

Informations : Tous documents et calculatrices autorisés – 2h00 – 2 points par question (approximativement). Le soin (de l'écriture et de la rédaction) est pris en compte.

Géométrie

Un domaine D est défini paramétriquement comme

$$D = \{ \vec{X}(r, \theta, z) = r \vec{k}_r + z \vec{k}_z \text{ avec } 0 < r < R ; 0 < \theta < \pi ; 0 < z < H \}$$

où $\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$ est un repère orthonormé de E_3 , $\vec{k}_r = \cos(\theta) \vec{k}_x + \sin \theta \vec{k}_y$ et où R et H sont des constantes positives.

Q. 1 – Le volume de D est évidemment $\pi R^2/2$, retrouver cette valeur à partir de la description paramétrique de D .

Q. 2 – Si $\rho(\vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z) = x^2$, calculer $\int_D \rho(\vec{x}) dV$.

Q. 3 – Donner une définition paramétrique du bord ∂D de D .

Q. 4 – Spécifier le champ de normales (extérieures) $\vec{n}$ sur ∂D .

Q. 5 – Si $\vec{v}(\vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z) = x^2 \vec{k}_y$ et $\Gamma_1 = \{ R \vec{k}_r + z \vec{k}_z \text{ avec } 0 < \theta < \pi ; 0 < z < H \}$, calculer $\int_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$. (on pourra exploiter la relation d'Ostrogradski).

Diffusion unidirectionnelle

Pour $\rho :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ On donne le problème

$$(t, z) \longrightarrow \rho(t, z)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0 \text{ pour } 0 < z < \infty ; 0 < t < \infty$$

$$\rho(t = 0, z) = \rho_0(z) \text{ avec } \lim_{z \rightarrow \infty} \rho_0(z) = 0$$

$$\rho(t, z = 0) = C(t) \text{ et } \lim_{z \rightarrow \infty} \rho(t, z) = 0$$

Q. 6 – Écrire l'équation différentielle ordinaire et ses conditions aux limites dont la transformée de Laplace de ρ (notée $\tilde{\rho}$) est solution. On notera $\tilde{C}$ la transformée de Laplace de C .

Q. 7 – Résoudre cette équation différentielle et exprimer $r\tilde{h}o$ en fonction de $\tilde{C}$.

Q. 8 – Dans le cas où $C(t) = Q t$, calculer $\rho(t, z)$.

Q. 9 – Même question pour $C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Q t & \text{si } 0 < t < \tau \\ Q & \tau < t \end{cases}$

Q. 10 – Pour $C(t)$ quelconque, trouver une relation entre $\tilde{\phi}_0 = -\alpha \frac{d\tilde{\rho}}{dz}(z = 0)$, $\tilde{\phi}_h = -\alpha \frac{d\tilde{\rho}}{dz}(z = h)$ et $\tilde{q} = \int_0^h \tilde{\rho}(z) dz$. Et interpréter cette relation.

Diffusion unidirectionnelle dans le cas oscillant

Le problème est cette fois

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0 \text{ pour } 0 < z < \infty ; 0 < t < \infty$$

$$\rho(t = 0, z) = \rho(t + 2\pi/\omega, z)$$

$$\rho(t, z = 0) = C_1 \sin(\omega t)$$

Q. 11 – Montrer que $\cos(\omega t - z/\delta) \exp^{-z/\delta}$ est solution de l'équation de diffusion en utilisant une condition sur δ qui est à préciser.

Q. 12 – On suppose que c'est vrai aussi pour $\cos(\omega t + z/\delta) \exp^{z/\delta}$, $\sin(\omega t - z/\delta) \exp^{-z/\delta}$, $\sin(\omega t + z/\delta) \exp^{z/\delta}$. À partir de ces 4 solutions de base, construire la solution du problème donné.

Q1- ~~*~~ $V = \frac{\pi R^2}{2} V$

$\partial_n \bar{x} = \bar{x}_n, \partial_6 \bar{x} = n \bar{x}_6, \partial_3 \bar{x} = \bar{x}_3$

$(\bar{x}_6 = -n \sin \theta \bar{x}_n + \cos \theta \bar{x}_y)$

$\int_D dV = \int_0^H \int_0^\pi \int_0^R d\theta \int_0^R d\phi \int_0^R dr \left(\frac{\partial_n \bar{x} \partial_6 \bar{x} \partial_3 \bar{x}}{r} \right) = R$

$= \frac{\pi H R^2}{2}$

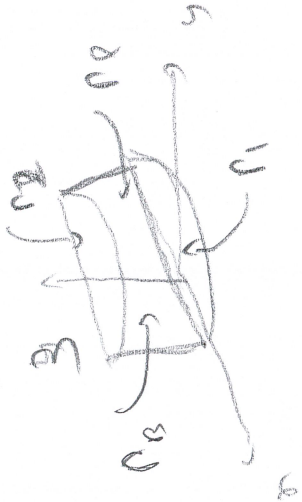
Q2- $r = n \cos \theta \rightarrow \rho(r, \theta, \phi) = n^2 \cos^2 \theta$

