Transfert inductif de l'énergie

Leçon 1

Rappels d'électromagnétisme rationnel

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

8 septembre 2014

Objectif de la leçon

- Rappeler les éléments d'électromagnétisme dans le cas où le mouvement macroscopique n'est pas pris en compte [1] par déduction depuis le point de départ des équations de Maxwell [2] ;

- Profiter de ce rappel pour
  1. introduire le vocabulaire et les notations utilisées dans la suite ;
  2. insister sur les points de la théorie générale qui sont en connexion avec les difficultés posées par le calcul effectif (numérique) de solutions ;

- Situer la place de l'induction électromagnétique dans l'électromagnétisme général.

---

1. Les aspects relativistes ne sont pas traités ici, ils le sont Leçon 6.
2. d'où le qualificatif de rationnel qui indique que les développements partent de notions posées *a priori* .

Bibliographie et mots clés

- Bibliographie

J. D. Jackson, Électrodynamique classique, Dunod, 2001
L. Landau, E. Lifchitz, Électrodynamique des milieux continus, Mir, 1969
A. Bossavit, Électromagnétisme, en vue de la modélisation, Springer, 1993

- Mots clés : champ magnétique, électrique – courants de déplacement – densité de charge électrique, courant électrique – force de Lorentz – formules de Biot et Savart – potentiels retardés – induction magnétique, électrique – induction électromagnétique – jauge de Lorenz, Coulomb – lemmes de Poincaré – loi d'Ohm – magnétostatique – ondes électromagnétique – opérateurs différentiels : d'alembertien, divergence, gradient, laplacien, rotationnel – permittivité diélectrique – perméabilité magnétique – potentiel scalaire électrique, vecteur magnétique – relation de Gauss, Maxwell-Ampère, Maxwell-Faraday , conservation de l'induction magnétique, conservation du courant électrique – unités : Volt, Ampère, Tesla, Coulomb, Farad, Henry – électrostatique.

Équations de Maxwell (1/2)

- E_3 est l'espace des positions, les équations de Maxwell mettent les champs, inductions et densités :

$$
\begin{array}{lcccl}
\vec{e} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Champs électriques} \qquad E_3(V/m) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{e}(t, \vec{x}) \\
\vec{d} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Inductions électriques} \qquad E_3(Cb/m^2) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{d}(t, \vec{x}) \\
\vec{h} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Champs magnétiques} \qquad E_3(A/m) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{h}(t, \vec{x}) \\
\vec{b} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Inductions magnétiques} \qquad E_3(T) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{b}(t, \vec{x}) \\
\vec{j} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Densités de courant électrique} \qquad E_3(A/m^2) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{j}(t, \vec{x}) \\
\rho & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Densités de charges électriques} \qquad \mathbb{R}(Cb/m^3) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \rho(t, \vec{x})
\end{array}
$$

Équations de Maxwell (1/2)

en relation comme

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j} + \partial_t \vec{d} & \text{Maxwell-Ampère} & E_3(A/m^2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b} & \text{Maxwell-Faraday} & E_3(V/m^2 = T/s) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 & \text{Conservation de l'induction magnétique} & E_3(T/m) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{d} = \rho & \text{Gauss} & \mathbb{R}(Cb/m^3) \end{cases}$$

où

$$\begin{array}{rcccl} \partial_t \vec{d} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Courants de déplacement} \quad E_3(A/m^2) \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{d}(t, \vec{x}) \end{array}$$

- Les notations sont expliquées en séance.

Relations magnétiques et diélectrique dans le vide

- « Le vide » dont il s'agit est tout relatif puisqu'il contient des charges électriques (ρ) et des courants électriques ($\vec{j}$).
- Les champs et inductions sont liés par
  - la relation magnétique

$$\vec{b} = \mu_0 \, \vec{h} \quad ; \quad \mu_0 = 4\pi \; 10^{-7} \; H/m \text{ perméabilité magnétique du vide}$$

  - la relation diélectrique

$$\vec{d} = \epsilon_0 \, \vec{e} \quad ; \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36 \; \pi} \; F/m \text{ permittivité diélectrique du vide}$$

- La distinction en champs et inductions est inutile dans le vide puisque ceux-ci sont liés par une simple relation de proportionnalité, le coefficient étant une constante universelle. Mais elle est maintenue pour son utilité ultérieure dans les cas de présence de la matière.

