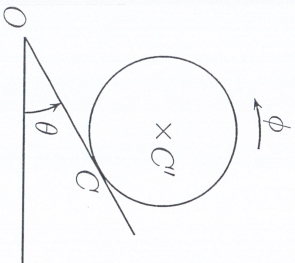


Informations : Tous documents et calculatrices autorisés – 1h30 – barème indicatif : chaque item labellé 'a', ..., 't' vaut au moins 1 point. Le traitement des plus difficiles d'entre eux donnera lieu à un bonus.

Problème de synthèse



Une roue de masse m et de rayon R est posée sur un rail de masse M et de longueur L . Le rail peut pivoter autour d'un avec normal au plan de la figure passant par O : son angle par rapport à l'horizontal est θ . La distance du point C de contact de la roue avec le rail et de O est r . Et finalement l'angle de rotation de la roue autour de l'axe normal passant par son centre C' et repéré par rapport à l'horizontal est ϕ .

On donne l'énergie cinétique du système formé par le rail et la roue comme

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{R^2}{2} \dot{\phi}^2 + \left(r^2 + \frac{3R^2}{2} \right) \dot{\theta}^2 - R \dot{r} \dot{\theta} + R^2 \dot{\phi} \dot{\theta} \right) + \frac{1}{2} \frac{M L^2}{3} \dot{\theta}^2$$

Question 1 – Dans le cas où θ est fixe et où la roue roule sans glisser sur le rail : **a)** Donner la condition de roulement sans glissement ; **b)** utiliser cette condition pour réduire le problème à un seul ddl et écrire le lagrangien ; **c)** Écrire le hamiltonien et donner les équations de Hamilton.

Question 2 – Toujours dans les conditions de la Question 1, on souhaite traiter le problème en considérant la relation de roulement sans glissement comme une liaison non-holonyme. **d)** Écrire le lagrangien et la liaison en précisant les dls ; **e)** Écrire les équations d'Euler-Lagrange dans cette situation ; **f)** Exprimer le multiplicateur introduit en fonction des variables de phase.

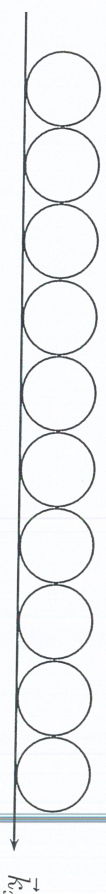
Question 3 – Maintenant la roue glisse sans frottement sur le rail mais celui-ci peut pivoter. **g)** Écrire l'énergie potentielle du système ; **h)** Écrire le lagrangien en précisant les dls ; **i)** Il y a une variable ignorable, préciser laquelle et réécrire le lagrangien en prenant en compte ce fait (initialement toutes les vitesses sont nulles) ; **j)** Écrire alors les équations d'Euler de **h)** ; **k)** Montrer qu'il aurait été plus adroit de repérer l'angle ϕ par rapport à la direction de l'axe.

Question 4 – Cette fois la roue roule sans glisser sur le rail qui pivote librement. **l)** Utiliser la condition de roulement sans glissement pour réduire le nombre de dls à 2 ; **m)** Écrire le hamiltonien. **n)** Écrire les équations de Hamilton.

Question 5 – On se pose la question de connaître les conditions dans lesquelles la roue décolle du rail. **o)** Expliquer (sans faire les calculs) comment faire.

Questions diverses –

p) Il faut au minimum une force F pour faire bouger dans la direction $\vec{k}_x$ 10 billes identiques collées les unes aux autres en chaîne et posées sur une table dans l'air. Quelle force minimum pour 5 billes ? Et pourquoi ?



q) Si on plonge le dispositif précédent dans de l'huile on constate que la force nécessaire pour bouger les billes devient voisine de 0. Par contre il faut une force F' pour que la chaîne de 10 billes se déplace à la vitesse v . Quelle vitesse obtient-on en appliquant la force F' à 5 billes ? Et pourquoi ?

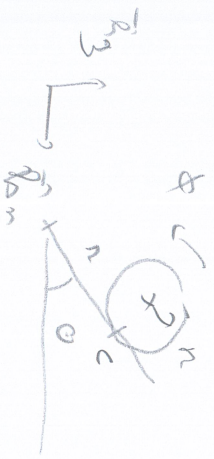
r) Un système à un ddl a pour hamiltonien $H = p^2/(2m) + k x^4/4$ ($p = m \dot{x}$). Donner la période des oscillations d'un mouvement de conditions initiales $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$.

s) Quel est le rayon maximal que peut avoir une roue pour pouvoir rouler sur un profil de la forme $z = L \sin(x/L)$?

t) Une balle heurte un mur normal à $\vec{k}_x$ avec une impulsion $\vec{p}$ ($\vec{p} \cdot \vec{k}_x > 0$) au moment du choc. Dans le cas d'un choc élastique, quelle est l'expression de l'impulsion juste après le choc ?

Question 1

a) C'est le pt d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné fixe



Le vitesses sont

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 (\text{avec } \dot{\vec{r}}_1 + \dot{\omega} \times \vec{R}_3) \\ + \dot{\vec{\phi}} R (\text{avec } \dot{\vec{r}}_1 + \dot{\omega} \times \vec{R}_3) \end{cases}$$

Le R.S.G. $\rightarrow \dot{\vec{r}} + \dot{\phi} R = 0$

b) $\Theta = \omega t$, $\dot{\vec{r}} + \dot{\phi} R = 0$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}}^2 + \frac{R^2}{2} \dot{\phi}^2)$$

verifier si on a $\dot{\phi}$?

