

# Transfert inductif de l'énergie



## Leçon 2



### Vue d'ensemble des dispositifs inductifs

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

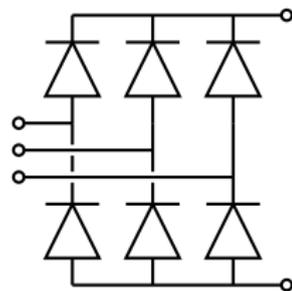
8 septembre 2014

## Objectif de la leçon

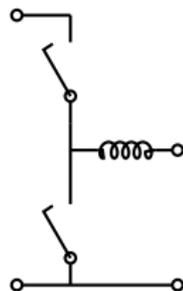
- ▶ Fournir une vue d'ensemble d'un problème de transfert de puissance par induction électromagnétique.
- ▶ Rappeler les éléments utiles d'électronique de puissance.
- ▶ Rappeler des éléments de modélisation électromagnétique
  - ▶ sur l'exemple du cylindre soumis à une induction source longitudinale ;
  - ▶ avec une description (brève) des approximations qui mènent au modèle 1D cylindrique et axisymétrique ;
- ▶ Exploiter ces éléments dans le but d'un pré-dimensionnement d'installation.

# Dispositifs d'électronique de puissance

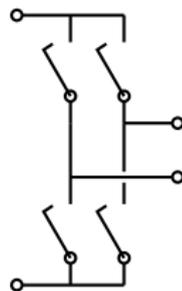
Il y en a essentiellement 5 :



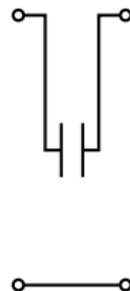
Redresseur



Hacheur



Onduleur

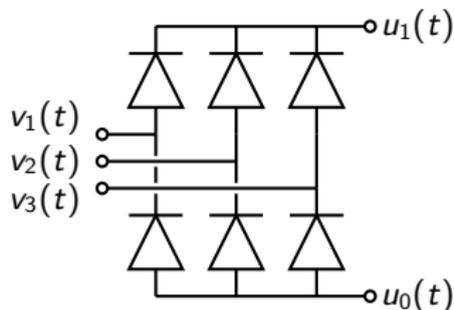


Compensation



Charge RL

## Redresseur à pont de Graetz (1/3)



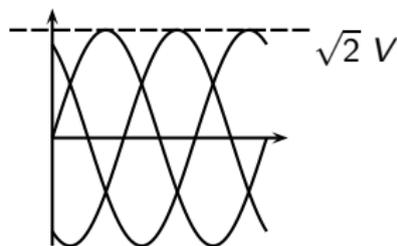
Les tensions du système triphasé sont  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $v_3(t)$ , les tensions de sortie  $u_0(t)$  et  $u_1(t)$ . L'analyse du fonctionnement de ce dispositif est

► Si les tensions  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  ne sont pas égales entre elles, il est exclu que deux au moins des diodes  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{13}$  soient passantes ; sinon il y aurait un courant à contre sens ; même remarque pour le système  $D_{21}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{23}$  ;

► si les diodes  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{13}$  sont toutes bloquées alors  $u_1 > \max(v_1, v_2, v_3)$  (sinon elles ne seraient pas toutes bloquées) ; de même si les diodes  $D_{21}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{23}$  sont toutes bloquées alors  $u_0 < \min(v_1, v_2, v_3)$  ; mais si toutes les diodes sont bloquées aucun courant ne peut passer du plot  $u_1$  au plot  $u_0$  ce qui arriverait s'ils étaient connectés via une résistance par exemple.

► la seule possibilité est qu'une seule diode par système est passante : celle qui correspond à la tension la plus grande pour  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{13}$  et la plus petite pour  $D_{21}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{23}$

## Redresseur à pont de Graetz (2/3)



$$\text{Si } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \Re \left\{ \sqrt{2} \underline{V} \exp^{j\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} \right\}$$

- ▶  $\Re$  la partie réelle

$$\Re(z) = \frac{z + z^*}{2}$$

- ▶  $j$  une solution de  $x^2 = -1$  ;
- ▶  $a = \exp^{j 4\pi/3}$  une solution non réelle de  $x^3 = 1$  ;
- ▶  $\underline{V}$  désigne l'amplitude complexe efficace d'une fonction sinusoïdale  $v(t)$ .