Les densités de courant et de charge sont les sources

- Les densité de courant et de charge d'une part ne jouent pas le même rôle que les champs et inductions magnétiques et électriques.

- Elles sont *a priori* considérées comme des sources, i.e. des données à partir desquelles les autres quantités sont calculées (et alors quand on cherche la forme d'une source pour qu'une quantité calculée ait telle ou telle autre forme on parle de problème inverse).

- Mais par la suite ces sources vont être en partie reliées aux champs et induction, ce qui affaiblit cette distinction qui cependant doit être accepté en premier lieu. Et notamment elle est cause que celles de relations de Maxwell qui ne comportent pas ρ et $\vec{j}$ sont considérées comme autonomes [3].

3. D'où la désignation de 1° et 2° groupes des équations de Maxwell.

Comportement à l'∞

- Il est convenu que les « situations physiques » sont telles que
  - Les densités de courant et de charge sont placées à distance finie de l'origine

$$\exists\, D \text{ domaine borné } \subset E_3 \text{ et contenant } \vec{0} \text{ tel que}$$
$$\vec{x} \notin D \Longrightarrow \vec{j}(t,\vec{x}) = \vec{0}\,;\ \rho(t,\vec{x}) = 0$$

  - Les champs et inductions électrique et magnétique s'évanouissent à distance infinie

$$\lim_{|\vec{x}| \longrightarrow \infty} \vec{u}(t,\vec{x}) = \vec{0} \text{ pour } \vec{u} = \vec{e}, \vec{d}, \vec{h} \text{ ou } \vec{b}$$

- Mais ces situations physiques peuvent être « approximées » par des situations où ces règles ne sont pas respectées.

Par exemple quand on approxime le cas d'un aimant situé à l'intérieur d'une bobine alimentée en courant électrique par celui où l'aimant est placé dans une induction magnétique uniforme.

Comportement local

- Il est convenu que les situations physiques sont telles que
  - Les champs et inductions électriques et magnétiques ne peuvent prendre une valeur infinie en un quelconque point de l'espace

$$\forall\, \vec{x} \in E_3 \;:\; |\vec{u}| < \infty \text{ pour } \vec{u} = \vec{e}, \vec{d}, \vec{b}, \vec{h}$$

  - Les densités de charge et de courant peuvent prendre des valeurs infinies en un point de l'espace mais elles correspondent à des quantités finies
    - si D est un domaine quelconque de l'espace, la quantité de charge qu'il contient est

$$\left| \int_D \rho(t, \vec{x})\; d\vec{x}^{\,3} \right| < \infty$$

    - si S est une surface quelconque dans l'espace, dont le champ de normales est noté $\vec{n}$, la quantité de courant qui la traverse est

$$\left| \int_S \vec{j}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})\; d\vec{x}^{\,2} \right| < \infty$$

Lemmes globaux de Poincaré

- Un champ à rotationnel nul dans tout E_3 est un champ potentiel

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0} \Longrightarrow \exists\, \varphi \text{ tel que } \vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$$

φ est appelé le potentiel scalaire du champ de vecteurs $\vec{u}$; il suffit de choisir

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int_0^1 \vec{x} \cdot \vec{u}(t, \alpha\, \vec{x})\, d\alpha$$

- Un champ à divergence nulle dans tout E_3 est un champ rotationnel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \Longrightarrow \exists\, \vec{v} \text{ tel que } \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

$\vec{v}$ est appelé le potentiel vecteur du champ de vecteurs $\vec{u}$; il suffit de choisir

$$\vec{v}(t, \vec{x}) = \int_0^1 \vec{u}(t, \alpha\, \vec{x}) \times \vec{x}\, \alpha d\alpha$$

Spécification des potentiels (1/2)

- Un potentiel scalaire φ tel que $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ s'évanouit à l'infini

$$\lim_{|\vec{x}| \longrightarrow \infty} \varphi(t, \vec{x}) = 0$$

- Un potentiel vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ s'évanouit à l'infini

$$\lim_{|\vec{x}| \longrightarrow \infty} \vec{v}(t, \vec{x}) = \vec{0}$$

- Remarque : les formules $\varphi(t, \vec{x}) = \int_0^1 \vec{x} \cdot \vec{u}(t, \alpha\, \vec{x})\, d\alpha$ et $\vec{v}(t, \vec{x}) = \int_0^1 \vec{u}(t, \alpha\, \vec{x}) \times \vec{x}\, \alpha d\alpha$ ne sont plus valables avec ces conditions.

