Examen : Mathématiques et Informatiques Appliquées pour l'Ingénieur, ENSGSI, 1° Année — 9 novembre 2022

Tous documents autorisés. 2.5 points par question (barème de 22.5). L'adéquation des réponses aux questions posées, le soin et la qualité de la rédaction seront pris en compte.

Géométrie : On donne 4 points de l'espace $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ non coplanaires et on construit sur ces points un tétraèdre D par la représention paramétrique

$$\vec{x}_1 + (1-q)\ (1-r)\ s\,\vec{x}_{21} + q\,s\,\vec{x}_{31} + (1-q)\ r\ s\,\vec{x}_{41} \qquad (1)$$

avec

$$0 < q < 1\ ;\ 0 < r < 1\ ;\ 0 < s < 1 \qquad (2)$$

et où on a posé $\vec{x}_{21} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$; $\vec{x}_{31} = \vec{x}_3 - \vec{x}_1$; $\vec{x}_{41} = \vec{x}_4 - \vec{x}_1$

1) Dessiner le tétraèdre en indiquant où sont situés les sommets $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$. Dessiner le cube dans lequel sont situés les paramètres (q, r, s) et indiquer à quelles zones du cube correspondent les $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3,\ \vec{x}_4$.
Expliquer alors pourquoi le tétraèdre est décrit comme image du cube ouvert (les inégalités strictes $<$ de (2)) par l'application qui à (q, r, s) associe le vecteur (1) plutôt que comme le cube qui serait défini par des inégalités larges $\leq$.

2) Calculer le volume V du tétraèdre. Que vaut-il quand $\vec{x}_1 = \vec{0}$, $\vec{x}_2 = L\,\vec{k}_x$, $\vec{x}_3 = L\,\vec{k}_y$, $\vec{x}_4 = L\,\vec{k}_z$ (où $\left(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z\right)$ forment une base orthonormée).

3) Le bord du tétraèdre est composé de 4 facettes. Donner la représentation paramétrique de chacune des facettes ainsi que sa normale extérieure. Pour éviter trop de calculs, il est intéressant de remarquer que ces facettes sont les triangles opposés aux sommets : par exemple, pour $\vec{x}_1$, c'est le triangle $(\vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ qui est paramétré par $q\ \vec{x}_3 + (1-q)\ \ (r\,\vec{x}_4 + (1-r)\ \vec{x}_2)$ (on fait $s = 1$) qui se met sous la forme $\vec{x}_2\ +\ (r\ (1-q)\ \vec{x}_{42} + q\,\vec{x}_{32})$ avec $\vec{x}_{32} = \vec{x}_3 - \vec{x}_2$ et $\vec{x}_{42} = \vec{x}_4 - \vec{x}_2$.

4) On donne un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = z\,\vec{k}_z + y\,\vec{k}_y + x\,\vec{k}_x$$

Calculer $\int_{\partial D} \vec{n} \cdot \vec{v}\,dS$ en passant par la formule de Green-Ostrogradski.
Calculer $\int_{\partial D} \vec{n} \cdot \vec{v}\,dS$ directement. Au moins sur la facette décrite question

Équations aux Dérivées Partielles : On considère le problème

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \alpha\,\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0 \ \text{ pour }\ z \in \mathbb{R}\ \text{ et }\ t > 0 \qquad (3)$$

avec $\lim_{z \to -\infty} c\,(t,z) = \lim_{z \to \infty} c\,(t,z) = 0$ et $c\,(t=0,z) = \frac{Q}{\delta\,\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{4\,\delta^2}}$

5) Vérifier que $c\,(t,z) = \frac{A}{\sqrt{(B\,t+\delta^2)}}\,e^{-\frac{z^2}{4\,(B\,t+\delta^2)}}$ est solution pour des valeurs de A et B qui sont à préciser. (les étapes de calcul doivent être données).

