Mécanique et électricité analytiques

Leçon 3

Nombre fini quelconque de ddls

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

4 octobre 2018

Objectifs de la leçon

- Introduire la notion de coordonnées, vitesses, impulsions et forces généralisées ;
- Écrire les équations d'Euler-Lagrange et de Hamilton à partir de la donnée d'un lagrangien comme variable dépendante d'un vecteur de coordonnées généralisées $X \in \mathbb{R}^N$ conçu comme un point de l'espace de configuration, du vecteur des vitesses généralisées $\dot{X} \in \mathbb{R}^N$;
- Il y a en somme peu à ajouter aux leçons précédentes mais l'exemple emblématique du solide indéformable (cf. Leçon `https://gerard.vinsard.fr/Cours/MEAN/Dynamiques_du_solide_indeformable`) fournira le sel qui eût manqué sans cela.

Méthode générale : motivation

- Le mouvement de solide fait apparaître un espace de configuration de dimension 6 (les trois positions du centre de masse et les trois angles d'Euler) et un espace de phase de dimension 12 (les dérivées temporelles ou les impulsions associées en plus).

- Si plusieurs solides sont considérés avec des liaisons entre eux (une étude plus systématique des liaisons suivant leur nature est faite Leçon 8) les dimensions de ces espaces peuvent devenir assez importantes.

- De plus les composantes de l'espace de configuration sont de natures différentes (des distances et des angles pour le solide ; et les problèmes électromécanique Leçon 6 ajouteront les charges électriques).

Ceci porte à penser qu'il serait utile de définir un jeu de notations avec lequel pourra être posé n'importe quel problème de (pour l'instant) mécanique.

Méthode générale : développement

► La une méthode générale de traitement d'un problème mécanique[1] est :

1° Identifier les variables de position x_1,x_2, . . . , x_n ; ce sont les coordonnées généralisées du système étudié.
Elle sont globalisées dans un vecteur $X = {}^t(x_1\ x_2 \ldots x_N)$ qui est un point de l'espace de configuration $\mathbb{R}^N$;
pour le solide en rotation (autour d'un point fixe) $X = {}^t(\psi\ \theta\ \phi)$.

2° Identifier la cinématique du mouvement ; c'est à dire relier les dérivées temporelles de $\dot{X}$ qui sont les vitesses généralisées aux vitesses réelles du système étudié ;
pour le solide en rotation c'est l'expression de la vitesse de chacun de ses points $\vec{X}$ comme $\vec{\Omega} \times \vec{X}$.

3° Utiliser cette cinématique pour former les énergies cinétique T et potentielle V comme variables dépendantes de X et de $\dot{X}$

1. non dissipatif et dans le cas où les degrés de liberté peuvent être mis sous une forme où ils sont libre (sans contraintes)

Méthode générale : Euler-Lagrange

- le lagrangien est

$$L = T - V$$

c'est une variable dépendante de X, $\dot{X}$ et éventuellement du temps t.

- Les dérivées de l'énergie cinétique par rapport aux composantes de $\dot{X}$ sont rangées dans un vecteur

$$\nabla_{\dot{X}} T = {}^t\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \dots \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_N}\right)$$

appelé le gradient de T par rapport à $\dot{X}$. Les composantes de $\nabla_{\dot{X}} T$ sont les impulsions généralisées.

- Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{X}} L = \nabla_X L\ ;\ \frac{dX}{dt} = \dot{X}$$

Méthode générale : Hamilton

- Le hamiltonien est

$$H = {}^t\dot{X}P - L \text{ où } \dot{X} \text{ est solution de } \nabla_{\dot{X}}L = P$$

qui est une variable dépendante des coordonnées généralisée de X et des impulsions généraliséees P.

- Les équations de Hamilton sont

$$\frac{dP}{dt} = -\nabla_X H \; ; \; \frac{dX}{dt} = \nabla_P H$$

Si le nombre de degrés de liberté est N les $2 \times N$ équations que la notation en vecteur contient expriment de façon explicite (et donc prêtes à être injectées dans un logiciel de calcul d'EDOs) les équations du mouvement.

Exemple : le solide en rotation autour d'un point fixe

- Les coordonnées généralisées sont les angles d'Euler ψ, θ, ϕ ; les vitesses généralisées les vitesses angulaires $\dot\psi, \dot\theta, \dot\phi$;

- Avec le choix des directions principales pour les axes, la contribution de la rotation à l'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} T_r &= \tfrac{1}{2}(A\,(\cos\phi\;\dot\theta + \sin\phi\;\sin\theta\;\dot\psi)^2 + B\,(-\sin\phi\;\dot\theta + \cos\phi\;\sin\theta\;\dot\psi)^2 \\ &\quad + C\,(\cos\theta\;\dot\psi + \dot\phi)^2) \end{aligned}$$

où A, B, C sont les moments d'inertie depuis le centre de gravité. Le point fixe n'est pas nécessairement le centre de gravité. Si le centre de gravité se déplace suivant une loi

$$\vec{x}_c(\psi, \theta)$$

pour une masse du solide m l'énergie cinétique totale est donc

$$T = T_r + \frac{1}{2}\,m\,\left((\partial_\psi \vec{x}_c)^2\;\dot\psi^2 + (\partial_\theta \vec{x}_c)^2\;\dot\theta^2\right)$$

c'est une fonction des coordonnées et vitesses généralisées.