- Les potentiels ne prennent de valeurs infinies en aucune position dans E_3

$$\forall\, \vec{x} \in E_3 \ : \ |\vec{v}| < \infty \ ; \ |\varphi| < \infty$$

Spécification des potentiels (2/2)

- Ces spécifications sont suffisantes pour que le potentiel scalaire soit défini de façon unique ;

- mais elles ne sont pas suffisante pour le potentiel vecteur. Si

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

alors $\forall\ \psi$

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} + \vec{\nabla}\psi)$$

- L'unicité est obtenue en imposant par exemple

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

mais il y a d'autres possibilités. Ce point est revisité à propos des jauges.

Laplaciens et d'alembertien scalaires et vectoriels

- laplacien scalaire
$$\Delta\varphi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi$$
- laplacien vectoriel vs « rotationnel de rotationnel »
$$\vec{\Delta}\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u}$$
- d'alembertien scalaire
$$\Box\,\psi = \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\psi - \Delta\psi$$
- d'alembertien vectoriel
$$\vec{\Box}\,\vec{u} = \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\vec{u} - \vec{\Delta}\vec{u}$$

c la vitesse de la lumière ;

Champs scalaires à laplacien ou d'alembertien nuls

- Le seul champ scalaire à laplacien nul s'évanouissant à l'infini est le champ nul

$$\Delta\,\psi = 0 \text{ dans } E_3 \quad \text{et} \quad \lim_{|\vec{x}|\longrightarrow\infty} \psi(\vec{x}) = 0 \implies \psi = 0$$

(cf. principe du maximum de Dirichlet appliqué à la sphère $|\vec{x}| < R$ lorsque $R \longrightarrow \infty$)

- le seul champ scalaire à d'alembertien s'évanouissant à l'infini est le champ nul

$$\Box\,\psi = 0 \text{ dans } E_3 \quad \text{et} \quad \lim_{|\vec{x}|\longrightarrow\infty} \psi(t,\vec{x}) = 0 \implies \psi = 0$$

(les solutions d'une fonction à d'alembertien nul qui sont une superposition de fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} \chi \;:\; \mathbb{R}\times E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \chi(t,\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{k}\;t) \end{array}$$

où $\vec{k}$ est un vecteur quelconque de norme c

Si donc $\exists\,\vec{x}_0$ tels que $\chi(0,\vec{x}_0) \neq 0$ alors $\lim_{t\longrightarrow\infty} \chi(t,\vec{x}_0 + \vec{k}\;t) = \chi(0,\vec{x}_0) \neq 0$ et donc $\lim_{|\vec{x}|\longrightarrow\infty} \chi(t,\vec{x}) \neq 0$.)

Potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique

De $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$ vient l'existence du potentiel vecteur magnétique $\vec{a}$ tel que

$$\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

La relation de Maxwell-Faraday devient alors $\vec{\nabla} \times (\vec{e} + \partial_t \vec{a})$ d'où est déduit l'existence du potentiel scalaire électrique φ tel que

$$\vec{e} = -\partial_t \vec{a} - \vec{\nabla}\varphi$$

Il reste alors à remplacer dans Maxwell-Ampère qui devient

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) = \vec{j} - \epsilon_0 \left(\partial_{tt}^2 \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right)$$

puis dans Gauss qui devient

$$-\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \left(\vec{\nabla}\varphi + \partial_t \vec{a} \right) = \rho$$

Indetermination des potentiels

- Les potentiels ne sont pas définis de façon unique, il est possible
  - d'ajouter le gradient d'un potentiel scalaire ψ à $\vec{a}$
  - si on retranche simultanément dont la dérivée temporelle de ce potentiel ψ au potentiel électrique φ
- les couples de potentiels sont équivalents

$$(\vec{a}, \varphi) \Longleftrightarrow (\vec{a} + \vec{\nabla}\psi, \varphi - \partial_t \psi)$$

du point de vue des équations électromagnétiques

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{\nabla}\psi) \right) = \vec{j} - \epsilon_0 \left(\partial^2_{tt}(\vec{a} + \vec{\nabla}\psi) + \vec{\nabla}\partial_t(\varphi - \partial_t\psi) \right)$$

et

$$-\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \left(\vec{\nabla}(\varphi - \partial_t\psi) + \partial_t(\vec{a} + \vec{\nabla}\psi) \right) = \rho$$

