Correction examen 2018

G. Vinsard

30 avril 2019

Examen 2018 corrigé. Attention, c'est pour aider à reviser. L'examen de 2019 ne sera pas nécessairement quasi-identique à celui-ci.

Question 1 On donne les fonctions

$$g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{1}{1+x+x^2} - x \end{array} \qquad \text{et} \quad G \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} x^3 - y^3 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix} \end{array}$$

pour lesquelles il existe une solution unique aux équations $g(x) = 0$ et $G(x, y) = 0$.

a) [1 points] Appliquer au problème de la recherche de la solution de $g(x) = 0$ la formule de la méthode de Newton permettant le passage d'un x_0 (quelconque) à x_1.

Ce qu'on doit savoir

$$g(x) = g(x_0 + (x - x_0)) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - g(x_0)/g(x_0')$$

pour l'appliquer comme

$$x_1 = x_0 - \frac{\dfrac{1}{1 + x_0 + x_0^2} - x_0}{\frac{-(1+2\,x_0)}{(1+x_0+x_0^2)^2}} = \text{ peu importe} \ldots$$

b) [2 points] Appliquer au problème de la recherche de la solution de $G(x, y) = 0$ la formule de la méthode de Newton permettant le passage d'un (x_0, y_0) (quelconque) à (x_1, y_1).

Ce qu'on doit savoir

$$G(x) = G(X_0 + (X - X_0)) \approx G(X_0) + \vec{\nabla} G(X_0)\;(X - X_0) \Rightarrow X_1 \text{ sol de } \vec{\nabla} G(X_0)\;(X_1 - X_0) + G(X_0) = 0$$

pour l'appliquer comme

$$\begin{pmatrix} 3\,x_0^2 & -3\,y_0^2 \\ 3\,x_0^2 & 3\,y_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0^3 - y_0^3 \\ x_0^3 + y_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(peu importe la résolution).

Question 2

c) [1 points] Calculer une approximation de l'intégrale : $I(v) = \int_0^v F(u)\; du$ où F est une fonction quelconque avec la méthode de Gauss-Legendre à deux points (poids : $w_1 = w_2 = 1$, support : $x_1 = -x_2 = 1/\sqrt{3}$)

Ce qu'on doit savoir (on pose $u = (a + b)/2 + (b - a)/2\; t$)

$$\int_a^b F(u)\; du = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 F\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\; t\right)\; dt$$

et

$$\int_{-1}^1 g(t)\; dt \approx g\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

pour l'appliquer comme

$$I(v) \approx \frac{v}{2}\left(F\left(\frac{v}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + F\left(\frac{v}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)$$

d) [2 points] Calculer une approximation de l'intégrale : $T(y) = \int_0^y \frac{dv}{\sqrt{x_0^2 - 2\,I(v)}}$ avec cette même méthode.

De la même façon

$$T(y) \approx \frac{y}{2}\left(G\left(\frac{y}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + G\left(\frac{y}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)$$

où

$$G(v) = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - 2\,I(v)}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - v\,\left(F\left(\frac{v}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + F\left(\frac{v}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)}}$$

Question 3 On donne l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = \log(x+t)$ avec $x(0) = 1$ et les tableaux de Butcher suivants

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

3/8 — emboîté 1-2 — Crank-Nicholson

e) [2 points] Donner une approximation de x(h) par la méthode des 3/8 On doit savoir lire un tableau de Butcher. L'application est

$$x(h) = 1 + \frac{h}{8}\left(log(x_1^0 + t_1^0) + 3\;log(x_2^0 + t_2^0) + 3\;\log(x_3^0 + t_3^0) + \log(x_4^0 + t_4^0)\right)$$

