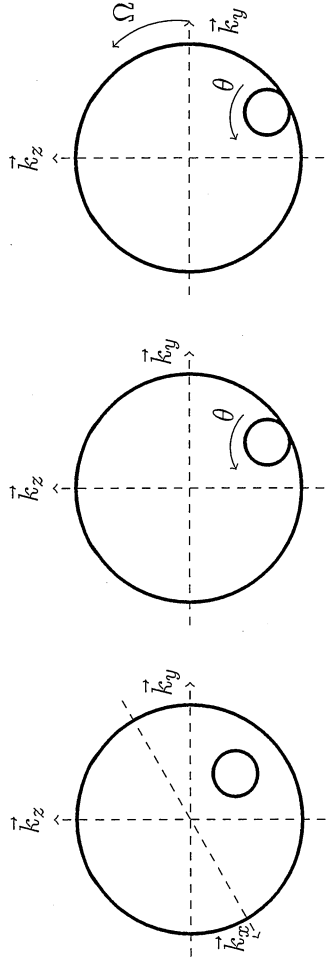


1 point par sous-question numérotées a, ..., t. L'adéquation des réponses aux questions aux questions posées, le soin et la qualité de la rédaction seront pris en compte.

- h) Montrer que la liaison holonome est satisfaite par le paramétrage des ddls y et z par $y = (R - R) \sin(\phi)$, $z = -(R - R) \cos(\phi)$. Et faire un dessin pour indiquer ce qu'est l'angle ϕ .
- i) Avec ce paramétrage, le problème ne comporte plus qu'un seul degré de liberté ϕ . Écrire les énergies cinétique et potentielle et le lagrangien avec ce seul ddl.
- j) Pour les conditions initiales $\phi = \pi/2$ et $\dot{\phi} = 0$, le mouvement est périodique et le quart de période est effectué lorsque ϕ passe de $\pi/2$ à 0. Donner la formule de quadrature permettant de calculer la valeur de ce quart de période.
- k) On reprend le problème avec la paramétrisation $y = (R - R) \sin(\phi)$, $z = -(R - R) \cos(\phi)$. Réécrire la liaison non holonome de e) avec les degrés de liberté θ et ϕ . Puis les énergies cinétique et potentielles.
- l) Donner les équations du mouvement avec ces ddls θ et ϕ en utilisant la méthode des multiplicateurs de Ferrers.
- m) Calculer la valeur du multiplicateur de Ferrers.
- 3- Initialement, la boule est placée en $\vec{O}$ (le centre de la sphère creuse) avec une vitesse nulle et sans vitesse de rotation. Elle tombe donc dans la sphère creuse jusqu'au moment où elle entre en contact avec elle et alors il y a un choc.
- m) Donner le temps auquel le choc a lieu ainsi que la vitesse juste avant ce choc.
- n) Donner la valeur de la percussion et en déduire celle de la vitesse juste après le choc en expliquant comment elle est obtenue.
- o) On suppose maintenant que la boule est initialement en rotation avec un vecteur de rotation instantané $\dot{\theta}_0 \vec{k}_x$. Décrire qualitativement ce qui se passe lors du choc.
- p) Même question avec un vecteur de rotation instantané $\dot{\theta}_0 \vec{k}_z$.
- q) On ne met plus de vitesse de rotation initiale mais on considère que la boule éprouve un frottement visqueux de fonction de dissipation $D = 1/2 k (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ lors de son vol (avant le choc). Donner les équations du mouvement de la boule.
- 4- La boule est supposée toujours en contact avec la sphère creuse comme dans la question 2 mais cette fois la sphère creuse roule sur elle-même avec une vitesse de rotation de vecteur $\Omega \vec{k}_x$ où Ω est constante.
- r) Écrire la condition de roulement sans glissement de la boule sur la sphère.
- s) Écrire alors le lagrangien avec le choix du ϕ de la sous-question h) comme ddl.
- t) Écrire finalement l'équation d'Euler-Lagrange correspondante.