La jauge de Lorenz (1/2)

- L'indétermination sur les potentiels est levée en utilisant une relation supplémentaire appelée une jauge. La première possible est la jauge de Lorenz qui est

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi = 0$$

De cette façon $\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) = \vec{j} - \epsilon_0 \left(\partial^2_{tt} \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right)$ qui s'écrit

$$-\frac{1}{\mu_0} \vec{\Delta}\, \vec{a} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \vec{j} - \epsilon_0 \left(\partial^2_{tt} \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right)$$

se transforme en

$$\vec{\Box}\, \vec{a} = \mu_0\, \vec{j} \text{ si } c = 1/\sqrt{\epsilon_0\, \mu_0}$$

De même $-\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \left(\vec{\nabla} \varphi + \partial_t \vec{a} \right) = \rho$ devient

$$\Box\, \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La jauge de Lorenz (2/2)

► L'utilisation de la jauge de Lorenz transforme les équations de Maxwell dans le vide en la recherche des potentiels tels que

$$\vec{\Box}\,\vec{a} = \mu_0\,\vec{j} \quad ; \quad \Box\,\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ces potentiels sont uniques du fait des propriétés affirmées précédemment sur les solutions de problèmes à d'alembertiens.

► On peut objecter que la jauge de Lorenz n'est pas nécessairement satisfaite par les potentiels ; cependant si la relation de conservation du courant électrique

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \partial_t\rho = 0$$

est réalisée alors

$$\Box\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \epsilon_0\,\partial_t\varphi\right) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \epsilon_0\,\partial_t\varphi = 0$$

soit donc *in fine* la jauge de Lorenz puisque $\epsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$

La jauge de Coulomb

- La seconde jauge fréquemment utilisée est la jauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$$

elle conduit à

$$\begin{cases} \vec{\Box}\, \vec{a} = \mu_0 \left(\vec{j} - \epsilon_0 \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right) \\ \Delta\, \varphi + \dfrac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \end{cases}$$

Et comme précédemment les potentiels solutions de ce système satisfont à cette jauge.

- La forme des équations est plus disymmétrique qu'avec la jauge de Lorenz et surtout son statut est plus suspect puisqu'un changement de sa source ρ en une position correspond à un changement instantané du potentiel scalaire électrique φ à une autre position, ce qu'on sait ne pas être possible.

Néanmoins la jauge de Coulomb est utilisée pour les problèmes d'induction électromagnétique qui de toute façon correspondent à une hypothèse de transmission instantanée.

Formulation en potentiels : synopsis

$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j} + \partial_t \vec{d}$
Maxwell Ampère

$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$
cons. induction

$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b}$
Maxwell Faraday

$\vec{\nabla} \cdot \vec{d} = \rho$
Gauss

$\vec{b} = \mu_0 \, \vec{h}$
rel. magnétique

$\exists \, \vec{a}$ tq $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$

$\exists \varphi$ tq $\vec{e} = -\partial_t \vec{a} - \vec{\nabla} \varphi$

$\vec{d} = \epsilon_0 \, \vec{e}$
rel. diélectrique

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + \epsilon_0 \left(\partial^2_{tt} \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right) = \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \left(\vec{\nabla} \varphi + \partial_t \vec{a} \right) \right) + \rho = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \frac{1}{c^2} \, \partial_t \varphi = 0$$
jauge de Lorenz

$$-\vec{\Box} \, \vec{a} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

$$-\Box \, \varphi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\vec{\Delta} \vec{a} - \frac{1}{c^2} \partial^2_{tt} \vec{a} + \mu_0 \left(\vec{j} - \epsilon_0 \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right) = \vec{0}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$
jauge de Coulomb

$$\Delta \varphi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

(Les flèches signifient que la relation amont est nécessaire pour établir la relation aval.)

