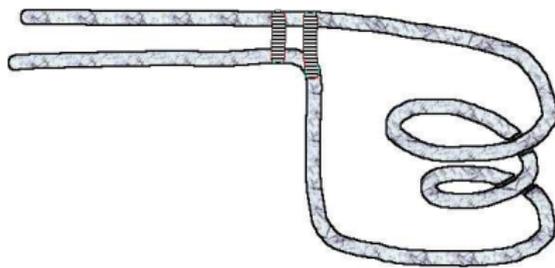
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) & = \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \underline{\rho} & = 0 \end{cases}$$

Relation entre densité de courant et courant source

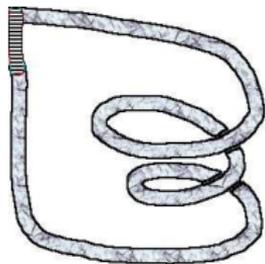
- Une première difficulté est de définir le domaine inducteur dans lequel circule le courant source :



Inducteur avec ses amenées de courant



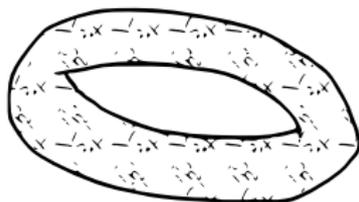
Ajout de deux conducteurs aller et retour l'un sur l'autre



Seul le côté inducteur est considéré ; les amenées coté générateur sont supposées être suffisamment proches pour ne générer aucun champ source.

L'inducteur est un tore

Cette approximation de déconnexion entre les « côtés » inducteur et générateur fait apparaître le domaine de l'inducteur comme un tore D_s



Et la densité de courant source \vec{j}_s peut être supposée déjà satisfaire à

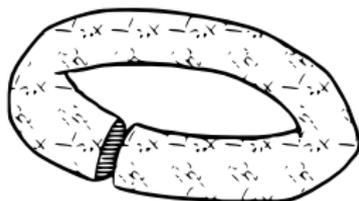
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s &= 0 & \text{dans } D_s \\ \vec{j}_s &= \vec{0} & \text{dans } E_3 - D_s \text{ le complémentaire de } D_s \text{ dans } E_3 \\ \vec{j}_s \cdot \vec{n} &= 0 & \text{sur } \partial D_s \text{ le bord de } D_s; (\vec{n} \text{ le champ de normales de } \\ & & \partial D_s \text{ orientées vers l'extérieur de } D_s) \end{aligned}$$

ainsi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = 0 \text{ dans } E_3$$

Le tore coupé

Il reste à connecter la densité de courant source \vec{j}_s au courant source \underline{i}_s ; si le tore est coupé (de façon quelconque pourvu que le tore soit connexifié) suivant une surface Σ de manière qu'un écartement fasse apparaître 2 nouveaux bords Σ_- et Σ_+ dans le tore



Si $\int_{\Sigma} \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Sigma_-} \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = - \int_{\Sigma_+} \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2$ on pose

$$\int_{\Sigma} \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = \underline{i}_s$$

\vec{n} champ de normales extérieur à D_s coupé ; $d\vec{x}^2$ notation pour l'élément de surface. Cette relation est indépendante de la position de Σ puisque $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = 0$.

L'espace de cohomologie du tore

Finalement il reste à éliminer toute indétermination sur \vec{j}_s ; cela peut être fait en lui donnant une régularité maximum avec la condition

$$\vec{\nabla} \times \vec{j}_s = \vec{0} \text{ dans } D_s$$

L'ensemble de ces conditions peuvent être réunies par l'invocation d'un champ \vec{u}_s ne dépendant que de la géométrie de D_s et défini par

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s = 0 & \text{dans } D_s \\ \vec{u}_s = \vec{0} & \text{dans } E_3 - D_s \\ \vec{u}_s \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial D_s \end{array} ; \int_{\Sigma_-} \vec{u}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = - \int_{\Sigma_+} \vec{u}_s \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = 1$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_s = 0 \text{ dans } D_s$$

Un tel champ existe et est unique si D_s est un tore : il s'appelle l'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore.