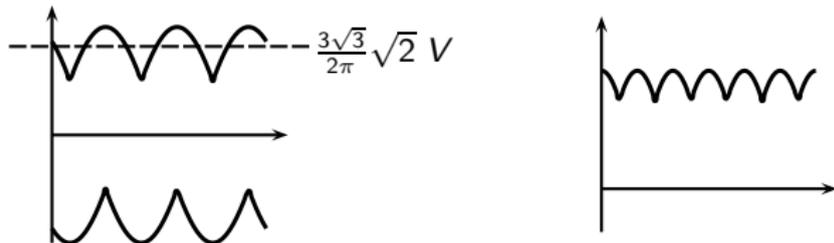
$$u_1(t) - u_0(t) = \max(v_1(t), v_2(t), v_3(t)) - \min(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$$

Pour  $\underline{V} = -j V$

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} V \max(\sin \omega t, \sin(\omega t - 2\pi/3), \sin(\omega t - 4\pi/3)) \\ u_0 = \sqrt{2} V \min(\sin \omega t, \sin(\omega t - 2\pi/3), \sin(\omega t - 4\pi/3)) \end{cases}$$

## Redresseur à pont de Graetz (3/3)

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} V \max(\sin \omega t, \sin(\omega t - 2\pi/3), \sin(\omega t - 4\pi/3)) \\ u_0 = \sqrt{2} V \min(\sin \omega t, \sin(\omega t - 2\pi/3), \sin(\omega t - 4\pi/3)) \end{cases}$$



et donc  $u_1 - u_0$  a le contenu harmonique

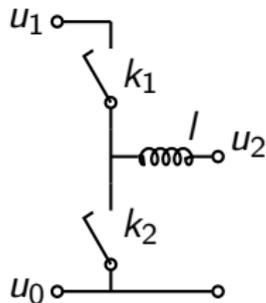
$$u_1 - u_0 = \sqrt{2} V \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{35} \cos(6 \omega t) + \frac{2}{143} \cos(12 \omega t) + \dots \right)$$

Il faut comparer les carrés des coefficients de Fourier entre eux plutôt que les coefficients eux-même : à mieux que 0.3% près  $u_1 - u_0$  est une tension continue

$$u_1 - u_0 \approx \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V = 2.34 V \text{ où } V \text{ est la tension par phase efficace}$$

## Hacheur dévolteur(1/3)

Le hacheur se représente comme



Il y a deux interrupteurs commandés  $k_1$  et  $k_2$  et une inductance dite de lissage  $l$ . Si la commande est telle que

$$k_1 \text{ est } \begin{cases} \text{fermé} & \text{pour } t \in [0, \theta T[ \text{ modulo } T \\ \text{ouvert} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$k_2 \text{ est } \begin{cases} \text{fermé} & \text{pour } t \in ]\theta T, T] \text{ modulo } T \\ \text{ouvert} & \text{sinon} \end{cases}$$

alors, si  $i$  est le courant sortant par le slot indiqué par  $u_2$ ,

$$l \frac{di}{dt} + (u_2 - u_0) = (u_1 - u_0) \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, \theta T[ \text{ modulo } T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Hacheur dévolteur (2/3)

Si le hacheur est connecté à une charge résistive  $r$  (i.e.  $u_2 - u_0 = r i$ ) depuis suffisamment longtemps pour qu'il ne reste plus que le régime établi alors, sur l'intervalle  $[0, T]$ ,

$$\begin{cases} l \frac{di}{dt} + r i = (u_1 - u_0) \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, \theta T[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ i(0) = i(T) \end{cases}$$

soit encore

$$i(t) = \frac{u_1 - u_0}{r} \tilde{i}(t/T)$$

où

$$\tilde{i}(\tau) \text{ solution de } \begin{cases} \frac{l}{rT} \frac{d\tilde{i}}{d\tau} + \tilde{i} = \begin{cases} 1 & \text{pour } \tau \in [0, \theta[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \tilde{i}(0) = \tilde{i}(1) \end{cases}$$