Les formules de Biot et Savart

- Si un potentiel ψ est solution de

$$\Delta\psi + \alpha = 0 \text{ dans } E_3 \text{ avec } \lim_{|\vec{x}|\longrightarrow\infty} \psi(t,\vec{x}) = 0$$

où α est une densité volumique, il peut alors être exprimé comme

$$\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{E_3} \frac{\alpha(t,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3}$$

et réciproquement

- Si un champ de vecteurs $\vec{u}$ est solution de

$$\Delta\vec{u} + \vec{\iota} = 0 \text{ dans } E_3 \text{ et } \lim_{|\vec{x}|\longrightarrow\infty} \vec{u}(t,\vec{x}) = \vec{0}$$

où ι est une densité de courants, il peut alors être exprimé comme

$$\vec{u}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{E_3} \frac{\vec{\iota}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3}$$

et réciproquement.

Formules des potentiels retardés

- Si un potentiel ψ est solution de

$$-\Box\,\psi + \alpha = 0 \text{ dans } E_3 \text{ et } \lim_{|\vec{x}|\longrightarrow\infty} \psi(t,\vec{x}) = 0$$

où α est une densité volumique, il peut alors être exprimé comme

$$\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{E_3} \frac{\alpha\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3}$$

et réciproquement.

- Si un champ de vecteurs $\vec{u}$ est solution de

$$-\vec{\Box}\,\vec{u} + \vec{\iota} = 0 \text{ dans } E_3 \text{ et } \lim_{|\vec{x}|\longrightarrow\infty} \vec{u}(t,\vec{x}) = \vec{0}$$

où ι est une densité de courants, il peut alors être exprimé comme

$$\vec{u}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{E_3} \frac{\vec{\iota}\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3}$$

et réciproquement.

Solutions explicites du problème d'électromagnétisme

- En jauge de Lorenz

$$\begin{cases} \vec{a}(t,\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{E_3} \dfrac{\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3} \\ \varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_{E_3} \dfrac{\rho\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3} \end{cases}$$

- En jauge de Coulomb

$$\begin{cases} \varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_{E_3} \dfrac{\rho(t,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3} \\ \text{On pose : } \vec{j}_\varphi(t,\vec{x}) = -\epsilon_0 \vec{\nabla}_{\vec{x}}\, \partial_t \varphi\,(t,\vec{x}) \\ \vec{a}(t,\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{E_3} \dfrac{\left(\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right) + \vec{j}_\varphi\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3} \end{cases}$$

Développements multipolaires (1/2)

- Le développement

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3\,(\vec{x}\cdot\vec{y}) - \vec{y}^2\,\vec{x}^2}{|\vec{x}|^5} + \dots$$

permet d'écrire $\psi(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{E_3} \frac{\alpha(t,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3}$ comme

$$\psi(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\,|\vec{x}|}\int_{E_3} \alpha(t,\vec{y})\; d\vec{y}^{\,3} - \frac{1}{4\pi\,|\vec{x}|^3}\left(\vec{x}\cdot\int_{E_3}\alpha(t,\vec{y})\;\vec{y}\;d\vec{y}^{\,3}\right) + \dots$$

ce qui fait successivement apparaître les « moments » de α

$$\text{pour } n \geq 0 \;:\; \int_{E_3} \alpha(t,\vec{y})\;|\vec{y}|^{2n}\; d\vec{y}^{\,3}$$

- C'est un développement multipolaire qui permet d'exprimer ψ « au loin » de sa source α ; ce qui a plusieurs usages.

Développements multipolaires (2/2)

- La solution

$$\begin{cases} \vec{a}(t,\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{E_3} \dfrac{\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3} \\ \varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_{E_3} \dfrac{\rho\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3} \end{cases}$$

peut faire l'objet d'un développement multipolaire puisque les densités ρ et $\vec{j}$ sont localisées au voisinage de l'origine.

- L'analyse qui s'en déduit est relativement longue et dépend du cas étudié ; elle permet notamment de connaître *a priori* le comportement à l'infini de ϕ et $\vec{a}$, et de préciser comment ces potentiels s'évanouissent à l'infini.