Question 1

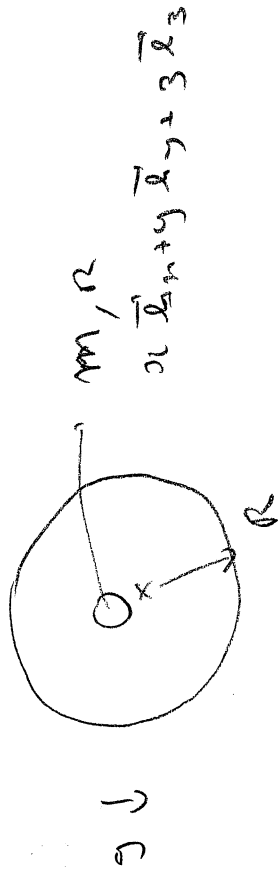
Question 2

Question 4

On place une boule de masse m et de rayon R à l'intérieur d'une sphère creuse de rayon intérieur $\mathcal{R}$ (donc $R < \mathcal{R}$). Le champ de gravité est $-g \vec{k}_z$.

- 1- La boule est supposée toujours en contact avec l'intérieur de la sphère creuse. Elle glisse sans rouler sur cette surface (dessin "Question 1"), elle n'a aucun mouvement de rotation. Cette configuration se modélise à partir des ddls x, y, z (coordonnées du centre de la boule) soumis à la liaison $x^2 + y^2 + z^2 = (\mathcal{R} - R)^2$.
- a) Écrire les énergies cinétique et potentielle puis le lagrangien.
- b) Écrire les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.
- c) Calculer le multiplicateur de Lagrange en fonction des variables de phase.
- d) Donner la condition pour la boule reste en contact avec l'intérieur de la sphère creuse.
- 2- La boule reste en contact avec l'intérieur de la sphère mais cette fois elle roule sans glisser, l'angle de rotation est θ (dessin "Question 2, 3"). Et son centre est toujours situé dans le plan $x = 0$. On conserve des ddls y et z liés par $y^2 + z^2 = (\mathcal{R} - R)^2$ auxquels on ajoute le ddl θ .
- e) Montrer que la liaison de roulement sans glissement s'écrit $\dot{\theta} R (\mathcal{R} - R) - z \dot{y} + y \dot{z} = 0$.
- f) Utiliser cette liaison de roulement sans glissement pour réduire les ddls à y et z et écrire l'énergie cinétique correspondante.
- g) Écrire la transformation de Legendre de cette énergie cinétique.

①



1- Le boulet est en contact avec l'intérieur de la sphère creuse

$$\Rightarrow \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = (R - R)\vec{e}$$

• Elle glisse sans rouler $\Rightarrow$ aucun moment de rotation.

$$a) T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = mgy_3 ; \quad \vec{g} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - (R - R)\vec{e}$$

$$L = T - V - \lambda f$$

$$\hookrightarrow \text{donc } x, y, z \text{ et } \lambda$$

$$b) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m \ddot{x} = -\lambda x$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow m \ddot{y} = -\lambda y$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \Rightarrow m \ddot{z} = -\lambda z$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Rightarrow 0 = x^2 + y^2 + z^2 - (R - R)^2$$

$$c) \quad \vec{g} = 0 \Rightarrow \vec{g} = 0 \text{ dit } x \ddot{x} + y \ddot{y} + z \ddot{z} = 0$$

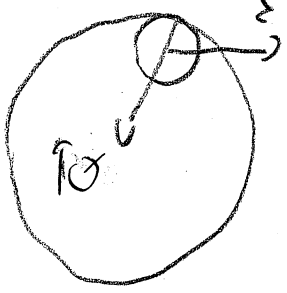
$$\Rightarrow \ddot{g} = 0 \Rightarrow x \ddot{x} + y \ddot{y} + z \ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

$$\text{on } \ddot{x} = -\frac{\lambda}{m} x, \quad \ddot{y} = -\frac{\lambda}{m} y, \quad \ddot{z} = -\frac{\lambda}{m} z \Rightarrow -\frac{\lambda}{m} (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$\text{dit } \lambda = \frac{-m (x^2 + y^2 + z^2)}{(R - R)^2}$$

$$\text{dit } \lambda = \frac{-mgy_3 + m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{(R - R)^2}$$

d) En mécanique newtonienne



$$\vec{Q} = -Q \frac{(x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3)}{(R - R)}$$

le force de réaction

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -\frac{Qx}{(R - R)} \\ m \ddot{y} = -\frac{Qy}{(R - R)} \\ m \ddot{z} = -mg - \frac{Qz}{(R - R)} \end{cases} \quad \checkmark \quad \text{PPD du cas}$$

