Examen – Modélisation/Calcul scientifique

ENSGSI 2AP

23 juin 2020

Il y a 16 sous-questions numérotées par des lettre. Elles sont de difficultés inégales. Chacun d'entre elle vaut a minima 1 point. Et les 4 points restant seront affectés en fonction de la qualité des explications données dans les questions.

Exercice 1

On veut résoudre l'équation (p est un paramètre)

$$p\ cos(x) = x$$

a) Écrire l'itération de Newton à partir d'un point initial x_0.

b) Donner l'intervalle dans lequel p doit être pour que cette itération soit toujours possible.

Exercice 2

On veut résoudre le système d'équations

$$\cos(x) = y\ p\ \sin(y) = x$$

c) Écrire l'itération de Newton à partir d'un point initial (x_0, y_0).

d) Donner l'intervalle dans lequel p doit être pour que cette itération soit toujours possible.

Exercice 3

On veut calculer (log = logarithme népérien, mais ça n'a pas d'importance)

$$I = \int_2^3 e^{-x}\ log(x)\ dx$$

e) Donner la formule de calcul de l'approximation de I qui correspond à la méthode de Gaus-Legendre à 3 points

support	$-\sqrt{3}/\sqrt{5}$	0	$\sqrt{3}/\sqrt{5}$
poids	$5/9$	$8/9$	$5/9$

Exercice 4

On veut calculer

$$I = \int_0^1 e^{-x}\ log(x)\ dx$$

et pour cela on sait qu'une primitive de $log(x)$ est $x\ log(x) - x$.

f) Montrer qu'on peut réécrire I comme

$$I = I_1 + I_2$$

avec I_1 une intégrale possédant une singularité en 0 mais dont l'intégrant possède une primitive ; et I_2 une intégrale n'ayant pas de singularité en 0 mais pas non plus de primitive bien connue.

g) Donner alors une formule permettant le calcul d'une approximation de I (avec Gauss-Legendre à 3 points).

Exercice 5

On veut calculer la solution de l'EDO

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x^2+t}\ ;\ x(0) = 1$$

h) On décide de calculer numériquement les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \ldots$ correspondant aux temps $0, h, \ldots, n\ h, (n+1)\ h, \ldots$ avec la méthode (de Runge-Kutta) de Heun d'ordre 3. Écrire l'itération qui permet de trouver x_{n+1} en fonction de x_n (et de h).

i) On souhaite toujours calculer numériquement les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ correspondant aux temps $0, h, \ldots, n\ h$ mais cette fois-ci on veut utiliser la méthode d'Euler implicite. Donner l'équation qui permet de trouver x_{n+1} en fonction de x_n (et de h) (même si c'est possible dans ce cas, ne pas chercher à la résoudre).

j) Le calcul des $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ ayant été fait par une des méthodes précédentes, on souhaite connaître les $\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \ldots$ qui approximent les $\frac{dx}{dt}(0), \frac{dx}{dt}(h), \ldots, \frac{dx}{dt}(n\ h), \ldots$. Donnez leur expression à partir des $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$.

k) On veut aller plus loin encore et connaître les $\ddot{x}_0, \ddot{x}_1, \ldots, \ddot{x}_n, \ldots$ qui approximent les $\frac{d^2x}{dt^2}(0), \frac{d^2x}{dt^2}(h), \ldots, \frac{d^2x}{dt^2}(n\ h), \ldots$. Trouver une méthode pour cela.

Exercice 6

On veut calculer la solution de l'EDO du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + x = 0\ ;\ x(0) = 0\ ;\ \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

l) Mettre cette EDO sous une forme qui permet de la résoudre avec une méthode de Runge-Kutta.

m) Calculer une approximation de $x(h)$ et $\dfrac{dx}{dt}(h)$ avec un seul pas de la méthode d'Euler explicite.

n) On ajoute un second membre à l'EDO précédente qui devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + x + cost = 0\ ;\ x(0) = 0\ ;\ \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

Modifier ce qu'il y a à modifier pour répondre dans ce cas aux question j) et k).

Exercice 7

Cet exercice est moins directement une application du cours.
On donne l'EDO du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin(x) = 0$$

o) Montrer que

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \cos x$$

est telle que, si x est solution de l'EDO,

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

p) En déduire un moyen de calcul de la solution de l'EDO qui ne nécessite qu'un calcul d'intégrale : on se limitera au cas $\dfrac{dx}{dt} \geq 0$ avec comme conditions initiales $x(0) = -1$ et $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$.