Modélisation/Calculs scientifiques - GME5

Leçon 5

Méthodes de Runge-Kutta implicites
Et problème de synthèse

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

1er juin 2015

Objectifs

- Compléter la leçon précédente par la description des méthodes implicites ;
- Préciser les points importants de l'enseignement par un problème de synthèse.

Méthode d'Euler implicite

- Si $X \quad : \quad \mathbb{R}^N \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^N$ est solution de l'EDO

$$X' = f(X) \text{ avec } X(t_0) = X_0$$

avec $F \quad : \quad \mathbb{R}^N \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^N$ et que $t_1, \ldots, t_n$ est une suite de temps successifs, il s'agit de trouver des approximations $x_1, \ldots, x_n$ de $X(t_1), \ldots, X(t_N)$.

- La méthode d'Euler implicite

$$X_{n+1} = X_n + (t_{n+1} - t_n)\, F(X_{n+1})$$

fournit de telles approximations au prix de la résolution du système d'équation *a priori* non linéaire (qui peut être faite avec la méthode de Newton pour $t_{n+1} - t_n$ suffisammment petit) mais elle n'est que d'ordre 1 (i.e. l'approximation X_{n+1} et la solution exacte $X(t_{n+a})$ ne coïncident qu'à l'ordre 1 dans un développement de taylor par rapport à $t_{n+1} - t_n$).

Méthode de Cranck-Nicholson

- La méthode de Cranck-Nicholson

$$X_{n+1} = X_n + (t_{n+1} - t_n)\, F\left(\frac{X_{n+1} + X_n}{2}\right)$$

est d'ordre 2.

- On peut remarquer que comme les méthodes d'Euler explicite implicite, elle s'inscrit dans le cadre des méthodes de Runge-Kutta à 1 étage :

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Cranck-Nicholson [1] Euler implicite Euler explicite

1. Pour faire le lien, voir que $x_{n|1} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$

Méthodes de Runge-Kutta implicites à plus de 1 étage

- Les méthodes P étages ont la forme générale

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_p & a_{P1} & \dots & a_{pp} \\ \hline & b_1 & \dots & b_P \end{array}$$

- Il y a

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

SDIRK (ordre 3) — Hammer et Hollingsworth (ordre 4)

et encore d'autres qui sont expliquées dans le livre de Hairer et al : ≪ Solving Ordinary Differential Equations ≫, t1, Springer, 1992.

L'intérêt des méthodes de Runge-Kutta implicites

- L'intérêt majeur des méthodes de Runge-Kutta implicite est qu'elle rendent possible des résolution numérique de problèmes hamiltoniens ;

- Un problème hamiltonien comporte une équation différentielle qui possède une intégrale première, c'est à dire une quantité qui see conserve au cours de l'évolution en temps : typiquement l'oscillation d'une masse liées à un ressort, soit

$$\ddot{x} + \omega^2\, x = 0$$

ce qui peut être mis sous la forme $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2\, x \end{pmatrix}$. On remarque que la quantité

$$E = \frac{1}{2}\,\omega^2\, x^2 + \frac{1}{2}\, v^2$$

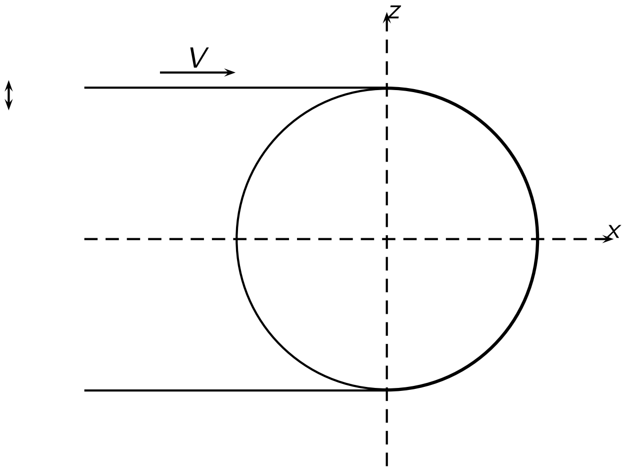
est telle que que $\dfrac{dE}{dt} = 0$; E est une intégrale première.

Calcul du problème masse–ressort

voir script

- L'utilisation de Dormand et Prince 5-4 montre que la quantité E ne se conserve pas
- L'itération de Hammer et Hollingsworth est bien d'ordre 4
- Cette itération conserve E ; ce qui est le résultat cherché
- On obtient donc une solution numérique précise à l'ordre 4 et qui conserve E

Pb synthèse : Tapis roulant



Position du problème

- Un objet assimilable à une masse ponctuelle m est amené par un tapis roulant (de dimension transversale négligeable) entrainé par une roue de rayon R et de vitesse angulaire Ω. On suppose que $\Omega^2\ R/g <= 1$ où g est l'accélération de la pesanteur.
  - Calculer la position angulaire à laquelle il quitte le tapis ;
  - Donner les EDOs qui permet le calcul de sa trajectoire en négligeant les frottements visqueux et préciser les conditions initiales ;
  - Résoudre ces EDOs dans le cas $\Omega^2\ R/g = 1$;
  - Donner l'expression de la trajectoire de l'objet dans ce cas ;
  - Trouver la distance parcourue dans la direction longitudinale de déplacement du tapis quand l'objet passe au droit de l'axe de la roue ;
  - inversement trouver la vitesse angulaire lorsque la distance précédente est connue.

Résolution d'équation

- Les équations deviennent bien plus compliquées quand $\Omega^2\, R/g < 1$; l'expression de l'équation de la trajectoire s'écrit

$$z = -\frac{g\left(g\,R\,\sqrt{1-\frac{\Omega^4\,R^2}{g^2}}-g\,x\right)^2}{2\,\Omega^6\,R^4}+\frac{\sqrt{1-\frac{\Omega^4\,R^2}{g^2}}\left(g\,R\,\sqrt{1-\frac{\Omega^4\,R^2}{g^2}}-g\,x\right)}{\Omega^2\,R}+\frac{\Omega^2\,R^2}{g}$$

Écrire la formule d'itération de Newton qui permet de trouver la vitesse angulaire lorsque la distance parcourue en x pour $z = 0$ est connue.
Comment choisir une valeur initiale pour ces itérations ?

Intégration numérique

- Des mesures permettent d'affirmer que la distance parcourue précédente varie uniformément entre x_1 et x_2. Et alors si Ω est considérée comme fonction de x via la formule précédente, la vitesse angulaire moyenne est

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \Omega(x)\, dx$$

Écrire l'algorithme de calcul effectif de $\overline{\Omega}$ avec une formule de Gauss-Legendre à 3 points.

Prise en compte des frottements

- En plus de la pesanteur, l'objet est soumis à une force de frottement de coefficient k qui dépend de sa vitesse $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$ interdisant ainsi une intégration analytique.
  - Réécrire les EDOs en prenant en compte cette circonstance ;
  - Écrire un pas du calcul numérique de x et z avec la méthode de Runge-Kutta.
  - On utilise en fait une méthode emboîtée qui délivre deux approximations à des ordre différents de $x(t)$ et $z(t)$; décrire la stratégie de choix des pas de temps.

Bonus

- On donne l'équation différentielle

$$y^4 + y + t = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y^3(0) = 0$$

  - la mettre sous forme autonome et adaptée à une méthode de Runge-Kutta explicite ;
  - donner un pas d'intégration par la méthode d'Euler implicite