avec

$$t_1^0 = 0\;;\; t_2^0 = h/3\;;\; t_3^0 = 2/3\;h\;;\; t_4^0 = h$$

et

$$x_1^0 = 1\;;\; x_2^0 = 1 + h/3\;\log(x_1^0 + t_1^0) = 1$$
$$x_3^0 = 1 - h/3\;\log(x_1^0 + t_1^0) + h\;\log(x_2^0 + t_2^0) = 1 + h\;\log(1 + 2/3\;h)$$
$$x_4^0 = 1 + h\;\left(\log(x_1^0 + t_1^0) - \log(x_2^0 + t_2^0) + \log(x_3^0 + t_3^0)\right) = 1 - h\;\log(1 + 2/3\;h) + h\;\log\left(1 + h\;\log(1 + 2/3\;h) + h\right)$$

f) [2 points] Donner les deux approximations de x(h) par la méthode emboîtée 1-2. Idem que pour e), en plus simple mais avec deux « lignes de b_n »

$$1\;0 \Rightarrow x(h) \approx x_0$$
$$0\;1 \Rightarrow x(h) \approx x_0 + h\;log(1 + h/2)$$

g) [2 points] Si on choisit une tolérance de ϵ et compte tenu que h est petit, donner une estimation de la valeur maximale que h peut prendre pour que le pas puisse être validé.

Le pas est validé quand la différence des deux approximations précédentes est plus petite que ϵ, soit

$$h\;\log(1 + h/2) < \epsilon$$

Si h est petit $\log(1 + h/2) \approx h/2$ et donc la valeur maximale de h pour laquelle le pas est validé est

$$h_{\max} = \sqrt{2\,\epsilon}$$

h) [2 points] Donner l'équation à partir de laquelle on peut trouver une estimation de $x(h)$ par la méthode de Crank-Nicholson.

On doit connaître la méthode de Crank-Nicholson qui conduit à

$$\frac{x(h) - 1}{h} = \log\left(\frac{x(h) + 1}{2} + \frac{h}{2}\right)$$

$x(h)$ demande la résolution de cette équation pour être trouvé.

Question 4 On souhaite trouver la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f(y) = 0$$

avec $y(0) = y_0$ et $\frac{dy}{dt}(0) = 0$ entre les instants 0 et $T > 0$

i) [2 points] Montrer que ce système se met sous la forme $\frac{dX}{dt} = F(X)$ où X est un vecteur de composantes (x, y) et F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ à déterminer.

La plus grande dérivée est la dérivée seconde de y, le vecteur X sera donc composé de y et de sa dérivée première y'

$$X = \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow X' = \begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(y) \\ y' \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(y) \\ x \end{pmatrix} \quad \text{avec les C.I} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

(où $x = y'$)

j) [2 point] Montrer que $W = \frac{x^2}{2} + \int_0^y f(u)\, du$ où x et y sont les solutions du système précédent est constant ($dW/dt = 0$).

Un calcul direct amène à

$$\frac{dW}{dt} = x\,\frac{dx}{dt} + f(y)\,\frac{dy}{dt}$$

puisque de part la question précédente $\frac{dx}{dt} = -f(y)$ et $\frac{dy}{dt} = x$,

$$\frac{dW}{dt} = -x\,f(y) + f(y)\,x = 0$$

k) [2 point] En déduire une formule d'intégration par quadrature de l'équation différentielle qui utilise les resultats de la question 2.

Si W est constant, sa valeur est fixée par les conditions initiales, soit

$$W = \frac{x^2}{2} + \int_0^y f(u)\, du = \int_0^{y_0} f(u)\, du$$

On peut alors exprimer x en fonction de y comme

$$x = \pm\sqrt{2\int_y^{y_0} f(u)\, du}$$

et injecter ce résultat dans $\frac{dy}{dt} = x$ pour obtenir

$$\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{2\int_y^{y_0} f(u)\, du}$$

C'est une équation différentielle séparable, qui s'écrit comme

$$\frac{dy}{\sqrt{2\int_y^{y_0} f(u)\, du}} = \pm\, dt$$

d'où, si $y(\tau) = z$

$$\int_0^z \frac{dy}{\sqrt{2\int_y^{y_0} f(u)\, du}} = \pm\,\tau$$