6) On pose
$q\,(t) = \int_{-L}^{L} c\,(t,z)\ dz$ et $\varphi\,(t) = \alpha\ \left(\frac{\partial c}{\partial z}\,(t, z=-L) - \frac{\partial c}{\partial z}\,(t, z=L)\right)$
Montrer sur l'expression obtenue en 5) que $\varphi\,(t) + \frac{dq}{dt} = 0$.
Montrer directement ce résultat à partir de l'EDP (3).
En déduire que $\int_{-\infty}^{\infty} c\,(t,z)\ dz =$ Constante.

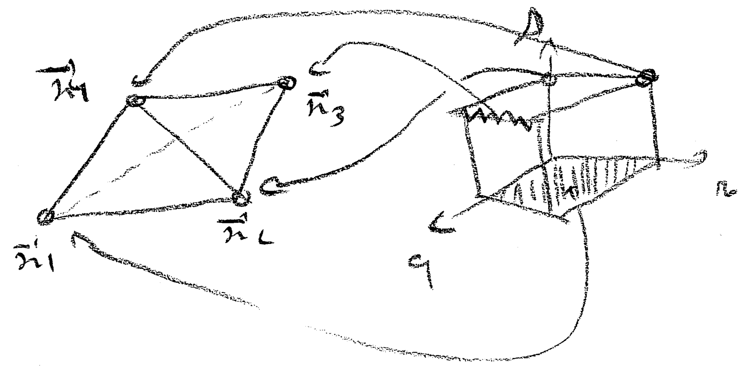
7) On note $\tilde{c}\,(z) = \int_0^{\infty} c\,(t,z)\ e^{-P\,t}\ dt$ la transformée de Laplace de c. Donner l'équation différentielle dont $\tilde{c}$ est solution (à partir de (3)).

8) Utiliser cette équation différentielle (sans la résoudre) pour calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}\,(z)\ dz$.
Retrouver alors (par transformation de Laplace inverse) que $\int_{-\infty}^{\infty} c\,(t,z)\ dz =$ Constante.

Question de cours :

9) Donner un exemple de domaine connexe, pas simplement connexe comportant un trou et une boucle. Faire un dessin au besoin.

1-



$$\vec{X}(q,r,s) = \vec{x}_1 + (1-q)(1-r)s\,\vec{x}_{21} + qs\,\vec{x}_{31} + (1-q)rs\,\vec{x}_{41}$$

$s=0 \Rightarrow \vec{X} = \vec{x}_1$

$s=1,\ q=0, r=0 \Rightarrow \vec{X} = \vec{x}_2$

$q=1,\ s=1 \Rightarrow \vec{X} = \vec{x}_3$

$q=0,\ r=1, s=1 \Rightarrow \vec{X} = \vec{x}_4$

l'application $X : \mathbb{R}^3 \to E_3$, $(q,r,s) \to \vec{X}(q,r,s)$ n'est injective que sur le cube ouvert.

2- $V = \int_0^1 dq \int_0^1 dr \int_0^1 ds\ (\partial_q \vec{X}, \partial_r \vec{X}, \partial_s \vec{X})$

$$\left|\begin{array}{l} \partial_q \vec{X} = s\left(-(1-r)\vec{x}_{21} + \vec{x}_{31} - r\,\vec{x}_{41}\right) \\ \partial_r \vec{X} = (1-q)\,s\left(-\vec{x}_{21} + \vec{x}_{41}\right) \\ \partial_s \vec{X} = (1-q)(1-r)\,\vec{x}_{21} + q\,\vec{x}_{31} + (1-q)r\,\vec{x}_{41} = (1-q)r\left(-\vec{x}_{21} + \vec{x}_{41}\right) + \left((1-q)\vec{x}_{21} + q\,\vec{x}_{31}\right) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \partial_r \vec{X} \wedge \partial_s \vec{X} &= (1-q)\,s\,(-\vec{x}_{21} + \vec{x}_{41}) \wedge \left((1-q)\vec{x}_{21} + q\,\vec{x}_{31}\right) \\ &= (1-q)\,s\left(-q(\vec{x}_{21} \wedge \vec{x}_{31}) + (1-q)(\vec{x}_{41} \wedge \vec{x}_{21}) + q(\vec{x}_{41} \wedge \vec{x}_{31})\right) \\ &= (1-q)\,s\left(-q(\vec{x}_{31} \wedge \vec{x}_{41}) + (1-q)(\vec{x}_{41} \wedge \vec{x}_{21}) - q(\vec{x}_{21} \wedge \vec{x}_{31})\right) \end{aligned}$$