La relation cherchée est alors

$$\vec{j}_s = \underline{i}_s \vec{u}_s$$

Le tore axisymétrique

Les vecteurs de base des coordonnées cylindriques sont

$$\vec{k}_r = \cos \theta \vec{k}_1 + \sin \theta \vec{k}_2 \quad ; \quad \vec{k}_\theta = -\sin \theta \vec{k}_1 + \cos \theta \vec{k}_2 \quad ; \quad \vec{k}_z = \vec{k}_3$$

la position est $\vec{x} = r \vec{k}_r + z \vec{k}_z$. Un tore axisymétrique est décrit par

$$D_t = \{r \vec{k}_r + z \vec{k}_3 \text{ avec } (r - R)^2 + z^2 < a^2 \text{ (où } 0 < a < R)\}$$

le champ de vecteur¹

$$\vec{u}_{D_t}(\vec{x}) = \begin{cases} u_{D_t} \vec{k}_\theta & \text{si } \vec{x} \in D_t \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad u_{D_t} = \frac{1}{r \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{\rho d\rho}{R + \rho \cos \phi}}$$

satisfait à

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{u}_{D_t} &= \vec{0} & ; & \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{D_t} = 0 \text{ dans } D_t \\ \vec{u}_{D_t} \cdot \vec{n} &= 0 \text{ sur } \partial D_t & ; & \quad \int_{\Sigma_-} \vec{u}_{D_t} \cdot \vec{n} d\vec{x}^2 = 1 \end{aligned}$$

1. $u_{D_t} = 1/(r 2\pi (R - \sqrt{R^2 - a^2}))$ ($\approx 1/(\pi a^2)$ si $a \ll R$)

La construction de $\tilde{\mathbf{u}}_s$ pour un tore quelconque

On admettra que l'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore peut être construit à partir du problème en potentiel sur le tore coupé de la recherche de χ solution de

$$\begin{cases} \Delta\chi = 0 & \text{dans } D_c \text{ coupé} \\ \partial_n\chi = 0 & \text{sur } \partial D_c \text{ non coupé} \\ \chi = 1 & \text{sur } \Sigma_+ \\ \chi = 0 & \text{sur } \Sigma_- \end{cases}$$

et alors

$$\vec{u}_s = \frac{\vec{\nabla}\chi}{\int_{\Sigma} \vec{\nabla}\chi \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2}$$

Une propriété intéressante est que

$$\forall \vec{j} \text{ tel que } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \text{ dans } D_c : \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2 = \frac{\int_{D_c} \vec{u} \cdot \vec{j} \, d\vec{x}^3}{\int_{D_c} |\vec{u}|^2 \, d\vec{x}^3}$$

Le courant à travers Σ s'exprime alors en terme d'intégrales de volume (ce qui est intéressant si on utilise des éléments finis).

La décomposition de Hodge-Helmholtz

les résultats présentés relèvent d'une analyse plus complète qui classifie les champs de vecteurs définis sur des domaines bornés en fonction de la connexité de ceux-ci.

Cette analyse s'appelle la décomposition de Hodge-Helmholtz ; elle prolonge les lemmes globaux de Poincaré (cf. Leçon No1).

Il serait trop long de traiter du sujet en détail mais une présentation compréhensible peut en être trouvée :

- ▶ A. Bossavit, " Les deux isomorphismes du rotationnel et les deux formes du problème de la magnétostatique dans un domaine borné", Bull. DER-EDF, Série C, 1 (1986), pp. 5-20.
- ▶ R. Dautrey, J. L. Lions, M. Artola, M. Cessenat, J. M. Combes, B. Scheure, " Analyse mathématique et calcul numérique, tome 5", Masson, Paris, 1987.