## Hacheur dévolteur (3/3)

$$\begin{aligned}\tilde{i}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp^{-j 2\pi n\theta}}{j 2\pi n \left(1 + j 2\pi n \frac{l}{rT}\right)} \exp^{j 2\pi n\tau} \\ &= \theta + \frac{1 - \exp^{-j 2\pi\theta}}{j 2\pi \left(1 + j 2\pi \frac{l}{rT}\right)} \exp^{j 2\pi\tau} + \dots\end{aligned}$$

Le carré de l'amplitude du premier harmonique est inférieur à  $1/4\pi^2 \approx 2.5\%$ , ce qui donne une idée de la qualité de l'approximation<sup>1</sup>

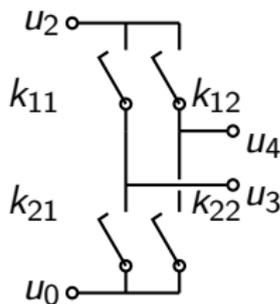
$$i(t) \approx \theta \frac{u_1 - u_0}{r} \implies u_2 - u_0 \approx \theta (u_1 - u_0)$$

---

1. Dans un cas pratique,  $r$  est fixé et  $T$  et  $l$  sont choisis de manière que l'approximation soit bien meilleure que la borne supérieure de 2.5% annoncée.

## Onduleur (1/3)

Un dispositif assurant cette conversion est l'onduleur dont le schéma est



Si la commande des interrupteurs est telle que

$$k_{11} \text{ et } k_{22} \text{ sont } \begin{cases} \text{fermés} & \text{pour } t \in [0, \frac{T}{2}[ \text{ mod } T \\ \text{ouvert} & \text{sinon} \end{cases}$$
$$k_{12} \text{ et } k_{21} \text{ sont } \begin{cases} \text{fermés} & \text{pour } t \in ]\frac{T}{2}, T] \text{ mod } T \\ \text{ouvert} & \text{sinon} \end{cases}$$

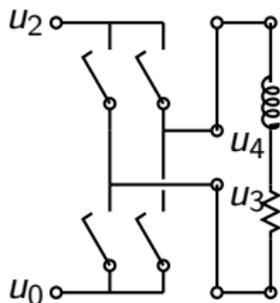
$$\text{alors } u_4 - u_3 = \begin{cases} (u_2 - u_0) & \text{pour } t \in [0, \frac{T}{2}[ \text{ mod } T \\ -(u_2 - u_0) & \text{sinon} \end{cases}$$

$u_4 - u_3$  une tension alternative dont le contenu harmonique est

$$u_4 - u_3 = (u_2 - u_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\pi (2n+1)} \exp^{j 2\pi(2n+1)t/T}$$

## Onduleur (2/3)

Si l'onduleur est connecté à une charge composée d'une résistance et d'une inductance



le courant parcourant la charge est

$$i(t) = \frac{u_2 - u_0}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2 \exp^{j 2\pi(2n+1)t/T}}{j\pi(2n+1) \left(1 + 2\pi j(2n+1) \frac{l}{rT}\right)}$$

La puissance moyenne dissipée dans la résistance est

$$\begin{aligned} P &= \frac{(u_2 - u_0)^2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2 \left(1 + (2n+1)^2 \left(\frac{l}{r} \frac{2\pi}{T}\right)^2\right)} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{(u_2 - u_0)^2}{r} \left( \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{l}{r} \frac{2\pi}{T}\right)^2\right)} + \frac{1}{25 \left(1 + 25 \left(\frac{l}{r} \frac{2\pi}{T}\right)^2\right)} + \dots \right) \end{aligned}$$

## Onduleur (3/3)

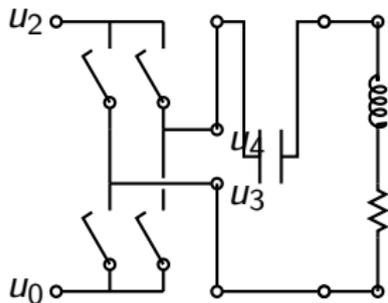
La contribution de l'harmonique 3 ( $n = 1$ ) à la puissance est 25 fois plus faible que celle du fondamental (pour  $n = 0$ ). Et le rapport est encore plus marqué pour les harmoniques suivants, aussi peut-on considérer que

$$P \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{(u_2 - u_0)^2}{r} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{l}{r} \frac{2\pi}{T}\right)^2\right)}$$

Une façon d'augmenter cette puissance serait de choisir une période  $T$  de commutation grande devant le temps caractéristique  $l/r$  de la charge mais hélas ce ne sera pas possible dans les procédés d'induction électromagnétique.