La force de Lorentz

- La densité de forces électromagnétiques de Lorentz qui s'exerce sur ces charges est

$$\vec{f}(t,\vec{x}) = \rho(t,\vec{x})\ \left(\vec{e} + \vec{v}(t,\vec{x}) \times \vec{b}(t,\vec{x})\right)$$

- Si la densité de charges électriques $\rho(t,\vec{x})$ se conserve, c'est qu'il existe un champ de vitesses eulérien $\vec{v}(t,\vec{x})$ tel que

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho\ \vec{v}) = 0$$

et donc la vitesse de déformation de la densité de charges peut être éliminée au profit d'une densité de courant de courant de la forme

$$\vec{j} = \rho\ \vec{v}$$

- L'expression de la densité de forces électromagnétiques est alors

$$\vec{f} = \underbrace{\rho\ \vec{e}}_{\text{densité de forces électrique}} + \underbrace{\vec{j} \times \vec{b}}_{\text{densité de forces de Laplace}}$$

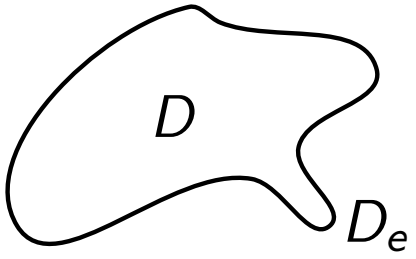
Il reste beaucoup encore à dire, mais ce sera fait plus loin.

Relations magnétiques linéaires

► La perméabilité magnétique n'est plus constante dans tout l'espace, c'est une fonction [4]

$$\begin{array}{rcccl} \mu & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+(H/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \mu(\vec{x}) \end{array}$$

qui est constante par morceau, typiquement si l'espace E_3 est décomposé en deux parties D et D_e



$$\mu_(\vec{x}) = \begin{cases} \mu_1 & \text{dans} \quad D \\ \mu_0 & \text{ailleurs} \quad \text{i.e. dans } D_e \end{cases}$$

Dans ce cas il n'est plus permis de placer le terme μ indifféremment de part et d'autre d'un opérateur différentiel par rapport à l'espace et notamment la description à base de jauge de Lorenz n'est plus possible ; on adopte systématiquement la jauge de Coulomb.

4. On remarquera que μ n'est pas une fonction du temps puisque le mouvement macrocopique n'est pas pris en compte dans cette leçon.

Origine des perméabilité magnétique et permittivité diélectrique autres que celle du vide

- Ce qui vient d'être avancé pour la perméabilité magnétique pourrait l'avoir été pour la permittivité diélectrique qui peut donc être considérée elle aussi comme une fonction

$$\begin{array}{rcccl} \epsilon & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+(F/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \epsilon(\vec{x}) \end{array}$$

La question est de justifier la raison de ces extensions qui évidemment ont pour objectif de prendre en compte la présence de la matière.

- Il y a deux façons d'appréhender les choses :
  - partir d'un objet donné *a priori* qui est la charge électrique, lui conférer des propriétés et montrer que certaines relations entre les positions et vitesses de ces charges électriques conduisent à ce que les grandeurs électriques et magnétiques se scindent chacunes en champ et induction $\longrightarrow$ Hazard ;
  - adopter un point de vue phénoménologique d'emblée.

L'approche phénoménologique

► Aucune hypothèse n'est faite sur la nature de la matière, on se contente de « sauver les phénomènes » en nommant les matériaux qui, remplissant un domaine D, font que les phénomènes électromagnétiques soient mieux pris en compte au mieux en donnant des valeurs *ad hoc* aux permittivité et permabilité.

► C'est une approche phénoménologique. Il se trouve que, par exemple, choisir μ_1 à la valeur de quelques dizaines ou centaines de fois μ_0 là où il y a de l'acier permet effectivement de disposer d'un modèle capable de prédire correctement la puissance injectée à cet acier [5]

► De plus l'approche phénoménologique ne se réduit pas au cas linéaire mais permet également d'introduire le cas affine (les aimants) ainsi que les non-linéarités magnétiques comme ce sera expliqué plus loin.

5. « Prédire n'est [certes] pas expliquer », Thom : Stabilité structurelle et morphogenèse, Dunod, 1984. mais c'est mieux que rien.

Potentiels électromagnétiques en présence de matière

La présence de la matière est traduite par des perméabilité magnétique et permittivité diélectrique dépendant de l'espace, on ne s'intéresse qu'à l'introduction des potentiels.