or $\partial_q \vec{X} = s\left(-(1-r)\,\vec{x}_{21} + \vec{x}_{31} - r\,\vec{x}_{41}\right)$

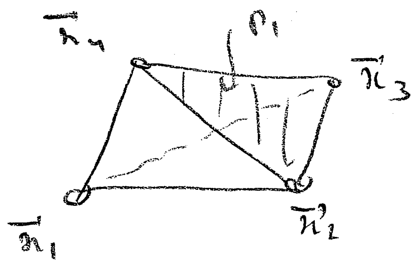
$$\rightarrow (\partial_r \vec{X}, \partial_s \vec{X}, \partial_q \vec{X}) = (1-q)s^2\,(\underbrace{q(1-r) + 1 - q + qr}_{=1})\,(\vec{x}_{21}, \vec{x}_{31}, \vec{x}_{41})$$

$$= (1-q)s^2\,(\vec{x}_{21}, \vec{x}_{31}, \vec{x}_{41})$$

$$V = \underbrace{\int_0^1 dq \int_0^1 dp \int_0^1 ds\,(1-q)s^2}_{=1/6}\,(\vec{x}_{21}, \vec{x}_{31}, \vec{x}_{41}) = \frac{1}{6}(\vec{x}_{21}, \vec{x}_{31}, \vec{x}_{41})$$

$\vec{x}_1 = \vec{0}$, $\vec{x}_2 = \vec{e}_x$, $\vec{x}_3 = \vec{e}_y$, $\vec{x}_4 = \vec{e}_z \implies V = \frac{1}{6}$

3 -



$$\left|\begin{array}{ll}
P_1 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) = \{\vec{x}_2 + r(1-q)\vec{x}_{42} + q\vec{x}_{32}\} & \swarrow s=1 \quad 0<q<1 \quad 0<r<1 \\
P_2 = (\vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_1) = \{\vec{x}_1 + q s\vec{x}_{31} + (1-q)s\vec{x}_{41}\} & \leftarrow r=1 \\
P_3 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4) = \{\vec{x}_1 + (1-r)s\vec{x}_{21} + rs\vec{x}_{41}\} & \leftarrow q=0 \\
P_4 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \{\vec{x}_1 + (1-q)s\vec{x}_{21} + qs\vec{x}_{31}\} & \leftarrow r=0
\end{array}\right.$$

pour les normales, on peut utiliser le fait que ce sont les triangles indiqués

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{x}_{32}\wedge\vec{x}_{42}}{|\vec{x}_{32}\wedge\vec{x}_{42}|},\quad \vec{n}_2 = \frac{\vec{x}_{31}\wedge\vec{x}_{41}}{|\vec{x}_{31}\wedge\vec{x}_{41}|},\quad \vec{n}_3 = \frac{\vec{x}_{21}\wedge\vec{x}_{41}}{|\vec{x}_{21}\wedge\vec{x}_{41}|},\quad \vec{n}_4 = -\frac{\vec{x}_{21}\wedge\vec{x}_{31}}{|\vec{x}_{21}\wedge\vec{x}_{31}|}$$

pour normale sortante.

