Poser et résoudre un problème

Leçon 4

Logique & heuristique

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

11 mai 2020

Objectif

- La leçon est composée de deux parties : la 1° introduit quelques éléments de logique formelle et la 2° fournit quelques règles heuristiques pour analyser une situation et résoudre le problème qu'elle pose.

- Les éléments de logique formelle ne sont pas tant introduits dans le but de donner une méthode pour conduire des raisonnement sans faille que pour disposer du vocabulaire et des notions nécessaires à l'analyse des règles heuristiques.

- Celles-ci sont effectivement bien moins fiables que les théorèmes de logique mais elle s'avèrent souvent utiles dans la phase d'analyse qui mène à la résolution effective des problèmes.

Logique

► Il suffit d'examiner l'article de Wikipédia as hoc pour voir que ce qu'on appelle 'logique' est un ensemble de considérations assez abstraites.

Dit autrement : si C est l'ensemble des considérations et L l'ensemble des considérations de la logique on a $L \subset C$; si de plus A l'ensemble des considérations abstraites alors $A \subset C$.
Le contenu de la phrase n'est pas encore épuisé. Il faut pour cela ajouter : si L est l'ensemble des considérations de la logique alors $L \subset A$

Dit encore autrement :

1/ la condition nécessaire pour qu'une considération fasse partie de la logique est qu'elle soit abstraite ; $\Leftrightarrow L \subset A$

2/ une condition suffisante pour qu'une considération soit abstraite est qu'elle fasse partie de la logique $\Leftrightarrow L \subset A$ aussi.

► On voit que l'utilisation du langage ensembliste est plutôt simplifiant. D'où l'intérêt de l'utiliser conjointement d'ailleurs avec ce qui s'appelle le calcul des proposition complété par le calcul des prédicats.

Propositions

- Les 'considérations' de la planche précédente sont appelée plutôt des 'propositions'.
Les propositions peuvent être simple (formule simple) comme par exemple ≪ le cours est inintéressant ≫ qu'on va appeler P
Elle peuvent aussi être composées de plusieurs propositions simples (formule composée) comme ≪ P et Q ≫ où Q est la proposition : ≪ le confinement est pénible ≫.

- Il convient alors de recenser les façons licites de créer des molécules : pour cela on introduit les connecteurs propositionnels [1]

Équivalence	(si et seulement si)	$\equiv$
Implication	(si ... alors ...)	$\supset$
Conjonction	(et)	$\wedge$
Disjonction	(ou inclusif = et/ou)	$\vee$
Négation	(non)	$\neg$

qui permettent donc de créer des formules composées : ≪ P et Q ≫ s'écrit $P \wedge Q$. Ces connecteurs sont *a priori* suffisant pour coder de nombreuses situations.

1. Attention, les symboles peuvent différer, voir ici

Valeur de la proposition

Exercice 1 : Coder : ≪ il est faux qu'une condition suffisante pour que "x soit un argument minimisant de f" est que "$f'(x) = 0$" ≫

- Dans l'exercice précédent, on a traduit ≪ il est faux ≫ par la négation de la proposition réputée ≪ fausse ≫ ; c'est donc qu'on affecte une valeur de vérité à une proposition : elle peut être ≪ vraie ≫ ou ≪ fausse ≫.
  La valeur de vérité d'une formule simple est choisie par celui qui la considère (soit elle est vraie, soit elle est fausse soit encore il ne le sait pas mais est prêt à considérer les deux cas.)
  La valeur de vérité d'une formule composée peut par contre être déterminée indépendamment de tout choix. Pour voir cela on peut construire des tables de vérité.