$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j} + \partial_t \vec{d}$
Maxwell Ampère

$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$
cons. induction

$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b}$
Maxwell Faraday

$\vec{\nabla} \cdot \vec{d} = \rho$
Gauss

$\vec{b} = \mu(\vec{x})\ \vec{h}$
rel. magnétique

$\exists\ \vec{a}$ tq $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$ $\longrightarrow$ $\exists \varphi$ tq $\vec{e} = -\partial_t \vec{a} - \vec{\nabla}\varphi$

$\vec{d} = \epsilon(\vec{x})\ \vec{e}$
rel. diélectrique

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu(\vec{x})} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + \epsilon(\vec{x}) \left(\partial^2_{tt} \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right) = \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon(\vec{x}) \left(\vec{\nabla}\varphi + \partial_t \vec{a} \right) \right) + \rho = 0$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$
jauge de Coulomb

Loi d'Ohm

- Le courant électrique n'est maintenant plus considéré en totalité comme une source ; sa densité est séparée en deux parties

$$\vec{j} = \vec{j_s} + \vec{j_i}$$

la partie source $\vec{j_s}$ et l'autre partie $\vec{j_i}$ reliée (phénoménologiquement encore) au champ électrique dans certaines parties de l'espace correspondant aux domaines conducteurs de l'électricité.

- La conductivité est une fonction de l'espace

$$\begin{array}{rcccl} \sigma & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+(S/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \sigma(\vec{x}) \end{array}$$

et typiquement si D et D_e sont 2 parties complémentaires de E_3

$$\sigma(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{dans} \quad D \\ 0 & \text{ailleurs} \quad \text{i.e. dans } D_e \end{cases}$$

- La loi d'Ohm (locale) est

$$\vec{j_i} = \sigma \ \vec{e}$$

La densité de courant $\vec{j_i}$ n'est donc pas une source.

Charges électriques

► Du fait de la relation de conservation du courant électrique, la densité de charge doit elle aussi être séparée en deux parties

$$\rho = \rho_s + \rho_i$$

de manière que séparément

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j_s} + \partial_t \rho_s = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j_i} + \partial_t \rho_i = 0$$

► À cette relation près ρ_s est une variable source indépendante. Par contre ρ_i dépend du champ électrique par

$$\partial_t \rho_i = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma \ \vec{e})$$

Ce n'est pas une source mais une grandeur cherchée.

Le problème électromagnétique linéaire mais complet

► Au final le problème électromagnétique consiste à chercher les potentiels φ, $\vec{a}$ (s'évanouissant à l'infini) et la densité ρ_i (nulle à l'infini) solutions de

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\dfrac{1}{\mu(\vec{x})} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + \epsilon(\vec{x}) \left(\partial^2_{tt} \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right) - \sigma(\vec{x}) \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \right) = \vec{j_s} \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon(\vec{x}) \left(\vec{\nabla} \varphi + \partial_t \vec{a} \right) \right) + \rho_i = -\rho_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases}$$

dont les sources sont $\vec{j_s}$ et ρ_s ainsi que les données des matériaux (nature et géométrie) les fonctions μ, ϵ, σ.

► Ce problème a été qualifié de linéaire parce qu'on n'a utilisé que des relations constitutives linéaires pour le construire : il pourrait donc être compliqué encore.

► D'autre part le problème est trop riche pour la majeure partie des applications, il convient donc de le découper suivant les usages.

Parties de l'électromagnétisme : statique

- La première approximation possible du problème d'électromagnétisme consiste à supposer que les sources ρ_s, $\vec{j}_s$ varient suffisamment lentement dans le temps pour que les termes comportant une dérivée dans le temps puissent ne pas être prises en compte. C'est l'approximation statique qui conduit à un découplage presque complet entre électricité et magnétisme. Il y a :
- l'électrostatique

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon(\vec{x}) \left(\vec{\nabla} \varphi \right) \right) + \cancel{\rho_i} = -\rho_s$$

où ρ_i a un rôle qui sera précisé lors de l'étude de ce cas mais qui peut être négligé en 1° approximation.

- la magnétostatique

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\dfrac{1}{\mu(\vec{x})} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) - \cancel{\sigma(\vec{x}) \left(\vec{\nabla} \varphi \right)} = \vec{j}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases}$$

où le commentaire fait pour ρ_i peut être reconduit pour le terme $-\sigma \vec{\nabla} \varphi$.

Électrocinétique

► Un autre régime statique consiste à chercher la forme que pourrait prendre $\vec{j_s}$ à partir de la donnée d'un domaine D_s qui supporte cette densité de courant et donc qui est conducteur de l'électricité sans pour autant que cette propriété de conduction apparaisse dans les équations électromagnétiques.