## Compensation du réactif (1/2)

Si une capacité est intercalée en série entre l'onduleur et la charge



le courant  $i(t)$  devient

$$i(t) = \frac{u_2 - u_0}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2 \exp^{j 2\pi(2n+1)t/T}}{j\pi(2n+1) \left( 1 + \frac{T}{j 2\pi(2n+1)rc} \left( 1 - \left( \frac{2\pi(2n+1)}{T} \right)^2 lc \right) \right)}$$

et la puissance dissipée dans la résistance est

$$P = \frac{(u_2 - u_0)^2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2 \left( 1 + \left( \frac{T}{2\pi(2n+1)rc} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{2\pi(2n+1)}{T} \right)^2 lc \right)^2 \right)}$$
$$\approx \frac{4 (u_2 - u_0)^2}{\pi^2 r} \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{T}{2\pi rc} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 lc \right)^2 \right)}$$

## Compensation du réactif (2/2)

Il est possible d'effectuer un choix sur la valeur de la capacité pour que la puissance soit la plus grande possible, c'est

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l c = 1 \implies c = \frac{1}{l} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

et dans ces conditions cette puissance sera

$$P \approx \frac{4}{\pi^2} \frac{(u_2 - u_0)^2}{r}$$

c'est à dire sensiblement celle qu'elle serait s'il n'y avait ni inductance ni capacité. On dit alors qu'il y a « compensation du réactif. »

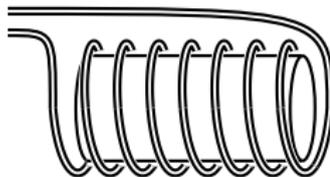
## La place des modèles électromagnétiques

La description des dispositifs d'électronique de puissance permettant d'alimenter un inducteur en présence de sa charge a été faite en supposant que cet ensemble était composé d'une résistance en série avec une inductance.



résistance & inductance

versus



Inducteur & Charge

Les modèles électromagnétiques sont utilisés :

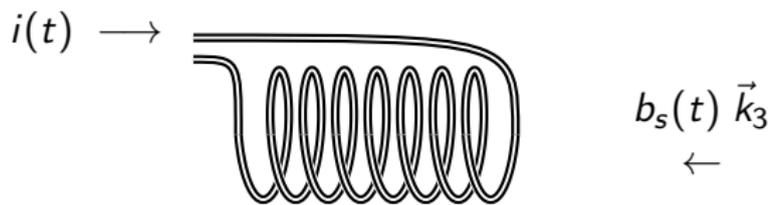
- ▶ en amont : pour fournir ces valeurs d'inductance et de résistance à l'électronique de puissance ;
- ▶ en aval : pour fournir à des modèles de transfert de chaleur et/ou de mécanique les répartitions de la puissance dissipée et la force de Laplace.

## Modèle très approximatif

- ▶ Le modèle adapté pour décrire le système composé d'un inducteur et de sa charge est le modèle de l'électromagnétisme des basses fréquences qui est l'objet principal de l'enseignement ;
- ▶ une mise en équation d'une version très approximée du problème d'un tronçon de cylindre axisymétrique conducteur de l'électricité (et éventuellement magnétique) placé dans un inducteur est effectuée ici ;
- ▶ les approximations sont
  - ▶ les inductions magnétiques dues aux courant source et induit sont séparées ; l'induction source est supposée uniforme dans l'espace occupé par le tronçon de cylindre et dirigée suivant son axe de symétrie ;
  - ▶ les courants induits sont supposés être ceux qu'il y aurait si le tronçon de cylindre avait la symétrie cylindrique (i.e. invariant par déplacement le long de son axe, ce n'est plus un tronçon).

## Induction source uniforme

L'inducteur est remplacé par une induction magnétique source



Inducteur

Induction source

orientée suivant son axe ( $\vec{k}_3$ ) et supposée uniforme à l'intérieur de l'inducteur et nulle à l'extérieur. Les champs et induction sources sont alors être reliée au courant  $i(t)$  par le théorème d'Ampère comme

$$h_s = \frac{N i(t)}{L} ; b_s(t) = \mu_0 h_s = \frac{\mu_0 N i(t)}{L}$$

où  $N$  est le nombre de spires de la bobine (sur le dessin  $N = 7$ ) et  $L$  sa hauteur.