- Table de vérité des connecteurs propositionnels : A et B sont des propositions quelconques

A	$\neg A$
v	f
f	v

A	B	$A \equiv B$	$A \supset B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
v	v	v	v	v	v
v	f	f	f	f	v
f	v	f	v	f	v
f	f	v	v	f	f

Valeur de vérité des propositions 1/2

Exercice 2 : Construire les tables de vérité de $A \wedge \neg A$ puis de $A \vee \neg A$

► Lorsque qu'une formule composée a toujours une valeur de vérité vraie quelles que soient les valeurs de vérité des formules simples qui la composent, elle est inconditionnellement vraie ou inconditionnellement fausse (dans ce dernier cas sa négation est inconditionnellement vraie).
Une formule inconditionnellement vraie est dite ≪ valide ≫ et on utilise le symbole $\vDash$ pour l'exprimer. Donc $\vDash (A \wedge \neg A)$.

► Les ≪ régles de la logique ≫ se traduisent par des formules valides, entre (beaucoup d') autres

$\vDash A \vee \neg A$	tiers exclus
$\vDash (A \supset B) \equiv (\neg B \supset \neg A)$	contraposition
$\vDash (A \supset B) \equiv (\neg A \vee B)$	'$\supset$' s'exprime à partir de '$\vee$' et '$\neg$'

Ces règles, qu'on appelle plutôt théorèmes, peuvent se montrer directement avec les tables de vérité.

Exercice 3 : Vérifier que les deux dernières formules sont cohérentes entre elles.

Valeur de vérité des propositions 2/2

► De plus, ce qu'on appelle le raisonnement par l'absurde correspond à cette formule (qui est valide, comme on peut le retrouver avec une table de vérité)

$$((\neg A \supset B) \wedge (\neg A \supset \neg B)) \supset \models A$$

En effet si on souhaite démontrer par l'absurde que A est valide :
1/ on suppose que c'est $\neg A$ qui l'est et à partir de cette hypothèse $\models \neg A$
2/ on considère une proposition B (qui est à inventer en fonction du contexte)
3/ s'il est possible d'arriver à ce $\models \neg A$ implique à la fois $\models B$ et $\models \neg B$, c'est qu'on n'a pas le droit d'écrire que $\models \neg A$ et donc que $\models A$.

Exercice 4 : Montrer par l'absurde qu'on ne peut pas trouver des entiers p et q premiers entre eux tels que $p/q = \sqrt{2}$ et cela en suivant le plan précédent.

► Et finalement, les formules qui ne contiennent que des propositions simples et les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$[2] se calculent en algèbre de Boole comme ces mêmes expressions où la valeur de vérité est $v = 1$, $f = 0$ et où les connecteurs fonctionnent comme $\wedge =$ multiplication et $\vee =$ addition avec $A = 1 \supset \neg A = 0$ et vice-versa.

2. les $\supset$ peuvent se ramener à cela avec $\models (A \supset B) \equiv (\neg A \vee B)$

Prédicats

- Les propositions telles que présentées ne contiennent pas de variables. L'introduction de variables dans les propositions est une amélioration du cadre formel qui s'appelle alors le calcul des prédicats.
On ajoute de plus les quantificateurs $\forall$ (pour tout) et $\exists$ (il existe) dans la liste des symboles utilisés.

- Les prédicats ne sont pas un boulet[3] qui alourdirait encore le champ disciplinaire qu'est la logique, c'est au contraire ce qui faut pour relier ce champ aux énoncés mathématiques de la vie courante.

- Par exemple pour exprimer que le titi de titi et gros-minet est un oiseau on commence par introduire le prédicat ≪ x est un oiseau ≫ et quand on remplace la variable x par ≪ titi ≫ on obtient une proposition valide. Si on remplaçait x par ≪ gros-minet ≫ la proposition ne serait pas valide.

- Les prédicats permettent donc les énoncés comme : $\forall\, x \ : \ c(x) \supset O(x)$ où $c(x)$ et $O(x)$ signifient ≪ x est un canari ≫ et ≪ x est un oiseau ≫. L'énoncé signifie donc lui que tout x qui est un canari est un oiseau.
Et cela fait le lien avec les ensembles évoqués planche 3. Si $\tilde{O}$ et $\tilde{c}$ sont les ensembles des oiseaux et des canaris, l'énoncé signifie $\tilde{O} \subset \tilde{c}$.