► Il y a là une approximation à faire et quelques développement afférents qui seront explicités Leçon No 3 dans le cadre de l'analyse de l'induction électromagnétique.

Analyse dimensionnelle

- Si les dimensions caractéristiques en espace et en temps sont notées L et T, que les grandeurs caractéristiques de $\vec{a}$ et $\vec{\phi}$ sont notée $[A]$ et $[\Phi]$, les poids respectifs des différents termes de l'équation vectorielle sont

Courants magnétique		de conduction		de déplacement		source
$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)$	$+$	$\sigma\left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi\right)$	$+$	$\epsilon\left(\partial^2_{tt}\vec{a} + \vec{\nabla}\partial_t\varphi\right)$	$=$	$\vec{j}_s$
$\approx \frac{[A]}{\mu_0\ \mu_r L^2}$		$\approx \frac{\sigma[A]}{T}$		$\approx \frac{\epsilon_0\epsilon_r[A]}{T^2}$		

- Les rapports des ordres de grandeur des courants de conduction et de déplacement à celui du courant magnétique sont donc (c est la vitesse de la lumière)

$$\frac{\text{courant magnétique}}{\text{courant de déplacement}} = \frac{[A]}{\mu_0\ \mu_r L^2} \Big/ \frac{\epsilon_0\epsilon_r[A]}{T^2} = \frac{1}{\mu_r\ \epsilon_r}\left(\frac{c}{L/T}\right)^2$$

$$\frac{\text{courant de conduction}}{\text{courant de déplacement}} = \sigma[A]/T \Big/ \frac{\epsilon_0\epsilon_r[A]}{T^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0/T}$$

Induction

- En choisissant de prendre $\epsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$, le rapport des courant magnétique et de déplacement est le carré du rapport de la vitesse de la lumière c à une vitesse L/T fabriquée à partir des dimensions caractéristiques.

déplacement $<<$ magnétique, conduction :

- Et

$$\left(\frac{c}{L/T}\right)^2 > 100 \qquad \text{parce que } L < 30\ m,\ \frac{1}{T} < 10^6 \text{ Hz}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0/T} > 100 \qquad \text{parce que } 1/T < 10^6 \text{ Hz},\ \sigma > 10$$

Pour des dispositifs de taille inférieure à la dizaine de mètre et pour des fréquences inférieures au mégahertz le terme de courant de déplacement est négligeable devant les courants magnétiques et de conduction (quand ils existent) : c'est le problème d'induction électromagnétique.

Ondes électromagnétiques

- Si $L/T > c/10$ approximativement il n'est plus possible de négliger le courant de déplacement devant le courant magnétique.

- Par contre si la conductivité σ est de l'ordre de celle des métaux $\approx 10^6\ (\Omega\ m)^{-1}$ il est encore possible de négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.

- C'est la problématique des problèmes d'ondes qui prennent une forme complexe dans laquelle deux zones sont à considérer suivant qu'il y a ou non des métaux.

Exercices

- Exercice 1 : Traduire les équations de Maxwell en composantes : a) en coordonnées cartésiennes ; b) en coordonnées cylindiques ; c) en coordonnées sphériques.
- Exercice 2 : Montrer

$$\psi(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{x} \cdot \vec{u}(\alpha\, \vec{x})\, d\alpha \Longrightarrow \vec{u} = \vec{\nabla}\psi$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{u}(\alpha\, \vec{x}) \times \vec{x}\, \alpha d\alpha \Longrightarrow \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

inventer une relation qui permet d'exprimer $\vec{u}$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \rho$ en fonction de ρ.

- Exercice 3 : $\int_{E_3} \vec{e}^2\, d\vec{x}^{\,3}$ est-elle finie quand $\vec{\nabla} \times \vec{e} = \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \rho$ avec $\int_{E_3} \rho\, d\vec{x}^{\,3} \neq 0$ et ρ étant fini et nulle à partir d'une distance finie à l'origine.
- Exercice 4 : Démontrer la formule du potentiel retardé

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{\alpha\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, d\vec{y}^{\,3} \Longrightarrow -\Box\, \psi + \alpha = 0$$

en admettant : 1) Biot et Savart, 2) qu'il est possible de permuter dérivations et intégration sans précautions.