## Equations de Maxwell 1D-aximétriques

- ▶ Les champs, induction et densités ne dépendent
  - ▶ pas de  $z$  – l'induction source est uniforme, la charge a une géométrie cylindrique ;
  - ▶ pas de  $\theta$  – l'induction source est uniforme, la charge a une géométrie axisymétrique ;

donc

$$\begin{cases} \vec{h} = h_z(t, r) \vec{k}_z & ; & \vec{b} = b_z(t, r) \vec{k}_z & ; & \rho = \rho(t, r) \\ \vec{j} = j_\theta(t, r) \vec{k}_\theta & ; & \vec{e} = e(t, r) \vec{k}_\theta & ; & \vec{d} = d_\theta(t, r) \vec{k}_\theta \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j} + \partial_t \vec{d} &\longrightarrow j_\theta + \partial_t d_\theta = -\frac{\partial h_z}{\partial r} \\ \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b} &\longrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r e_\theta \right) = -\frac{\partial b_z}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 &\longrightarrow \text{vraie inconditionnellement} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{d} = \rho &\longrightarrow \rho = 0 \end{aligned}$$

## Formulation en champ magnétique

- Si  $R$  est le rayon de la charge, les relations magnétique et diélectriques sont

$$b = \mu(r) h \quad \text{où } \mu = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } r > R \\ \mu_0 \mu_r & \text{sinon} \end{cases}$$
$$d = \epsilon_0 e \quad \text{partout (on ne considère pas de parties diélectriques)}$$

- le matériau du cylindre a une conductivité électrique  $\sigma$ ,

$$j_\theta = s e_\theta \quad \text{avec } s(r) = \begin{cases} \sigma & \text{si } r < R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Avec le choix d'utiliser  $h_\theta$  comme variable d'état, les équations se regroupent alors comme : pour  $r < R$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{1}{\sigma} \frac{\partial h_z}{\partial r} \right) - \mu_0 \mu_r \frac{\partial h_z}{\partial t} - \frac{\epsilon_0 \mu_0 \mu_r}{\sigma} \frac{\partial^2 h_z}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et } j_\theta = -\frac{\partial h_z}{\partial r} \quad \text{pour } r < R$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial h_z}{\partial r} \right) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 h_z}{\partial t^2} = 0 \quad \text{pour } r > R$$

## Régime sinusoïdal établi

► Si maintenant le régime transitoire électrique est négligé, c'est à dire

$$i(t) = \sqrt{2} \Re\{\underline{i} \exp^{j\omega t}\} \implies h_s(t) = \sqrt{2} \Re\left\{\frac{N i}{L} \exp^{j\omega t}\right\}$$

et la solution recherchée est celle du régime établi telle que

$$\begin{cases} h_z(t, r) = \sqrt{2} \Re\{\underline{h}_z \exp^{j\omega t}\} \\ j_\theta(t, r) = \sqrt{2} \Re\left\{-\frac{dh_z}{dr} \exp^{j\omega t}\right\} \end{cases}$$

Il vient donc pour  $r < R$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\sigma} \frac{dh_z}{dr} \right) - j \omega \mu_0 \mu_r \underline{h}_z + \frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mu_r}{\sigma} \underline{h}_z = 0 \text{ et } \underline{j}_\theta = -\frac{d\underline{h}_z}{dr}$$

et pour  $r > R$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dh_z}{dr} \right) + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \underline{h}_z = 0$$

## Hypothèse basse fréquence

- L'hypothèse des basses fréquences pour laquelle les termes

$$\frac{\omega^2 \mu_r}{\sigma c^2} \underline{h}_z \text{ et } \frac{\omega^2 \mu_r}{c^2} \underline{h}_z \quad (\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1)$$

sont négligeables est supposée satisfaite. Par analyse dimensionnelle cela arrive si

$$\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} \ll 1 ; R^2 \frac{\omega^2 \mu_r}{c^2} \ll 1$$

Les paramètres utilisés sont donc tels que ces conditions sont satisfaites et alors