3. Chose perçue comme un charge, une source de contraintes

Prédicats

- Les énoncés comme : $\exists\, x \;:\; c(x) \wedge B(x)$ où $B(x)$ signifie ≪ x est blanc ≫ sont également possibles.
Et cet énoncé est équivalent à $\exists\, x \in \tilde{c} \;:\; x \in \tilde{B}$, le tilde sur le nom d'un prédicat signifiant l'ensemble des arguments x du prédicat pour lesquels il est valide.

Exercice 5 : Traduire en énoncés de logique cette proposition : ≪ s'il existe des canaris jaunes alors tous les corbeaux sont noirs ≫

- On a les équivalences (p est un prédicat quelconque)

$$\neg\,(\exists\, x \;:\; p(x)) \equiv \forall\, x \;:\; \neg p(x)$$
$$\neg\,(\forall\, x \;:\; p(x)) \equiv \exists\, x \,;\; \neg p(x)$$

- Ce qu'on appelle syllogisme se réduit à

$$((\forall\, x \;:\; p(x)) \supset q(x)) \wedge p(a) \supset q(a)$$

Heuristique

- Si la logique permet d'obtenir des certitudes sur la validité d'une proposition, elle ne donne aucun moyen de générer la proposition dont la validité doit être testé.

- Et elle ne donne pas non plus d'indications sur le chemin qui conduit à cette conclusion de validité ou invalidité.

- L'heuristique est une sorte de discours[4] sur ces deux points.

- Tout cela est très intéressant, mais l'objectif de la leçon n'est pas de développer un enseignement à coloration philosophique.

- C'est plutôt la pratique qui est visée : ce qu'on va commencer pas étudier sur le « paradoxe » des corbeaux d'Hempel.

4. J'ai utilisé ce terme pour rappeler le « discours de la méthode » de Descartes qui traite exactement de ce sujet

Les corbeaux d'Hempel : le problème et une solution approximative

- On veut connaître la couleur des corbeaux ;
- On observe donc des corbeaux (en admettant qu'on sait reconnaître les corbeaux indépendamment de leur couleur) et on remarque que tous ceux qu'on a vu étaient noirs ;
- On infère alors que ≪ tous les corbeaux sont noirs ≫ ;
- Mais il y a des doutes sur la vérité de la proposition, après tout on ne peux parler que des corbeaux qu'on a vu, pas des autres ;
- Alors on essaie ceci : La proposition est affecté d'une valeur de vérité, par exemple un nombre entre 0 et 1 : pour 0 la proposition est fausse ; pour 1 elle est vraie ; et entre les deux elle est d'autant plus vraie qu'elle est proche de 1 ;
- La construction de cette valeur de vérité est que chaque fois que on voit un corbeau noir alors elle augmente ; et évidemment si on voit un corbeau blanc elle se positionne à zéro pour y rester.

Les corbeaux d'Hempel : la proposition et sa contraposée

- il y a l'ensemble C des corbeaux qui est un sous-ensemble de O celui des oiseaux et on limite les animaux considérés aux oiseaux. Parmi les oiseaux, il y a l'ensemble N des oiseaux noirs. La proposition ≪ tous les corbeaux sont noirs ≫ se traduit par

$$\forall\, x \in C \supset x \in N$$

- La contraposée de cette proposition est

$$\forall\, x \in \overline{N} \supset x \in \overline{C}$$

où $\overline{N}$ est l'ensemble des oiseaux qui ne sont pas noirs et $\overline{C}$ l'ensemble des oiseaux qui ne sont pas des corbeaux.

- Cette contraposée s'écrit en langage ordinaire : ≪ pour tout oiseau, s'il n'est pas noir alors il n'est pas un corbeau ≫

Les corbeaux d'Hempel : Le paradoxe

- On s'accorde pour accepter que la valeur de vérité d'une proposition est identique à calle de sa contraposée.