Expression des puissances active et réactive (1/2)

Le point de départ est l'équation

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\underline{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\underline{a}} + \vec{\nabla} \underline{\underline{\varphi}} \right) = \underline{\underline{i}}_s \underline{\underline{u}}_s$$

Le produit scalaire avec $(j\omega \underline{\underline{a}} + \vec{\nabla} \underline{\underline{\varphi}})^*$ fournit

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\underline{a}} \right) \cdot (j\omega \underline{\underline{a}} + \vec{\nabla} \underline{\underline{\varphi}})^* + s \left| j\omega \underline{\underline{a}} + \vec{\nabla} \underline{\underline{\varphi}} \right|^2 = \underline{\underline{i}}_s \underline{\underline{u}}_s \cdot (j\omega \underline{\underline{a}} + \vec{\nabla} \underline{\underline{\varphi}})^*$$

La relation d'analyse vectorielle

$$\vec{\nabla} \cdot (\underline{\underline{u}} \times \underline{\underline{v}}) = (\vec{\nabla} \times \underline{\underline{u}}) \cdot \underline{\underline{v}} - (\vec{\nabla} \times \underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{u}}$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\underline{a}} \right) \cdot (j\omega \underline{\underline{a}} + \vec{\nabla} \underline{\underline{\varphi}})^* &= \vec{\nabla} \cdot \left(\left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\underline{a}} \right) \times (j\omega \underline{\underline{a}} + \vec{\nabla} \underline{\underline{\varphi}})^* \right) \\ &+ \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\underline{a}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \times (j\omega \underline{\underline{a}} + \vec{\nabla} \underline{\underline{\varphi}})^*}_{= -j\omega \vec{\nabla} \times \underline{\underline{a}}^*} \end{aligned}$$

Expression des puissances active et réactive (2/2)

Compte tenu que les champs de vecteur \vec{a} et $\vec{\nabla}\varphi$ sont suffisamment décroissants à l'infini pour que

$$\int_{E_3} \vec{\nabla} \cdot \left(\left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) \times (j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi)^* \right) d\vec{x}^3 = 0$$

il vient

$$\underline{i}_s \int_{E_3} \vec{u}_s \cdot (j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi)^* d\vec{x}^3 = \int_{E_3} s |j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi|^2 d\vec{x}^3 - j\omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \vec{a}|^2 d\vec{x}^3$$

soit encore, en conjuguant, le bilan de puissances

$$\underbrace{\left(\int_{E_3} \vec{u}_s \cdot (j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi)^* d\vec{x}^3 \right)}_{=\underline{v}_s} \underline{i}_s^* = \underbrace{\int_{E_3} s |j\omega \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi|^2 d\vec{x}^3}_{=P} + j\omega \underbrace{\int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \vec{a}|^2 d\vec{x}^3}_{=Q}$$

Les trois quantités \underline{v}_s , P et Q sont

- ▶ \underline{v}_s la force électromotrice dans l'inducteur qui maintient le courant \underline{i}_s ;
- ▶ P la puissance Joule dissipée dans la ou les charges ;
- ▶ Q la puissance réactive de l'ensemble.

La puissance active

Si le seul domaine conducteur est D_c de conductivité σ

$$s(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma & \text{si } \vec{x} \in D_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors

$$P = \int_{D_c} \sigma \left| j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 d\vec{x}^3$$

soit, compte tenu que

$$\underline{\vec{e}} = -(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}) \text{ et } \underline{\vec{j}} = \sigma \underline{\vec{e}}$$

$$P = \int_{D_c} \sigma |\underline{\vec{e}}|^2 d\vec{x}^3 = \int_{D_c} \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma} d\vec{x}^3$$

qui est bien l'expression attendue : la somme sur le domaine conducteur du rapport du carré de la densité de courant à la conductivité.