mais on le retrouve avec la paramétrisation

pour P_1 $\quad \vec{X}(q,r) = \vec{x}_2 + r(1-q)\vec{x}_{42} + q\vec{x}_{32}$

$$\rightarrow \begin{array}{l} \partial_q\vec{X} = -r\vec{x}_{42} + \vec{x}_{32} \\ \partial_r\vec{X} = (1-q)\vec{x}_{42} \end{array} \rightarrow \partial_q\vec{X}\wedge\partial_r\vec{X} = (1-q)\,\vec{x}_{32}\wedge\vec{x}_{42}$$

d'où $\vec{n}_1$

4 – $\int_{\partial D} \vec{n}\cdot\vec{v}\, ds = \int_D \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, ds$

et $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 3 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial D} \vec{n}\cdot\vec{v}\, ds = \dfrac{(\vec{x}_{21}, \vec{x}_{31}, \vec{x}_{41})}{2}$

sinon $\int_{\partial D} \vec{n}\cdot\vec{v}\, ds = \int_{\Gamma_1} \vec{v}\cdot\vec{n}_1\, ds + \int_{\Gamma_2} \vec{v}\cdot\vec{n}_2\, ds + \int_{\Gamma_3} \vec{v}\cdot\vec{n}_3\, ds + \int_{\Gamma_4} \vec{v}\cdot\vec{n}_4\, ds$

<u>Sur Γ_1</u> $\quad x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = \vec{x}_2 + r(1-q)\,\vec{x}_{42} + q\,\vec{x}_{32}$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = (\vec{x}_2\cdot\vec{e}_x) + r(1-q)\,(\vec{x}_{42}\cdot\vec{e}_x) + q\,(\vec{x}_{32}\cdot\vec{e}_x) \\ y = (\vec{x}_2\cdot\vec{e}_y) + r(1-q)\,(\vec{x}_{42}\cdot\vec{e}_y) + q\,(\vec{x}_{32}\cdot\vec{e}_y) \\ z = (\vec{x}_2\cdot\vec{e}_z) + r(1-q)\,(\vec{x}_{42}\cdot\vec{e}_z) + q\,(\vec{x}_{32}\cdot\vec{e}_z) \end{array} \right.$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n}_1 = \frac{x\,\vec{e}_x\cdot(\vec{x}_{32}\wedge\vec{x}_{42}) + y\,\vec{e}_y\cdot(\vec{x}_{32}\wedge\vec{x}_{42}) + z\,\vec{e}_z\cdot(\vec{x}_{32}\wedge\vec{x}_{42})}{|\vec{x}_{32}\wedge\vec{x}_{42}|}$$

et $\int_{\Gamma_1} \vec{v}\cdot\vec{n}_1\, ds = \int_0^1 dq \int_0^1 dr\, (\vec{v}\cdot\vec{n}_1)\,(1-q)\,|\vec{x}_{32}\wedge\vec{x}_{42}|$

ok, c'est un peu long. ..

5 - $C = \dfrac{A}{\sqrt{Bt+s^2}}\, e^{-z^2/4(Bt+s^2)}$

$$\partial_t C = \left(-\frac{AB}{2(Bt+s^2)^{3/2}} + \frac{ABz^2}{4(Bt+s^2)^{5/2}} \right) e^{-z^2/4(Bt+s^2)}$$

$$\partial_z C = -\frac{A\,z}{2(Bt+s^2)^{3/2}}\, e^{-z^2/4(Bt+s^2)}$$

$$\partial^2_{zz} C = \left(-\frac{A}{2(Bt+s^2)^{3/2}} + \frac{A\,z^2}{4(Bt+s^2)^{5/2}} \right) e^{-z^2/4(Bt+s^2)}$$

$$\partial_t C - \alpha\, \partial^2_{zz} C = \left(-\frac{A\,(B-\alpha)}{2(Bt+s^2)^{3/2}} + \frac{A\,z^2\,(B-\alpha)}{4(Bt+s^2)^{5/2}} \right) e^{-z^2/4(Bt+s^2)}$$

|| $\partial_t C - \alpha\, \partial^2_{zz} C = 0$ pour $\underline{B = \alpha}$

et à $t=0$ $\quad \dfrac{A}{s}\, e^{-z^2/4s^2} = \dfrac{Q}{s\sqrt{\pi}}\, e^{-z^2/4s^2} \longrightarrow A = \dfrac{Q}{\sqrt{\pi}}$