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\sigma} \frac{d\underline{h}_z}{dr} \right) - j \omega \mu_0 \mu_r \underline{h}_z = 0 \text{ et } \underline{j}_\theta = -\frac{d\underline{h}_z}{dr} \text{ pour } r < R$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\underline{h}_z}{dr} \right) = 0 \text{ pour } r > R$$

La seconde équation permet de déduire que

$$\text{Pour } r > R : \underline{h}_z = \text{Cste}_0 + \text{Cste}_1 \ln(r)$$

## Équation de l'induction

- Lorsque  $r \rightarrow \infty$  il faut que  $\underline{h}_z \rightarrow \underline{h}_s$  d'où

$$\text{Cste}_1 = 0 \text{ et } \text{Cste}_0 = h_s = \frac{N i}{L}$$

- $h_z$  est continu au passage de  $r = R$  (si  $h_z$  n'était pas continu il y aurait une densité de courant infinie) et

$$\frac{d\underline{h}_s}{dr}(0) = 0$$

par raison de symétrie, et donc le problème se réduit à trouver  $\underline{h}_z$  dans  $]0, R[$  tel que

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\sigma} \frac{d\underline{h}_z}{dr} \right) - j \omega \mu_0 \mu_r \underline{h}_z = 0 \\ \frac{d\underline{h}_z}{dr}(0) = 0 ; \underline{h}(R) = \frac{N i}{L} \end{cases}$$

## Solution

- ▶ la solution est

$$\underline{h}(r) = \frac{N_i J_0\left(\left(1-j\right)\frac{r}{\delta}\right)}{L J_0\left(\left(1-j\right)\frac{R}{\delta}\right)}$$

où

- ▶  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce
- ▶  $\delta$  est la profondeur de pénétration de l'effet Kelvin

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu_0\mu_r}}$$

- ▶ Par définition la puissance dissipée par effet Joule est

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^L dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\theta \frac{j_\theta(t, r)^2}{\sigma} \\ &= \underbrace{\frac{2\pi L}{\sigma} \int_0^R r dr \left| \frac{dh}{dr} \right|^2}_{=P} + \text{termes fluctuants à la pulsation } 2\omega \end{aligned}$$

## Puissance Joule dans la charge (1/2)

► Après quelques calculs<sup>2</sup> la puissance Joule est

$$P = 2\pi \frac{R}{L} (N|i|)^2 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r \omega}{\sigma}} \Re \left\{ (-1 + j) \frac{J_1\left((1-j)\frac{R}{\delta}\right)}{J_0\left((1-j)\frac{R}{\delta}\right)} \right\}$$

qui se met sous la forme

$$P = (\pi R^2 L) \left( \frac{N I}{L} \right)^2 \mu_0 \mu_r \omega f(x)$$

$$\text{où } x = \frac{R}{\delta} = R \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu_0 \mu_r}{2}} \text{ et } f(x) = \frac{1}{x} \Re \left( (-1 + j) \frac{J_1((1-j)x)}{J_0((1-j)x)} \right)$$

La puissance apparaît comme le produit

- du volume de la charge  $\pi R^2 L$  ;
- le carré du champ magnétique source  $(N I/L)^2$  avec  $I = |i|$  ;
- du produit de la perméabilité du milieu  $\mu_0 \mu_r$  par la pulsation  $\omega$  d'unité Ohm/m ;
- par une fonction  $f$

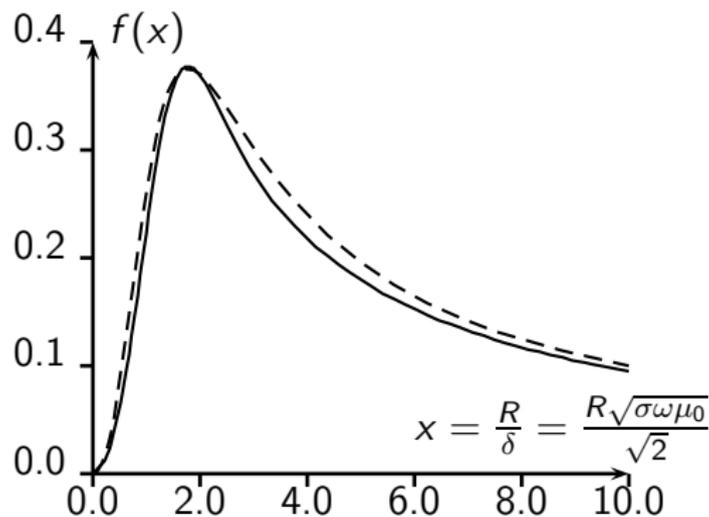
2. Poynting ou la forme variationnelle de l'équation en  $\underline{h}_z$