$\int_0^R \rho dV = \int_0^H \int_0^\pi \int_0^R d\theta \int_0^R d\phi \int_0^R dr n^2 \cos^2 \theta$

avec $\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}, \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta = 0$

on trouve

$\int_D \rho dV = \frac{\pi H R^2}{8}$



Q3-

$P_1 = \{ n \bar{x}_n \text{ avec } 0 < n < R, 0 < \theta < \pi \}$
 $P_2 = \{ n \bar{x}_n + H \bar{x}_3 \text{ avec } \frac{\text{idem}}{\text{idem}} \}$
 $P_2 = \{ R \bar{x}_n + 3 \bar{x}_3 \text{ avec } 0 < \theta < H, 0 < \theta < \pi \}$
 $P_3 = \{ n \bar{x}_n + 3 \bar{x}_3 \text{ avec } -R < n < R, 0 < \theta < H \}$

Q4-

$\sum P_1 : \bar{x} = n \bar{x}_n \rightarrow \partial_n \bar{x} = \bar{x}_n, \partial_6 \bar{x} = n \bar{x}_6$

$d'x \bar{w}_1 = \frac{\partial_n \bar{x} \times \partial_6 \bar{x}}{|\partial_n \bar{x} \times \partial_6 \bar{x}|} = \bar{x}_3$

mais c'est le signe opposé parce que le normal n'est pas orienté $\rightarrow \bar{w}_1 = -\bar{x}_3$

(cf. dernier)

$\sum P_1 \text{ idem } \bar{w}_1 = + \bar{x}_3$

$\sum P_2 \bar{x} = n \bar{x}_n + 3 \bar{x}_3 \rightarrow \partial_6 \bar{x} = n \bar{x}_6$

$\partial_3 \bar{x} = \bar{x}_3 \text{ et } \bar{w}_2 = \bar{x}_n$

$\sum P_3 \bar{w}_3 = - \bar{x}_y \quad \left| \begin{array}{c} \bar{x}_3 \\ - \bar{x}_3 \\ \bar{x}_n \\ - \bar{x}_y \end{array} \right| \begin{array}{c} \sum P_2 \\ \sum P_1 \\ \sum P_2 \\ \sum P_3 \end{array}$

Q5 - directement

$$\vec{v} = \alpha^2 \vec{e}_y$$

$$\int_{\rho_0} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^H d_3 \int_0^\pi d\theta (\vec{v} \cdot \partial_\theta \vec{x}, \partial_3 \vec{x})$$

$$= \int_0^H d_3 \int_0^\pi d\theta \, \alpha^2 R(\vec{e}_y, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3)$$

$$\vec{e}_\theta \times \vec{e}_3 = \vec{e}_r, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_r = \sin \theta$$

$$\alpha^2 R^2 = R^2 \cos^2 \theta \quad (\text{sin } \theta \, d\theta)$$

$$\alpha^2 \omega \int_0^H \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^H d_3 \int_0^\pi d\theta \, R^3 \sin \theta \, d\theta$$

$$= \frac{2}{3} H R^3$$

Avec Orthogonality

$$\int_0 \vec{v} \cdot \vec{v} \, dV = \int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$= \int_{\rho_1} \alpha^2 \vec{e}_y \cdot (-\vec{e}_3) \, dS \rightarrow 0$$

$$+ \int_{\rho_2} \alpha^2 \vec{e}_y \cdot (\vec{e}_3) \, dS \rightarrow 0$$

$$+ \int_{\rho_0} \alpha^2 \vec{e}_y \cdot \vec{e}_r \, dS \rightarrow \text{ce qu'on cherche}$$

$$+ \int_{\rho_3} \alpha^2 \vec{e}_y \cdot (-\vec{e}_y) \, dS \rightarrow -\frac{2}{3} H R^2$$

$$\text{comme } \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\partial_{x^0} + \partial_{y^1} + \partial_{z^2} = 0)$$

$$\alpha^2 = \int_0 \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{2}{3} H R^2$$

Q6 - * je n'aurais pas dû mettre

$$P(t=0,3) = P_0(3) \quad \text{mais } \underline{P(t=0,3) = 0}$$

sinon la résolution de l'ode est trop

complexe. Dénodé.

$$\frac{dP}{dt} - \alpha \frac{dP}{dz} = 0 \rightarrow P \tilde{P} - \alpha \frac{d\tilde{P}}{dz} = 0$$

$$P(t, z=0) = C(t) \rightarrow \tilde{P}(z=0) = \tilde{C}(P)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} P(t, z) = 0 \rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{P}(z) = 0$$