- Et cette contraposée peut également relever d'un procédé similaire à celui qui a été proposé pour la proposition $\ll$ tous les corbeaux sont noir $\gg$ $\equiv$ $\ll$ pour tout corbeau, s'il est un corbeau alors il est un oiseau noir $\gg$.

- La contraposée étant $\ll$ pour tout oiseau, s'il n'est pas noir alors il n'est pas un corbeau $\gg$, le procédé doit être quelque chose comme : si on voit un oiseau qui n'est ni noir ni un corbeau alors la valeurs de vérité de la proposition augmente.

- Et donc lorsqu'on voit un canari jaune, cela augmente la valeur de vérité de $\ll$ tous les corbeaux sont noirs. $\gg$...

- Ce résultat inacceptable est ce qu'on appelle le paradoxe de Hempel.

Les corbeaux d'Hempel : L'élément le plus faible

- Lorsqu'on arrive à un ≪ paradoxe ≫ de ce type il faut chercher l'endroit où on a commis une faute ; l'élément le plus faible dans ce qu'on a avancé.

- Ici c'est dans l'introduction d'une notion comme la valeur de vérité. Une proposition est vraie ou fausse mais elle n'est pas vraie seulement en partie, avec un ≪ degré de vraisemblance ≫ (la valeur de vérité).

- D'ailleurs on aurait de grandes difficultés pour trouver une formule de calcul précise qui augmente la valeur de vérité de la proposition ≪ tous les corbeaux sont noir ≫ chaque fois qu'on voit un corbeau noir. Et c'est un indice pour soupçonner que la notion comporte un vice : ici celui de conduire à un ≪ paradoxe ≫ logique.

Les corbeaux d'Hempel : ce qu'ils nous ont appris

- On ne peut pas impunément s'appuyer sur une notion comme la valeur de vérité pour valider une proposition comme « tous les corbeaux sont noirs » ;

- Et pourtant celle-ci apparaissait comme inoffensive avant qu'on soit arrivé au « paradoxe » qui invalide son existence...

- Ceci dit, ce « degré de vraisemblance » ou « valeur de vérité » peut être redéfini dans un cadre qui permet d'éviter le genre de biais logique que constitue le paradoxe des corbeaux de Hempel. C'est toute la problématique de notamment l'inférence statistique !

Exercice 6 : Formules surprenantes[5]

- Montrer que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^n$$

Quelle formule surprenante obtient-on en choisissant la valeur $x = 1$? Où se situe l'erreur ?

- Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, n! \, x^{n+1}$ est solution de

$$x^2 \, f' + f = x$$

Montrer que $f(x) = \exp^{1/x} \int_0^x \left(\frac{\exp^{-1/y}}{y} \right) dy$ est la solution unique telle que $f(0) = 0$.
Expliquer ce qui pose problème dans ceci.

5. Abrégé d'histoire de mathématiques, Dieudonné, Hermann 1986, p. 23

Retour sur l'Heuristique

- Nous n'avons pas vraiment traité d'heuristique dans ce qui vient d'être fait, mais plutôt du danger qu'il y a de prendre pour argent comptant l'existence d'objets pour en tirer des conséquences.

- Et finalement tout ceci était était contenu dans la table de vérité de l'implication : du faux peut sortir à la fois du vrai et du faux.
  Dans ce que nous avons fait, le faux posé comme hypothèse était l'existence d'objets qui n'existent pas et nous somme arrivé à des conclusions fausses.

- Mais le travail effectué autour de cela n'est pas entièrement négatif. Nous avons obtenu une matière qui permet de reformuler les problèmes de départ.

- Et c'est précisémment là que se situe une des premières règles d'heuristique : il ne faut pas hésiter à partir d'hypothèses peut-être fausses pour essayer d'obtenir des résultats !

  mais il faut cepandant le faire en toute connaissance de cause. C'est une forme du raisonnement spéculatif.