à comparer avec les eq. d'Euler-Lagrange

$$\rightarrow \lambda = \frac{Q}{R - R}$$

②

Pour que la réaction soit nulle
l'empêcher la boule de pénétrer
dans la sphère (ce n'est pas
de le retourner d'aller vers l'intérieur
Nième) il faut que

$$Q > 0$$

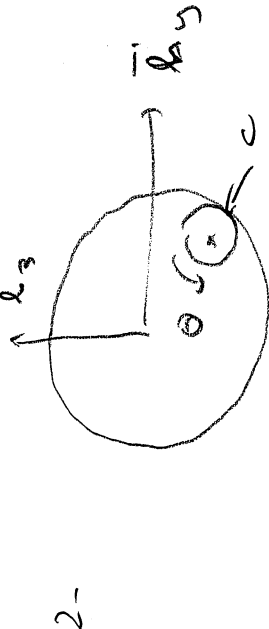
$$\Rightarrow \lambda > 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 > g z$$

à vitesse nulle en travers

$$z < 0$$

ce qui est cohérent



la boule ne peut pas glisser.

donc le plan $(\vec{x}_y, \vec{x}_z)$ ^{Uniquement} _{la direction}

$$m \omega^2 + z^2 = (R - a)^2$$

e) la position du C de G est $\vec{r} = y \vec{x}_2 + z \vec{x}_3$
celle du pt de contact $\frac{R}{Q-n} \vec{x}_2 = \vec{r}_c$

la v. ang. inst. de rotation de la boule est $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{x}_n$

la vitesse (côté boule) du pt de contact est

$$\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_c - \vec{r})$$

$$\dot{\vec{r}} + \dot{\theta} \vec{x}_n \times \frac{R}{Q-n} \vec{x}_2$$

$$= (\dot{y} - \frac{\dot{\theta} R}{Q-n} z) \vec{x}_2 + (\dot{z} + \frac{\dot{\theta} R}{Q-n} y) \vec{x}_3 = \vec{v}$$

Il y a deux composantes mais la direction

holonomie impose que $y \dot{y} + z \dot{z} = 0$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = \dot{y} y - \frac{\dot{\theta} R}{Q-n} y z + z \dot{z} + \frac{\dot{\theta} R}{Q-n} y z = 0$$

c'est cohérent

$$\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{r} = \vec{0} \text{ soit}$$

$$y (\dot{z} + \frac{\dot{\theta} R}{Q-n} y) - z (\dot{y} - \frac{\dot{\theta} R}{Q-n} z) = 0$$

$$\Rightarrow y \dot{z} - z \dot{y} + \frac{\dot{\theta} R}{Q-n} (y^2 + z^2) = 0$$

②

On encore

$$y \ddot{z} - 3 \dot{y} + \dot{\theta} R(R-n) = 0$$

8) A priori $T = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m R^2 \dot{\theta}^2$

$$\text{min } \dot{\theta} = \frac{y \dot{z} - 3 \dot{y}}{R(R-n)}$$

donc $T = \frac{1}{2} m (\dot{y} + \dot{z} + \frac{2}{5} \frac{(y \dot{z} - 3 \dot{y})^2}{(R-n)^2})$

$$V = m y z$$

et à rest- $y^2 + z^2 = (R-n)^2$

$$y) \quad T = \frac{1}{2} m (\dot{y} \quad \dot{z}) \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{5} \frac{y^2}{(R-n)^2} & -\frac{2}{5} \frac{y z}{(R-n)^2} \\ -\frac{2}{5} \frac{y z}{(R-n)^2} & 1 + \frac{2}{5} \frac{z^2}{(R-n)^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_y \\ p_z \end{pmatrix} = m A \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

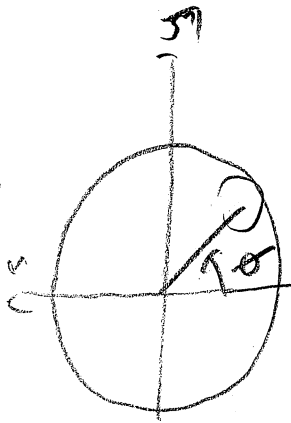
et $\overline{T} = \frac{1}{2m} (p_y \quad p_z) A^{-1} \begin{pmatrix} p_y \\ p_z \end{pmatrix}$

$$\text{avec } A^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{5} + 0} \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{5} \frac{z^2}{(R-n)^2} & \frac{2}{5} \frac{y z}{(R-n)^2} \\ \frac{2}{5} \frac{y z}{(R-n)^2} & 1 + \frac{2}{5} \frac{y^2}{(R-n)^2} \end{bmatrix}$$