Q4 - Les solutions de l'ode sont

$$e^{\sqrt{\frac{R}{\alpha}} z} \quad \text{et} \quad e^{-\sqrt{\frac{R}{\alpha}} z}$$

$e^{\sqrt{\frac{R}{\alpha}} z}$ diverge au point de l.c.d. à

l'infini.

$$\text{reste } \tilde{P}(z) = \tilde{C}(P) e^{-\sqrt{\frac{R}{\alpha}} z}$$

Q 8-

$$\tilde{C}(p) = Q \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$$

$$= Q \left[t e^{-pt} - \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} -\frac{e^{-pt}}{p} dt$$

$$= \frac{Q}{p}$$

$$\text{donc } \tilde{f}(p) = Q \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}}}{p}$$

$$\text{on voit que } \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{2\sqrt{\alpha}}\right) \rightarrow \frac{1}{p} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}}$$

$$\text{alors } \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2\sqrt{\alpha}}\right) \rightarrow \frac{1}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}}$$

$$\text{donc } \int_0^t g(u) du \rightarrow \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t g(u) du \right) e^{-pt} dt$$

$$= \left[\left(\int_0^t g(u) du \right) \times -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} g(t) \times \frac{e^{-pt}}{p} dt$$

$$= \frac{1}{p} \tilde{f}(p)$$

~~✗~~ Désolé, j'ai écrit du vers donner la formule.

donc

$$\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2\sqrt{\alpha u}}\right) du \rightarrow \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}}}{p}$$

$$\text{et } P(t, 3) = Q \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2\sqrt{\alpha u}}\right) du$$

$$\text{Vérif. } 3=0 \rightarrow \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2\sqrt{\alpha u}}\right) = 1$$

$$\text{donc } P(t, 3=0) = Qt \quad \text{c'est bon.}$$

$$Qg - \text{c'est dit } C(u) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Qt & 0 < t < z \\ Qz & t < z \end{cases}$$

pas Q (homogénéité)

$$\begin{aligned} \tilde{C}(p) &= \int_0^z Qt e^{-pt} dt + \int_z^{+\infty} Qz e^{-pt} dt \\ &= Q \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^z + \int_z^{+\infty} Qz e^{-pt} dt \end{aligned}$$

donc

$$P(t, 3) = Q \left(\frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}}}{p} - \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{\alpha}}}}{p} e^{-pz} \right)$$

On sait que, pour $t > 0$

$$x < 0 \Rightarrow f(t) = 0$$

$$f(t-z) \rightarrow e^{-\rho z} \tilde{f}(z)$$

d'où (on reprend Q_0)

$$\text{si } t < z$$

$$\rho(t, z) = Q \int_0^t \exp\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}}\right) d\tau$$

$$\text{si } t > z$$

$$\rho(t, z) = Q \left(\int_0^t \exp\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}}\right) d\tau - \int_0^{t-z} \exp\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}}\right) d\tau \right)$$

$$= Q \int_{t-z}^t \exp\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}}\right) d\tau$$

$$\text{Vair } z=0$$

$$\text{si } t < z \quad \rho(t, z=0) = Q t$$

$$\text{si } t > z \quad \rho(t, z=0) = Q z$$

$$Q_{10} - \text{si } \frac{\partial f}{\partial z} - \alpha \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } 0 < z < \alpha$$

$$\int_0^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \alpha \frac{\partial f}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\text{soit } \frac{d}{dz} \int_0^\alpha f dz + \left[-\alpha \frac{\partial f}{\partial z} \right]_0^\alpha = 0$$

$$\frac{d}{dz} Q + \tilde{\phi}_\alpha - \tilde{\phi}_0 = 0$$

C'est une équation de bilan.

$$Q_{11} = f(t, z) = \cos\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) e^{-3/8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\omega \sin\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) e^{-3/8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{1}{s} \sin\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) - \frac{1}{s} \cos\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) \right) e^{-3/8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(-\frac{1}{s} \cos\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) - \frac{1}{s} \sin\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) \right) e^{-3/8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} - \alpha \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\rightarrow -\omega \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) e^{-3/8}$$

$$+ 2\alpha \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) e^{-3/8} = 0$$

$$\text{ce qui arrive à } \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2\alpha}{3}}$$

Q-12

$$p = \left(a \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) + b \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \right) e^{-3/8} + c \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + d \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) e^{3/8}$$

c'est périodique

$$\times p(t, 3) = p(t + \frac{2\pi}{\omega}, 3)$$

en 3 $\rightarrow \infty$ p ne doit pas croître

$\times$ J'aurais dû le préciser.

$$\rightarrow c=0, d=0$$

$$\text{en } 3=0 \text{ on a}$$

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = C_1 \sin \omega t + C_2$$

$$\Rightarrow a=0 \text{ et } b=C_1$$

la solution est

$$p(t, 3) = C \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) e^{-3/8}$$