Mécanique et électricité analytiques

Leçon 5

Plan de phase et quadrature

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

21 septembre 2018

Solution par quadrature

- Écrivons la conservation de l'énergie pour le problème de la leçon 1 https://gerard.vinsard.fr/Cours/MEAN/LagrangeHamilton.pdf

$$\frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{x}^2 + m\, g\, h = E$$

où E se calcule par les conditions initiales :
$x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \Longrightarrow E = \frac{1}{2}\, m\, (1 + h'(x_0)^2)\, \dot{x}_0^2 + m\, g\, h(x_0)$;

- En résolvant par rapport à $\dot{x}$: $\dfrac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\dfrac{2\,(E - m\, g\, h(x))}{m(1 + h'(x)^2)}}$
- D'où la forme séparable : $\dfrac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m(1+h'(x)^2)}(E - \ g\ h(x))}} = \pm\ dt$

- Qui permet d'obtenir une expression de la solution commme :
$\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} \sqrt{\frac{m(1 + h'(\alpha)^2)}{2(E - \ g\ h(\alpha))}}\ d\alpha = \pm\ t$ (c'est la quadrature).

Problème hamiltonien stationnaire à 1 ddl

- La méthode se généralise

- Si x est la variable de position, p l'impulsion et H le hamiltonien alors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \; ; \; \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

- La stationnarité se traduit par l'indépendance de H en t : $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$; dans cette circonstance les variables x et p satisfont à (cf leçon 1)

$$H(x,p) = H_0 = H(x_0,p_0) \;\; \text{si } x(t=0) = x_0 \; ; \; p(t=0) = p_0$$

- Si cette courbe est maintenant donnée sous forme paramétrique

$$H(x,y) = H_0 \Longleftrightarrow x = X(s) \; ; p = P(s)$$

X et P satisfont à

$$\frac{d}{ds}\Big(H(X(s),P(s)\Big) = \frac{\partial H}{\partial x}\,\frac{dX}{ds} + \frac{\partial H}{\partial p}\,\frac{dP}{ds} = 0$$

Principe de la méthode de quadrature

► Le mouvement sera complétement déterminé en prêtant à s le status de variable dépendante du temps et en injectant $x = X(s)$; $y = P(s)$ dans les équations de Hamilton

$$\frac{ds}{dt}\,\frac{dX}{ds}(s) = \frac{\partial H}{\partial p}(X(s), P(s)) \; ; \; \frac{ds}{dt}\,\frac{dP}{ds}(s) = -\frac{\partial H}{\partial x}(X(s), P(s))$$

chacune de ces deux expressions est une EDO de variables dépendante s et indépendante t qui permet le calcul de s.

► Le principe de la méthode de quadrature consiste à choisir une paramétrisation $(X(s), P(s))$ des courbes $H = H_0$ du plan de phase (x, p) et à résoudre l'une des équations différentielles en s.
L'intérêt (et le nom) de la méthode vient de ce que les EDOs en s sont à variables séparables

$$\frac{\frac{dX}{ds}(s)\; ds}{\frac{\partial H}{\partial p}(X(s), P(s))} = \frac{-\frac{dP}{ds}(s)\; ds}{\frac{\partial H}{\partial x}(X(s), P(s))} = dt$$

Exemple de l'oscillateur harmonique

- $H = \dfrac{p^2}{2\ m} + \dfrac{1}{2}\ k\ x^2$ ce qui se paramétrise comme

$$x = \underbrace{\sqrt{\frac{2\ H_0}{k}}\ \cos s}_{=X(s)}\ ;\ p = \underbrace{\sqrt{2\ H_0\ m}\ \sin s}_{=P(s)} \quad \text{avec } H_0 = \frac{p_0^2}{2\ m} + \frac{1}{2}\ k\ x_0^2$$

et donc

$$\sqrt{\frac{2\ H_0}{k}}\ \cos s_0 = x_0\ ;\ \sqrt{2\ H_0\ m}\ \sin s_0 = p_0 \Longrightarrow \frac{p_0}{x_0} = \sqrt{m\ k}\ \frac{\sin s_0}{\cos s_0}$$

- Ainsi $\frac{dX}{ds} = -\sqrt{\frac{2\ H_0}{k}}\ \sin s\ ;\ \frac{dP}{ds} = \sqrt{2\ H_0\ m}\ \sin s\ ;\ \frac{\partial H}{\partial x} =$ $k\ \sqrt{\frac{2\ H_0}{k}}\ \cos s\ ;\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\sqrt{2\ H_0\ m}\ \sin s}{m}$ et

$$\frac{-\sqrt{\frac{2\ H_0}{k}}\ \sin s\ ds}{\frac{\sqrt{2\ H_0\ m}\ \sin s}{m}} = \frac{-\sqrt{2\ H_0\ m}\ \sin s}{k\ \sqrt{\frac{2\ H_0}{k}}\ \cos s} = dt \Longrightarrow -\sqrt{\frac{m}{k}}\ ds = dt$$

soit $s = -\sqrt{\dfrac{m}{k}}\ t + s_0$

Oscillateur harmonique : autre paramétrisation

- Il est également possible de résoudre l'équation $H = H_0$ par rapport à p, pour $p > 0$

$$p = \sqrt{2\ m}\ \sqrt{H_0 - \frac{k\ x^2}{2}}$$

ce qui fournit la paramétrisation valable pour $s > 0$

$$x = x\ ;\ p = \sqrt{2\ m}\ \sqrt{H_0 - \frac{k\ x^2}{2}}$$

- D'où

$$\frac{dx}{\frac{\sqrt{2\ m}\ \sqrt{H_0 - \frac{k\ x^2}{2}}}{m}} = \ldots = dt$$

L'équation est moins facile à résoudre mais, il est facile de vérifier que la solution

$$x = \sqrt{\frac{2\ H_0}{k}}\ \cos\left(-\sqrt{\frac{m}{k}}\ t + s_0\right)$$

la satisfait.

Cas où H est quadratique en p

- H peut prendre une forme compliquée en x mais quant elle est quadratique en p et donc, en ne retenant que la branche $p > 0$, il existe une fonction $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$H(x,p) = H_0 \text{ et } p > 0 \Longrightarrow p = \Psi(x, H_0)$$

- L'injection de cette forme dans $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ conduit à

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, H_0)\, \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, \Psi(x, H_0))$$

qui est à variables séparables

$$\frac{-\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, H_0)\, dx}{\frac{\partial H}{\partial x}(x, \Psi(x, H_0))} = dt$$

et donc si $x(t_1) = x_1$ et $x(t_2) = x_2$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{-\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, H_0)}{\frac{\partial H}{\partial x}(x, \Psi(x, H_0))}\, dx = t_2 - t_1$$

la relation entre x_1, x_2 et t_1, t_2 s'obtient par une intégrale, d'où le nom de quadrature pour la méthode.