④

$$\psi|_{\psi} = (Q-n) \psi \quad \psi|_{\psi} = (Q-n) \psi$$

$$m \text{ c h i m } \psi^2 \psi^2 = (Q-n)$$



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{L} \left((Q-n)^2 \dot{\phi} + \frac{2}{5} (Q-n)^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \dot{\phi}^2 \right) \\ &= \frac{1}{L} \left((Q-n)^2 \dot{\phi} + \frac{2}{5} (Q-n)^2 \dot{\phi}^2 \right) \end{aligned}$$

$$V = -m \frac{2}{5} (Q-n) \cos \phi$$

$$L = \frac{1}{L} \left(\frac{2}{5} (Q-n)^2 \dot{\phi}^2 + m \frac{2}{5} (Q-n) \cos \phi \right)$$

i) Le Hamiltonien s'exprime avec ϕ plutôt que ρ est constant

$$\rightarrow \frac{1}{L} \left(\frac{2}{5} (Q-n)^2 \dot{\phi}^2 - m \frac{2}{5} (Q-n) \cos \phi \right) = \text{cte.}$$

$$\text{avec } \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{2}{5} \frac{g}{(Q-n)} \cos \phi = \text{cte.}$$

Le constant est déterminé par la condition

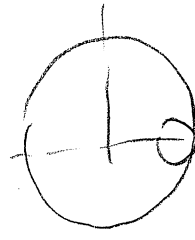
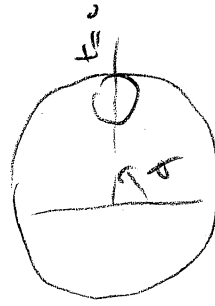
$$\text{initiale } \phi = \pi/2, \dot{\phi} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{2}{5} \frac{g}{(Q-n)} \cos \phi = 0$$

on résout par rapport à ϕ

$$\rightarrow \dot{\phi} = \pm \sqrt{\frac{10}{5} \frac{g}{(Q-n)}} \cos \phi$$

$$\text{c-à-d } \dot{\phi} = - \sqrt{\frac{10}{5} \frac{g}{(Q-n)}} \cos \phi \quad \text{parce que}$$



parce que la corde
à $t = T/5$ est
visible



plus grand

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi}} = - \sqrt{\frac{10}{5} \frac{g}{(Q-n)}} \frac{T}{5}$$

sur (5)

$$T = m \sqrt{2(R-n)} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{c \phi}}$$

2) $y = (R-n) \dot{\phi}$

$\dot{z} = -(R-n) \omega \phi$

→ $y \dot{z} - \dot{y} z = (R-n)^2 \dot{\phi}$

La liaison n'évite $\ddot{\theta} R(R-n)^2 - (R-n) \dot{\phi} = 0$

sur $f = \dot{\theta} R - (R-n) \dot{\phi} = 0$

$$T = \frac{1}{2} m ((R-n)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{2}{5} R^2 \dot{\theta}^2)$$

$V = -m g (R-n) \cos \phi$
 $L = T - V$

2) $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \dot{\phi}}$

$m(R-n)^2 \ddot{\phi} = -m g (R-n) \sin \phi - \lambda (R-n)$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \dot{\theta}}$

$\frac{2}{5} m R^2 \ddot{\theta} = + \lambda R$

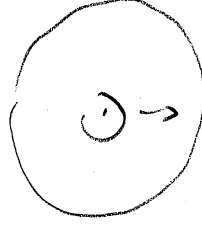
m) $f = 0 \Rightarrow \dot{g} = 0$

sur $\ddot{\theta} R - (R-n) \ddot{\phi} = 0$

$\frac{1}{2} \ddot{\theta} = \frac{1}{2} \ddot{\phi} + \frac{1}{m} + g \sin \phi = 0$

$\frac{1}{m} = -\frac{2}{5} g \sin \phi$

3-



la hauteur tombe depuis l'origine de la sphère avec vitesse initiale nulle.

m) la distance à parcourir est $(R-n)$

si t_1 est le temps de vol $(R-n) = \frac{1}{2} g t_1^2$

$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(R-n)}{g}}$

la vitesse à t_1 est $g t_1 = \sqrt{2(R-n)g} = v_1$

n) la $\neq$ entre quantité de mouvement avant choc et l'équilibre avec la percussion P

