Modélisation/Calculs scientifiques - GME5

TD 3 et 4

EDO – Modèle proies-prédateurs

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

6 avril 2014

Modèle proie-prédateur

≪ *Parmi les biologues [sic] et les physiciens d'une grande renommée jouissent les travaux de Lokta (1923) et de Volterra (1926), d'après lesquels la destruction d'une espèce (la victime) par l'autre (l'agresseur, le parasite) peut amener des fluctuations périodiques de la population des deux espèces. Cette théorie est fondée sur certaines hypothèses des plus simples concernant l'action réciproque des agresseurs (N_2) et des victimes (N_1) qui ont été formulées comme une équation différentielle*

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= b_1\ N_1 - k_1\ N_1\ N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= k_2\ N_1\ N_2 - d_2\ N_2 \end{aligned}$$

Ici $b_1\ N_1$ désigne l'accroissement géométrique des victimes, $k_1\ N_1\ N_2$ la destruction des victimes par les agresseurs et $d_2\ N_2$ la mortalité de ceux-ci. ≫ Vérification expérimentales de la théorie mathématique de la lutte pour la vie, G.F. Gause, Hermann, Paris, 1935.

Il s'agit de vérifier cela.

Portrait de phase et intégration via outil intégré

Question 1 Tracer le portrait de phase avec la fonction (N_1 et N_2 sont devenus x et y)

```
load("plotdf");
plotdf([b1*x-k1*x*y,k2*x*y-d2*y],[x,y],
[parameters,"b1=1,k1=1,d2=1,k2=1"],
[tstep,0.1],[nsteps,100],
[direction,forward],[x,0,10],[y,0,10])$
```

Comprendre chaque argument de la fonction plotdf. Que représentent les vecteurs tracés ? Que valent-ils en $x = 0$ puis en $y = 0$?

Question 2 L'intégration à partir d'une position initiale de ce système autonome se lance en cliquant sur cette position dans la fenêtre. Quelle est la forme des solutions ? Attention, il ne faut pas prêter trop d'attention à la valeur du pas de temps *tstep* qui ne semble pas actif et fixé à 0.1 quoi qu'on fasse ; plutôt jouer sur *nsteps* le nombre de pas de temps.

Euler explicite et implicite

Question 3 Dans le cas $b1 = k1 = d2 = k2 = 1$ et à partir de la position initiale $(4, 1)$, intégrer directement le système en utilisant la méthode d'Euler explicite. Comment varie la solution en fonction du pas de temps en choisissant l'instant initial à 0 et final à 7 ? Comment varie cette solution sur des temps longs (temps final à 20 et essayer un nombre de pas de 1000 puis 1000) ?

Question 4 Mêmes questions avec la méthode d'Euler implicite. On donne la fonction qui effectue un pas

```
UnPasEulerImplicite(x0,h):=block([x:x0[1],y:x0[2]],[
((h+1)*sqrt(h^2*y^2+(2*h^2*x-2*h^3+2*h)*y+h^2*x^2+(2*h^3-2*h)*x+h^4-2*h^2+1)
 +(-h^2-h)*y+(h^2+h)*x+h^3+h^2-h-1)
 /(h*sqrt(h^2*y^2+(2*h^2*x-2*h^3+2*h)*y+h^2*x^2+(2*h^3-2*h)*x+h^4-2*h^2+1)
  +h^2*y+h^2*x+h^3-h),
(sqrt(h^2*y^2+(2*h^2*x-2*h^3+2*h)*y+h^2*x^2+(2*h^3-2*h)*x+h^4-2*h^2+1)
 +h*y+h*x+h^2-1)
 /(2*h^2+2*h)]);
UPEI:UnPasEulerImplicite;
```

Cranck-Nicholson et La Runge-Kutta

Question 5 Mêmes questions avec la méthode de Crank-Nicholson. On donne la fonction qui effectue un pas

```
UnPasCrankNicholson(x0,h):=block([x:x0[1],y:x0[2]],[
-((h*x-2*h-4)*sqrt(4*h^2*y^2+(8*h^2*x-4*h^3+16*h)*y+4*h^2*x^2+(4*h^3-16*h)*x
                              +h^4-8*h^2+16)
 +(2*h^2*x+4*h^2+8*h)*y+2*h^2*x^2+(h^3-4*h^2-12*h)*x-2*h^3-4*h^2+8*h+16)
 /(h*sqrt(4*h^2*y^2+(8*h^2*x-4*h^3+16*h)*y+4*h^2*x^2+(4*h^3-16*h)*x+h^4-8*h^2
                     +16)
  +2*h^2*y+2*h^2*x+h^3-4*h),
(sqrt(4*h^2*y^2+(8*h^2*x-4*h^3+16*h)*y+4*h^2*x^2+(4*h^3-16*h)*x+h^4-8*h^2+16)
 -h^2*y+2*h*x+h^2-4)
 /(h^2+2*h)
]);
UPCN:UnPasCrankNicholson;
```

Question 6 Mêmes questions avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 ordinaire (on pourra utiliser "rk" du package "dynamics").

Dormand et Prince

Question 7 Mêmes questions avec la méthode emboîté de Dormand et Prince d'ordre 5 et 4.

Question 8 Comparer la méthode dopri54 avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Combien faut-il prendre de pas de temps dans Runge-Kutta d'ordre 4 pour obtenir une précision analogue à celle de dopri54 (tolérance 10^{-5} en x et y) ?