La force électromotrice dans l'inducteur (1/3)

Compte tenu que

$$\underline{\vec{e}} = -(j\omega \underline{\vec{a}} + \underline{\nabla}\varphi) \text{ et } \vec{u}_s = 0 \text{ en dehors de } D_s$$

la force électromotrice dans l'inducteur est

$$\underline{v}_s = - \int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{u}_s \, d\vec{x}^3$$

Si cet inducteur était une spire de fibre moyenne Γ définie par

$$\begin{array}{l} \vec{X} : [0, 1] \longrightarrow E_3 \\ s \longrightarrow \vec{X}(s) \end{array} \quad ; \quad \vec{\tau}(s) = \frac{\dot{\vec{X}}(s)}{|\dot{\vec{X}}(s)|} \text{ la tangente}$$

et de section circulaire de rayon a très petit alors au voisinage de cette fibre moyenne

$$\vec{u}_s \approx \frac{1}{\pi a^2} \vec{\tau}$$

de plus

$$\forall f : \int_{D_s} f(\vec{x}) \, d\vec{x}^3 \approx \pi a^2 \int_0^1 f(\vec{X}(s)) |\dot{\vec{X}}(s)| \, ds$$

La force électromotrice dans l'inducteur (2/3)

Il vient donc que

$$\underline{v}_s \approx - \int_0^1 \underline{\vec{e}}(\vec{X}(s)) \cdot \vec{\tau} ds = - \int_{\Gamma} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{\tau} d|\vec{x}|$$

la forme symbolique de cette expression suggère l'utilisation de la formule de Stokes : si Γ est le bord d'une surface S munie d'un champ de normales \vec{n}

$$\underline{v}_s \approx - \int_S \vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} \cdot \vec{n} d\vec{x}^2$$

Compte tenu de la relation de Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} = -j\omega \underline{\vec{b}}$

$$\underline{v}_s \approx j\omega \int_S \underline{\vec{b}} \cdot \vec{n} d\vec{x}^2$$

la force électromotrice est en écriture d'amplitudes complexes la dérivée temporelle du flux de l'induction magnétique à travers la surface dont la spire est le bord. Elle vient compenser la force contre-électromotrice qui est l'opposée de cette quantité.

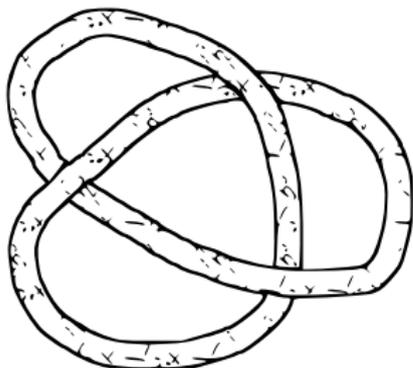
La force électromotrice dans l'inducteur (3/3)

L'analyse précédente a été faite pour montrer que

$$\underline{v}_s = - \int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \underline{\vec{u}}_s d\vec{x}^3$$

correspondait à ce qu'on attendait d'une force électromotrice dans le cadre d'une approximation où le résultat était connu *a priori*; mais bien cette expression qui est première parce que :

- ▶ les inducteurs ne sont pas nécessairement de section petite ;
- ▶ même s'ils l'étaient il pourraient avoir une forme où la formule de Stokes ne s'applique pas, par exemple sur un nœud



La puissance réactive

Dès lors que \underline{v}_s est identifiée à une force électromotrice, la partie imaginaire de $\underline{v}_s i_s^*$ est la puissance réactive. De plus l'examen de sa forme explicite

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^2 d\vec{x}^3$$

soit encore (compte tenu que $\underline{\vec{b}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}$)

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{|\underline{\vec{b}}|^2}{\mu} d\vec{x}^3$$

la fait apparaitre comme le produit de la pulsation par le double de la moyenne quadratique temporelle de l'énergie magnétique

$$\int_{E_3} \frac{|\underline{\vec{b}}|^2}{2\mu} d\vec{x}^3$$

ce qui est conforme à l'idée qu'on s'en fait.

Le rôle du potentiel scalaire électrique

Le modèle complet

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) & = \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \underline{\rho} & = 0 \end{cases}$$

se découple en deux parties : d'abord

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) & = \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = 0 \end{cases}$$

dans laquelle le potentiel scalaire électrique $\underline{\varphi}$ est une variable annexe définie uniquement dans D_c dont la fonction est d'assurer la cohérence de la 1^o équation et ensuite

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \underline{\rho} = 0$$

pour laquelle le statut de potentiel scalaire électrique est rendu à $\underline{\varphi}$ de part son lien avec la densité de charge électrique ρ .