$m(v_1 + v_2) = P$

Et l'énergie cinétique se conserve

$$\frac{1}{2} m v_+^2 = \frac{1}{2} m v_-^2$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} + v_- \right)^2 = \frac{1}{2} m v_-^2$$

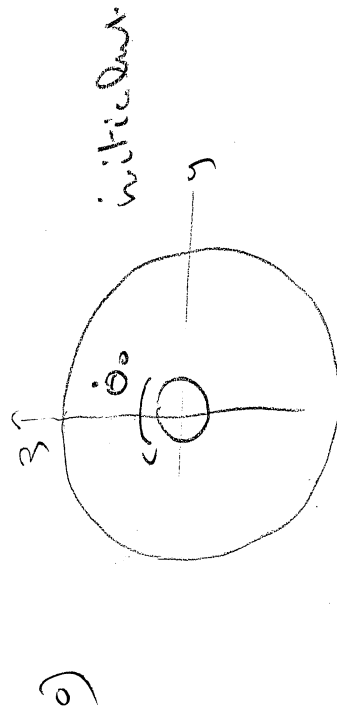
$$\frac{p^2}{m} + 2 p v_- = 0$$

$$\text{soit } p = -2 m v_-$$

La vitesse après choc est donc

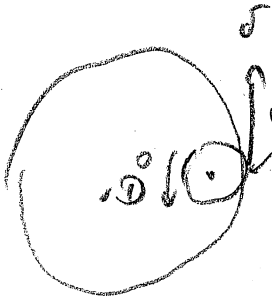
$$v_+ = -v_-$$

$$\text{(comme } m(v_+ - v_-) = 0)$$



La boule garde sa vitesse de rotation dans du temps de v

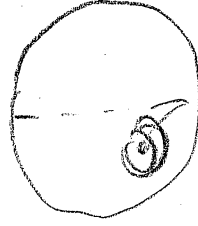
On montre en effet



Cela avec la loi de Coulomb, cette impulsion compte pour la modification de la vitesse après choc en y

Et donc la boule repart avec une vitesse :

$$(m \dot{y}_+ = q)$$



Voilà c'est tout

Si la notation est relative de $\vec{L}_3$ elle

n'influe en rien sur la vitesse tangentielle du pt de contact et la belle relation comme si il n'y avait pas cette rotation

7) a) s'il y a dissipation les éq. d'Euler - Lagrange sont modifiées

Cas

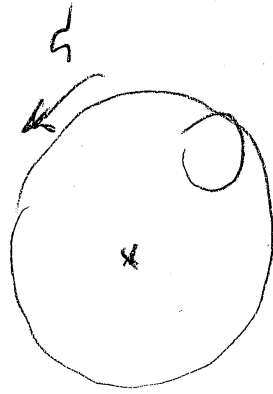
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial D}{\partial \dot{z}} \right)$$

$$\rightarrow m \ddot{z} = -m g - k \dot{z}$$

b)



2) On reprend (a) et on écrit

$$\text{car } \vec{v} = \left(\dot{y} - \frac{\dot{\alpha} R}{R-r} \right) \vec{e}_y + \left(\dot{z} + \frac{\dot{\alpha} R}{R-r} y \right) \vec{e}_z$$

l'équilibre avec la vitesse de la sphère

$$\text{soit } \frac{R}{R-r} (-3 \vec{e}_y + y \vec{e}_z) - \vec{z}$$

la composante tangentielle donne

$$\dot{\alpha} R(R-r) - 3 \dot{y} + y \dot{z} = R(R-r) \vec{z}$$

ou encore, avec la paramétrisation en ϕ

$$\dot{\alpha} R - (R-r) \dot{\phi} = R \dot{z}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (R-r) \dot{\phi} + R \dot{z}$$

d. p)

$$T = \frac{1}{2} m ((R-r) \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} ((R-r) \dot{\phi} + R \dot{z})^2$$

$$V = -m g (R-r) - \phi$$

$$L = T - V$$

$$c) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(m(R-r) \dot{\phi} + \frac{1}{2} (R-r) ((R-r) \dot{\phi} + R \dot{z}) \right)$$

$$= -m g (R-r) \dot{\phi}$$