$C = \dfrac{Q}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\alpha t+s^2}}\, e^{-z^2/4(\alpha t+s^2)}$ satisfait à l'éq. de diffusion et à la condition initiale

(on a aussi $\lim\limits_{z \to 0} C = 0$)

6 - $$\frac{dq}{dt} = \int_{-L}^{L} \partial_t c(t,z)\, dz = \int_{-L}^{L} \left(- \frac{Q\alpha}{2\sqrt{\pi}\,(\alpha t+s^2)^{3/2}} + \frac{Q\alpha z^2}{2\sqrt{\pi}\,(\alpha t+s^2)^{5/2}} e^{-z^2/4(\alpha t+s^2)} \right) dz$$

$$\int_{-L}^{L} \frac{z^2}{2(\alpha t+s^2)} e^{-z^2/4(\alpha t+s^2)}\, dz = \int_{-L}^{L} -z \cdot \underbrace{\frac{-z}{2(\alpha t+s^2)} e^{-z^2/4(\alpha t+s^2)}}_{= \partial_z\left(e^{-z^2/4(\alpha t+s^2)}\right)} dz$$

par partie $$= \left[-z\, e^{-z^2/4(\alpha t+s^2)} \right]_{-L}^{L} + \int_{-L}^{L} e^{-z^2/4(\alpha t+s^2)}\, dz$$

d'où $$\frac{dq}{dt} = \frac{Q\alpha}{2\sqrt{\pi}\,(\alpha t+s^2)^{3/2}} \left[-z\, e^{-z^2/4(\alpha t+s^2)} \right]_{-L}^{L}$$ (les intégrales s'annulent)

et $$\varphi = \frac{\alpha Q}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\alpha t+s^2}} \left(- \frac{(-L)}{2(\alpha t+s^2)} e^{-L^2/4(\alpha t+s^2)} - \frac{-L}{2(\alpha t+s^2)} e^{-L^2/4(\alpha t+s^2)} \right)$$

et donc $\frac{dq}{dt} + \varphi = 0$

Mais avec l'éq. de diffusion c'est plus facile

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{-L}^{L} c(t,z)\, dz}_{q} = \int_{-L}^{L} \partial_t c(t,z)\, dz = \int_{-L}^{L} \alpha\, \partial^2_{zz} c(t,z) = \underbrace{\left[\alpha\, \partial_z c(t,z) \right]_{-L}^{L}}_{\varphi}$$

7 - $C \to \tilde{C}$

$$\partial_t C \longrightarrow p\,\tilde{C} - C(t=0) = p\,\tilde{C}(z) - \frac{Q}{s\sqrt{\pi}} e^{-z^2/4s^2}$$

d'où $$p\,\tilde{C}(z) - \alpha \frac{d^2\tilde{C}}{dz^2}(z) = \frac{Q}{s\sqrt{\pi}} e^{-z^2/4s^2}$$

8 - $$\int_{-\infty}^{+\infty} p\,\tilde{C}(z)\,dz - \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\tilde{C}}{dz^2}(z)\,dz = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q}{s\sqrt{\pi}} e^{-z^2/4s^2}\,dz}_{= \text{cste et } \hat{m} = Q}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\tilde{C}}{dz^2}(z)\,dz = 0$: $\tilde{C} \to 0$ à l'∞

$$\downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(z)\,dz = \frac{Q}{p}$$

Comme $1 \longrightarrow \frac{1}{p}$

on obtient $$\int_{-\infty}^{+\infty} C(z)\,dz = Q$$

9 - Le pneu de vélo