Exemple : le solide en rotation autour d'un point fixe

- Les impulsions généralisées sont les dérivées partielles

$$P_\psi = \partial_{\dot\psi} T \quad ; \quad P_\theta = \partial_{\dot\theta} T \quad ; \quad P_\phi = \partial_{\dot\phi} T$$

et l'énergie cinétique exprimée à partir de ces impulsions est la transformation de Legendre de l'énergie cinétique exprimée à partir des vitesses soit

$$\overline{T} = P_\psi \, \dot\psi + P_\theta \, \dot\theta + P_\phi \, \dot\phi - T$$

où $\dot\psi, \dot\theta, \dot\phi$ sont exprimées en fonction de P_ψ, P_θ, P_ϕ en inversant les relations définissant P_ψ, P_θ, P_ϕ.

- L'énergie potentielle est celle du centre de gravité seule, soit

$$V = -m \, \vec{X}_0 \cdot \vec{g}$$

elle dépend de ψ, θ.

Exemple : le solide en rotation autour d'un point fixe

- Le hamiltonien est

$$H = \overline{T} + V$$

et les équations du mouvement s'obtiennent comme

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} &= \partial_{P_\psi} H \quad ; \quad \frac{dP_\psi}{dt} = -\partial_\psi H \\
\frac{d\theta}{dt} &= \partial_{P_\theta} H \quad ; \quad \frac{dP_\theta}{dt} = -\partial_\theta H \\
\frac{d\phi}{dt} &= \partial_{P_\phi} H \quad ; \quad \frac{dP_\phi}{dt} = -\partial_\phi H
\end{aligned}$$

- Cela peut sembler un peu lourd, mais c'est le calcul symbolique qui supporte tout le poids (voir le script maxima).

Exercice 1 : Le gyrocompas

► Un solide de révolution est placé dans un support qui permet sa rotation suivant les angles de nutation θ et de rotation propre ϕ mais pas suivant l'angle de précession ψ.

► Cet ensemble est placé sur un plateau tournant à la vitesse angulaire ω dont l'axe de rotation est celui qui serait l'axe de précession $\vec{k_z}$ si le mouvement de précession était possible pour le solide. Dans le référentiel du plateau le solide peut être considéré comme ayant un angle de précession ψ dépendant du temps comme $\psi = \omega\ t$.

a) Écrire les équations du mouvement de solide dans le référentiel du plateau tournant.

b) Initialement la vitesse de rotation propre est $\dot{\phi}_0$; montrer que si $\dot{\phi}_0 >> \omega$, il est possible d'écrire que $\phi = \dot{\phi}_0\ t$ et donc l'étude du mouvement se réduit à la recherche de θ seul qui dépend d'une équation simple.

c) On suppose qu'il y a un peu de frottement visqueux dans le mouvement en θ et que ce dernier peut être ajouté *a priori* dans l'équation précédente (sous forme d'un terme $-k\ \dot{\theta}$) ; montrer qu'alors θ tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini.

d) Le solide n'est plus placé sur un plateau tournant mais est posé sur le sol et le comportement précédent perdure. Constater que la prise en compte du mouvement de rotation de la terre sur elle-même explique cela. C'est le principe du gyrocompas.

Exercice 2 : Toupie symétrique d'apex fixe

► Une toupie symétrique est telle que $B = A$; l'apex est le point de l'axe de la toupie qui repose sur une table.

a) montrer que pour une telle toupie les énergie cinétique T (il y a les contributions des rotations et du mouvement du centre de gravité situé à une distance d de l'apex sur l'axe) et potentielle dans le champ de pesanteur s'écrivent :

$$T = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(A + m\,d^2\right)}_{=\tilde{A}}\ \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\ \sin^2\theta\right) + C\ \left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\ \cos\theta\right)^2\right)\ ;\ V = m\,g\,d\ \cos\theta$$

b) Montrer que le hamiltonien s'écrit alors

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{P_\theta^2}{\tilde{A}} + \frac{\tilde{A}\ \sin^2\theta\ P_\phi^2 + C\ \left(P_\psi - \cos\theta\ P_\phi\right)^2}{\tilde{A}\ C\ \sin^2\theta}\right) + m\,g\,d\ \cos\theta$$

et trouver les équations du mouvement.

c) Montrer alors que sous certaines conditions, il existe un angle θ non nul pour lequel une solution où $\dot{\theta} = 0$ est possible ; ce qui explique le mouvement de précession de la toupie.

Exercice 4 : Camb. Math. Tripos, Part I, 1896 (Whittaker, p. 142)

A ring of mass m can slide freely on a uniform rod of mass M and length $2a$, which can turn about one end. Initially the rod is horizontal, with the ring at a distance r_0 from the fixed end.

Trouver les équations du mouvement de ce « ring. »

Exercice 5 : Le N-pendule

Trouver les équations du mouvement d'un pendule constitué de N masses ponctuelles disposées à la suite les unes des autres à une distance l en présence de pesanteur.

a) en supposant que les masses sont coplanaires et le restent ;

b) sans le supposer (attention ça devient très lourd à écrire).