## Puissance Joule dans la charge (2/2)

- Une approximation possible de  $f$  est

$$f(x) \approx \frac{x^2}{2.81 + x^3} \text{ pour } 0 \leq x \leq \infty$$

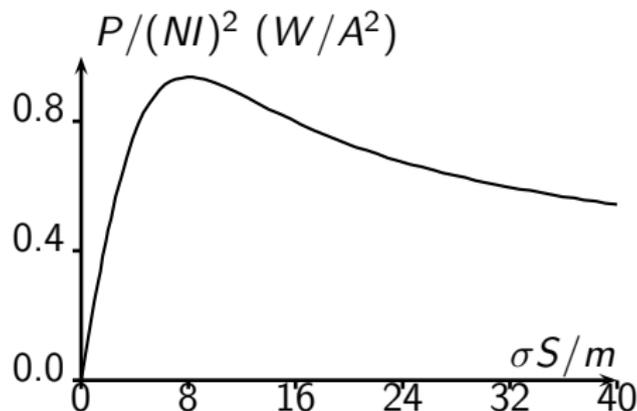
Voici le tracé de  $f$  et de cette approximation



## Puissance vs conductivité

Les dépendances asymptotiques de la puissance en fonction des paramètres sont :

- ▶ Par rapport à la conductivité  $\sigma$ 
  - ▶ si  $\sigma \rightarrow \infty$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\sigma} \rightarrow 0$ ;  $x \approx \sqrt{\sigma} \rightarrow \infty$ ;  
 $f \approx 1/\sqrt{\sigma} \rightarrow 0$  d'où  $P \approx 1/\sqrt{\sigma} \rightarrow 0$
  - ▶ si  $\sigma \rightarrow 0$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\sigma} \rightarrow \infty$ ;  $x \approx \sqrt{\sigma} \rightarrow 0$ ;  
 $f \approx \sigma \rightarrow 0$  d'où  $P \approx \sigma \rightarrow 0$
  - ▶ Il existe donc une valeur de  $\sigma$  pour laquelle la puissance injectée est maximale.



## Puissance vs fréquence et perméabilité

- ▶ Par rapport à la pulsation  $\omega$ 
  - ▶ si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\omega}$ ;  $x \approx \sqrt{\omega}$ ;  $f \approx 1/\sqrt{\omega}$  d'où  $P \approx \sqrt{\omega} \rightarrow \infty$
  - ▶ si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\omega} \rightarrow \infty$ ;  $x \approx \sqrt{\omega} \rightarrow 0$ ;  $f \approx \omega \rightarrow 0$  d'où  $P \approx \omega^2 \rightarrow 0$
  - ▶ la puissance est croissante par rapport à la fréquence.
  
- ▶ Par rapport à la perméabilité magnétique relative  $\mu_r$ 
  - ▶ si  $\mu_r \rightarrow \infty$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\mu_r}$ ;  $x \approx \sqrt{\mu_r}$ ;  $f \approx 1/\sqrt{\mu_r}$  d'où  $P \approx \sqrt{\mu_r} \rightarrow \infty$
  - ▶ si  $\mu_r \rightarrow 0$  alors  $\delta \approx 1/\sqrt{\mu_r} \rightarrow \infty$ ;  $x \approx \sqrt{\mu_r} \rightarrow 0$ ;  $f \approx \mu_r \rightarrow 0$  d'où  $P \approx \mu_r^2 \rightarrow 0$
  - ▶ la puissance est croissante par rapport à la perméabilité ; le comportement à l'infini doit être pris avec précaution ; le comportement magnétique d'un matériau cesse de pouvoir être représenté par une relation linéaire entre champ et induction lorsque la puissance injectée est infinie.

## Puissance Joule dans l'inducteur

la puissance active dans l'inducteur est

$$p = \frac{2\pi(R + e)}{a} \frac{\sqrt{\omega \mu_0}}{\sqrt{2\sigma_i}} N I^2$$

où  $\sigma_i$  est la conductivité de l'inducteur ; pour du cuivre  
 $\sigma_i \approx 0.6 \cdot 10^8 \text{ S/m}$ .