Le potentiel électrique dans un domaine conducteur

La divergence de $\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) = \vec{j}_s$ s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \left(s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) \right) = 0$$

Si le domaine conducteur est comme précédemment un domaine D_c et donc si s est une fonction discontinue (valant σ dans D_c et 0 ailleurs) il faut que (compte tenu que $\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} = 0$)

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\varphi} = 0 \text{ dans } D_c \text{ et } \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D_c$$

où ∂D_c est le bord de D_c et \vec{n} un champ de normales extérieures. Ces conditions sur $\underline{\varphi}$ dans D_c et sur ∂D_c signifient que le courant induit

$$\vec{j} = s \left(-j\omega \underline{\vec{a}} - \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right)$$

est à divergence nulle dans D_c et que de plus ce courant ne « sort pas » de D_c .

Le potentiel scalaire électrique dans E_3

Le potentiel scalaire électrique est de plus solution de

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) + \underline{\rho} = 0 \text{ dans } E_3$$

ce qui impose

$$\rho = 0 \text{ dans } D_c$$

L'intérieur d'un conducteur électrique est électriquement neutre (comme en électrostatique).

Avec l'hypothèse qu'il n'y a pas de charges électriques en dehors du conducteur²

$$\rho = 0 \text{ dans } E_3 - D_c$$

il ne reste comme possibilité pour les charges électriques que d'être réparties en surface de ∂D_c .

2. Cet extérieur est assimilé à un vide total ; sinon il pourrait y en avoir.

La conservation du courant induit

le potentiel $\underline{\varphi}$ peut être calculé sur $E_3 - D_c$ par le problème

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) = 0 & \text{dans } E_3 - D_c \\ \underline{\varphi}|_{\text{côté } E_3 - D_c} = \underline{\varphi}|_{\text{côté } D_c} & \text{sur } \partial(E_3 - D_c) = \partial D_c \end{cases}$$

Ainsi la densité superficielle de charges (C/m^2) sur ∂D_c est

$$\rho_s = \epsilon_0 \left(\partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côté } D_c} - \partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côté } E_3 - D_c} \right)$$

Ce qui assure la conservation du courant induit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + j\omega \rho = 0$$

la densité de charge est alors une distribution de la forme

$$\rho(\vec{x}) = \rho_s \delta_{\partial D_c}$$

dans le sens que

$$\forall \psi : \int_{E_3} \rho \psi d\vec{x}^3 = \int_{\partial D_c} \rho_s \psi d\vec{x}^2$$

Les effets capacitifs

Les statuts des potentiel scalaire électrique $\underline{\varphi}$ et densité de charge $\underline{\rho}$ étant définis, si

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) + \underline{\rho} = 0 \text{ dans } E_3$$

alors

$$\int_{E_3} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) \underline{\varphi}^* d\vec{x}^3 + \int_{E_3} \underline{\rho} \underline{\varphi}^* d\vec{x}^3 = 0$$

d'où

$$\int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \underline{\varphi}^* d\vec{x}^2 = \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla} \underline{\varphi}|^2 d\vec{x}^3$$

c'est le double de la moyenne quadratique temporelle de l'énergie électrostatique.

La puissance correspondant aux effets capacitifs est alors

$$Q' = \omega \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla} \underline{\varphi}|^2 d\vec{x}^3 = \omega \int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \underline{\varphi}^* d\vec{x}^2$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (1/4)

Si le courant source \underline{i}_s , la géométrie du tore D_s approximant l'inducteur ainsi que celle du domaine conducteur D_c qui est le lieu des courants induits sont donnés ainsi que la valeur σ de la conductivité électrique dans D_c (donc la fonction de conductivité s est définie) alors :

► l'élément générateur de l'espace de cohomologie de l'inducteur est calculé par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{u}_s = \vec{0} ; \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s = 0 & \text{dans } D_s \\ \vec{u}_s = \vec{0} & \text{dans } E_3 - D_s \\ \vec{u}_s \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial D_s \end{array} \right.$$

