

Modélisation/Calculs scientifiques - GME5



TD 3 et 4



Intégration numérique et résolution d'équation

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

25 mars 2014

Loi de Gauss-Laplace et loi de Gauss-Laplace inverse

$$\mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp^{-t^2/2} dt$$

est la probabilité pour qu'une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite soit inférieure à une valeur x . On propose de calculer $\mathbb{P}(x)$ numériquement ; puis, toujours numériquement, de résoudre par rapport à x l'équation $\mathbb{P}(X < x) = p$.

Question 1 Est-il possible de calculer une intégrale généralisée (i.e. dont l'une des bornes est infinie) par la méthode de Gauss-Legendre ?

Question 2 Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$ et en déduire que le calcul de

$$f(x) = \int_0^x \exp^{-t^2/2} dt$$

suffit pour obtenir celui de $\mathbb{P}(X < x)$.

Utilisation « manuelle » des tableaux de Gauss-Legendre

Question 3 En utilisant les tableaux donnés, calculer $f(1.96)$, dont la valeur exacte est 1.190653... (où on a donné les 6 premières décimales) avec la méthode de Gauss-Legendre d'ordre 1 ; d'ordre 3 ; d'ordre 5 et d'ordre 7.

à l'ordre : 1 3 5 7

f(1.96) =

x_n		0
w_n		2

x_n		0	± 0.77459666924148
w_n		0.888888888888889	0.555555555555556

x_n		± 0.5773502691896
w_n		1

x_n		± 0.8611363115940	± 0.3399810435849
w_n		.34785484513745	0.65214515486255

Algorithme et script de calcul

Question 4 Écrire l'algorithme de calcul de $\mathbb{P}(x < X)$ en considérant qu'on dispose d'une fonction qui donne les points du support et les poids de Gauss-Laplace à n'importe quel ordre.

Question 5 Voici la fonction écrite en langage de Maxima qui réalise la tâche de la question précédente.

```
load(orthopoly);
support_et_poids_de_gauss_legendre(n):=
/* renvoie le tableau [[x1,w1],...,[xn,wn]] composés des tableaux
[points de support,poids].
adaptation de gauleg--Rybycki du numerical recipes */
block([polynome,derivee,racines,poids,x,precision:10^(-15)],
polynome:legendre_p(n,x),derivee:diff(polynome,x),
racines:realroots(polynome,precision),
map(lambda([u],ev(float([x,2/((1-x^2)*derivee^2)]),u)),racines)
);
```

Utiliser cette fonction pour réaliser une fonction correspondant à l'algorithme de la question précédente.

Inversion de la loi de Gauss-Laplace

Question 6 On veut résoudre l'équation $\mathbb{P}(x < X) = y$ par rapport à x pour trouver la loi de Gauss-Laplace inverse. Écrire une approximation à l'ordre 1 de cette équation autour du point x_0

Question 8 En déduire l'algorithme de Newton pour la résolution de cette équation.

Question 9 Écrire la fonction maxima qui réalise cet algorithme