Une forme plus facile à manipuler pour comparer avec  $P$  (la puissance dans la charge) est

$$p \approx \left( (\pi R^2 L) \left( \frac{N}{L} \right)^2 \mu_0 \omega I^2 \frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_i}} = \frac{1}{x f(x)} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_i}} P$$

Ainsi le rendement est

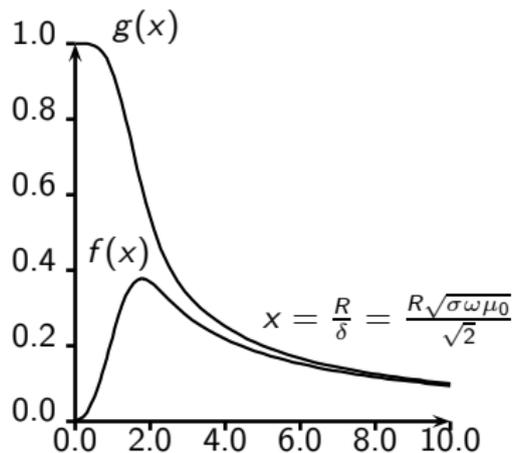
$$\nu = \frac{P}{P + p} = \frac{x f(x)}{x f(x) + \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_i}}}$$

## Puissance réactive

La puissance réactive s'exprime comme ( $e$ , épaisseur d'entrefer)

$$Q = \left( \underbrace{(\pi R^2 L) \mu_r g(x)}_{\text{charge}} + \underbrace{(\pi((R+e)^2 - R^2)L)}_{\text{entrefer}} \right) \left( \frac{NI}{L} \right)^2 \mu_0 \omega$$

$$\text{où } g(x) = \frac{1}{x} \Im \left( (-1 + j) \frac{J_1((1-j)x)}{J_0((1-j)x)} \right)$$



# Récapitulatif

## ► En entrée

- **géométrie** :  $R$  et  $L$  le rayon et la hauteur de la charge ;  $e$  l'épaisseur d'entrefer ;
- **propriétés physiques** :  $\sigma$  la conductivité électrique de la charge ;  $\mu_r$  sa perméabilité magnétique relative ;  $\sigma_i$  la conductivité électrique de l'inducteur ;  $\mu_0 = 4.0\pi 10^{-7} \text{ H/m}$  la perméabilité du vide ;
- **électrique** :  $\omega = 2\pi f$  la pulsation,  $f$  la fréquence ;  $I$  l'intensité efficace du courant dans l'inducteur ;  $V$  la tension efficace aux bornes de l'inducteur.

## ► En sortie

- **l'ordre de grandeur de l'impédance** : l'impédance vue des bornes de l'inducteur qui est  $Z = \frac{1}{I^2}((P + p) + jQ)$

$P$  est la quantité de chaleur injectée à la charge ;  $p$  la quantité de chaleur injectée à l'inducteur ;  $Q$  la puissance réactive qu'il faudra compenser par des condensateurs.

$$Z = \left( \left( f(x) + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_i}} \right) + j \left( g(x) + \frac{e}{R} \right) \right) (\pi R^2 H) \left( \frac{N}{H} \right)^2 \mu_0 \omega$$

- **l'ordre de grandeur du rendement** de l'installation

$$\nu = \frac{P}{P + p}$$

## Exercice

Discuter des dimensions de la cuve dans une installation de chauffage par induction de coulée continue de verre liquide d'un débit volumique de  $d = 10^{-3} m^3/s$  (masse volumique du verre  $\approx 2000 kg/m^3$ ) et donc d'un débit massique de  $2 kg/s$ .

La cuve sera assimilée à un cylindre et l'inducteur à un enroulement autour de ce cylindre.

Il faut apporter une puissance de  $2 MW$  (capacité calorifique du verre  $\approx 1000 J/(kg \text{ } ^\circ C)$ ) pour chauffer de  $1000^\circ C$  le verre.

La conductivité électrique du verre fondu est de  $10 S/m$ , celle du cuivre de l'inducteur  $0.6 \cdot 10^8 S/m$ .