► la densité de courant source est

$$\vec{j}_s = \underline{i}_s \vec{u}_s$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (2/4)

- Le potentiel vecteur magnétique \vec{a} (défini dans E_3) et la partie du potentiel scalaire électrique qui est définie dans D_c sont solutions de

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + s \left(j\omega \vec{a} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) = \vec{j}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases}$$

- La partie du potentiel scalaire électrique définie dans $E_3 - D_c$ se calcule par

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}) + \rho = 0 & \text{dans } E_3 - D_c \\ \underline{\varphi}|_{\text{côté } E_3 - D_c} = \underline{\varphi}|_{\text{côté } D_c} & \text{sur } \partial(E_3 - D_c) = \partial D_c \end{cases}$$

et la densité superficielle de charges électriques est

$$\rho_s = \epsilon_0 \left(\partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côté } D_c} - \partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côté } E_3 - D_c} \right)$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (3/4)

- La force électromotrice dans l'inducteur est maintenant

$$\underline{v}_s = - \int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \underline{\vec{u}}_s \, d\vec{x}^3$$

Les puissances active et réactive-inductive peuvent être calculées de deux façons, sur l'inducteur et directement sur la charge et dans l'espace par

$$P + j Q = \underline{v}_s \underline{i}_s^* = \int_{D_c} \sigma \left| j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 \, d\vec{x}^3 + j \omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} \left| \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right|^2 \, d\vec{x}^3$$

La puissance réactive-capacitive peut être calculée également de deux façons

$$Q' = \omega \int_{E_3} \epsilon_0 \left| \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 \, d\vec{x}^2 = \omega \int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \underline{\varphi}^* \, d\vec{x}^2$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (4/4)

- ▶ La résistance de l'inducteur est prise en compte de façon externe au modèle par une formule du type

$$R_s = \frac{\text{longueur fibre moyenne}}{\text{conductivité} \times \text{surface de passage du courant}} \\ \text{compte tenu de l'effet Kelvin}$$

- ▶ L'inductance du dispositif inducteur+charge est

$$Z = R_s + \frac{P + (Q - Q') j}{|\underline{i}_s|^2}$$

c'est la grandeur utile pour dimensionner l'alimentation électrique.

- ▶ La densité de puissance Joule dans la charge q (en W/m^3) est

$$q = \sigma \left| j\omega \underline{\vec{a}} + \underline{\vec{\nabla}}\underline{\varphi} \right|^2$$

c'est la grandeur utile d'entrée d'un modèle de transfert de chaleur.

La conduction dans l'inducteur

Le modèle précédent peut être amélioré dans sa prise en compte des pertes Joule dans l'inducteur.

Si le domaine des conducteurs est étendu à l'inducteur lui-même par

$$s = \begin{cases} \sigma & \text{dans } D_c \\ \sigma_s & - \quad D_s \\ 0 & - \quad E_3 - D_c - D_s \end{cases}$$

Le bilan de puissances

$$\underbrace{\left(\int_{E_3} \vec{u}_s \cdot (j\omega \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi) d\vec{x}^3 \right)}_{= \underline{v}_s} \dot{I}_s^* = \underbrace{\int_{E_3} s |j\omega \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi|^2 d\vec{x}^3}_{= P} + j\omega \underbrace{\int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \vec{a}|^2 d\vec{x}^3}_{= Q}$$

reste vrai mais \dot{I}_s , \underline{v}_s ne s'interprètent plus comme le courant et la force électromotrice dans l'inducteur et P n'est plus la puissance Joule dissipée dans les conducteurs.

L'analyse de ce que sont ces termes va conduire au modèle dont l'entrée est la force électromotrice dans l'inducteur.

Le bilan de puissances

La densité de courant dans l'inducteur est

$$\vec{j}_s = s(-j\omega\vec{a} - \vec{\nabla}\underline{\varphi}) + \underline{i}_s \vec{u}_s$$

et donc le courant dans l'inducteur est

$$\tilde{i}_s = \int_{\Sigma} \left(\sigma_s(-j\omega\vec{a} - \vec{\nabla}\underline{\varphi}) + \underline{i}_s \vec{u}_s \right) \cdot \vec{n} d\vec{x}^2$$

(Σ surface connexifiant le tore, \vec{n} son champ de normales). Le bilan de puissances peut alors être modifié (il y a quelques calculs qui utilisent la propriété de t. 9) comme

$$\underbrace{\underline{i}_s \int_{D_s} \frac{|\vec{u}_s|^2}{\sigma_s} d\vec{x}^3}_{= \tilde{v}_s} \tilde{i}_s^* = \underbrace{\int_{D_s} \frac{|\vec{j}_s|^2}{\sigma_s} d\vec{x}^3}_{= P_s} + \underbrace{\int_{D_c} \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma_c} d\vec{x}^3}_{= P_c} + j Q$$

le terme $\tilde{v}_s = \underline{i}_s \int_{D_s} \frac{|\vec{u}_s|^2}{\sigma_s} d\vec{x}^3$ s'interprète comme une force électromotrice (connue avant calcul) qui conduit au courant global \tilde{i}_s (inconnu avant calcul et calculée) dans l'inducteur. P_s et P_c sont les puissances Joule dans l'inducteur et la charge.

Le modèle d'induction formulé en tension source

► Le potentiel vecteur magnétique $\underline{\vec{a}}$ (défini dans E_3) et la partie du potentiel scalaire électrique qui est définie dans D_c sont solutions de

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) & = \frac{\tilde{v}_s}{\int_{D_s} \frac{|\underline{\vec{u}}_s|^2}{\sigma_s} d\vec{x}^3} \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = 0 \end{cases}$$

où $s = \begin{cases} \sigma & \text{dans } D_c \\ \sigma_s & - \quad D_s \\ 0 & - \quad E_3 - D_c - D_s \end{cases}$ et où $\underline{\vec{u}}_s$ est l'élément générateur

de l'espace de cohomologie du tore que forme l'inducteur.

► le potentiel scalaire électrique se calcule comme dans la formulation en courant ; les effets capacitifs dans l'inducteur ne sont pas pris en compte dans cette formulation.

► le bilan de puissance est

$$\tilde{v}_s \tilde{i}_s^* = \underbrace{\int_{D_s} \frac{|\underline{\vec{j}}_s|^2}{\sigma_s} d\vec{x}^3}_{\text{pertes}} + \underbrace{\int_{D_c} \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma_c} d\vec{x}^3}_{\text{pertes}} + j Q$$

Le statut ontologique de l'espace de cohomologie

Il est intéressant de noter que le changement de formulation fait passer l'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore inducteur de « support du courant électrique » où il permet d'affirmer que la densité de courant source \vec{j}_s est connue dès lors qu'on connaît le courant global \underline{i}_s par

$$\vec{j}_s = \underline{i}_s \vec{u}_s$$

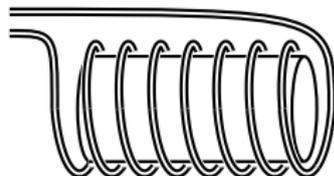
à celui de « support de la force électromotrice » que la tension \tilde{v}_s due à l'alimentation génère dans le tore inducteur par

$$\tilde{\underline{j}}_s = \tilde{v}_s \frac{\vec{u}_s}{\int_{D_s} \frac{|\vec{u}_s|^2}{\sigma_s} d\vec{x}^3}$$

qui est la densité de courant qu'il y aurait en l'absence d'effets d'induction (puisque $\int_{D_s} \frac{|\vec{u}_s|^2}{\sigma_s} d\vec{x}^3$ n'est rien d'autre que la résistance électrique du tore en courant continu.)

Exercice

Reprendre l'exemple de la leçon No2



en supposant que

- ▶ l'inducteur est composé de N spires axisymétriques de même axe dans lesquels circule le même courant ;
- ▶ que la charge est également axisymétrique (de même axe que les spires) ;

et fournir un modèle de calcul dont la variable d'état est la composante orthoradiale du potentiel vecteur.