Calculons V



donc $V = mg (R \sin \theta + R \cos \theta)$

Puisque R apparaît dans V

on vérifie ϕ , soit $\dot{\phi} = -\frac{\dot{\vec{r}}}{R}$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{R^2}{2} \right) \dot{\vec{r}}^2 = \frac{3}{5} m \dot{\vec{r}}^2$$

$$L = \frac{3}{5} m \dot{\vec{r}}^2 - m g R \sin \theta$$

(m g R cos theta est)

c) $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{3}{2} m \dot{\vec{r}} = p$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{3}{2} m\right) p^2}{\left(\frac{3}{2} m\right)^2} = \frac{p^2}{3 m}$$

$$dH = \frac{p^2}{3 m} + m g R \sin \theta$$

$$\left| \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -m g \sin \theta \right.$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{2}{3} \frac{p}{m}$$

Question 2

a) $L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \frac{R^2}{2} \dot{\phi}^2) - m g r \sin \theta$

$\mathcal{L}$ on ϕ $\mathcal{L}(\dot{r}, \dot{\phi}) = 0$

over $\mathcal{L}(r, \dot{\phi}) = \dot{r} + R \dot{\phi}$

Les dds sur r et ϕ , on note

λ la multiplieuse de Lagrange pour $\mathcal{L} = 0$

e) $\left| \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right|$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi} + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$

$\left| \frac{d}{dt} \mathcal{L}(r, \dot{\phi}) = 0 \right|$

$m \ddot{r} = -m g \sin \theta + \lambda$

$\left\{ \begin{aligned} m \frac{R^2}{2} \ddot{\phi} &= R \lambda \\ \text{et } \ddot{r} + R \dot{\phi} &= 0 \end{aligned} \right.$

g) $\ddot{r} + R \dot{\phi} = 0 \Rightarrow \ddot{r} + R \dot{\phi} = 0$

et on a $\left| \begin{aligned} \ddot{r} &= -g \sin \theta + \frac{\lambda}{m} \\ R \dot{\phi} &= \frac{2\lambda}{m} \end{aligned} \right.$

$\ddot{r} \sin \theta - g \sin \theta + (1+2) \frac{\lambda}{m} = 0$

$\ddot{r} \sin \theta = - \frac{m g \sin \theta}{3}$

Question 3

a) $V_{\text{tot}} = m g (r \sin \theta + R \cos \theta) + V_{\text{roil}}$

et V_{roil}



$V_{\text{roil}} = \frac{m g R}{2} \sin \theta$

b) $\downarrow = T \sin \theta = V_{\text{tot}}$

Les dds sur r, θ et ϕ

i) on remarque que $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ et donc

ϕ est ignorable, i.e.

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0$ et $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = P_{\phi} \leftarrow \text{cte}$

si donc $m \left(\frac{R^2}{2} \dot{\phi} + 2 \frac{R^2}{2} \dot{\theta} \right) = P_{\phi}$

si initialement $\text{tous les } v_i = 0$ sur moteur $P_{\phi} = 0$

et la relation entre $\dot{\phi}$ et $\dot{\theta}$ est

$$\dot{\phi} = -\dot{\theta}$$

d'où

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \frac{R^2}{L} \dot{\theta}^2) + (n + \frac{3R^2}{2}) \dot{\theta}^2 - R \dot{r} \dot{\theta} - R^2 \dot{\theta}^2$$

et V reste inchangé

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (R + R^2) \dot{\theta}^2 - R \dot{r} \dot{\theta}) - m g (R \dot{r} \dot{\theta} + R \dot{\theta}^2) - \frac{R g L}{2} \dot{\theta}$$

les deux sont R et L

$$\frac{d}{dt} (m \dot{r} - R \dot{\theta}) = m R \dot{\theta} - m g \dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} ((R + R^2) m \dot{\theta} - R \dot{r}) = -m g (R \dot{\theta} + R \dot{r}) - \frac{R g L}{2} \dot{\theta}$$

2) on remplace m T que

$$\frac{R^2}{L} \dot{\phi}^2 + R^2 \dot{\phi} \dot{\theta} = \frac{R^2}{L} ((\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 - \dot{\theta}^2)$$

si donc on écrit plus comme ça

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} + \dot{\theta} \text{ mais } \dot{\phi} \text{ , on}$$

arrivé on une expression plus simple

Question 4

2) on utilise $\dot{\phi} = -\dot{r}/R$ pour réduire

la ph à 2 dds (r et θ)

$$T = \frac{1}{2} m (\frac{3}{2} \dot{r}^2 + (n + \frac{3R^2}{2}) \dot{\theta}^2 - 2R \dot{r} \dot{\theta}) + \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2$$

et V est inchangé.

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r} \quad \dot{\theta}) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -R \\ -R & n + \frac{3R^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -R \\ -R & n + \frac{3R^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \frac{1}{\frac{3}{2}(n + \frac{3R^2}{2}) + R^2} \begin{pmatrix} n + \frac{3R^2}{2} & R \\ R & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \end{pmatrix}$$

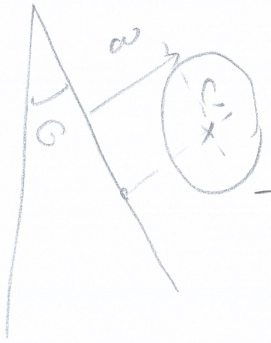
$$\text{et } T = \frac{1}{2} (p_r \quad p_\theta) \frac{1}{m(\frac{3}{2}(n + \frac{3R^2}{2}) + R^2)} \begin{pmatrix} n + \frac{3R^2}{2} & R \\ R & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \end{pmatrix}$$

$$H = T + V(r)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \vec{H} = - \vec{\nabla}_{(r, \theta)} H$$

Question 5

a) C' est décrit par la loi



et on a l'expression de la fonction

$$z = n$$

donc on a plus 3 de

mon niveau d'énergie $z = n = 0$

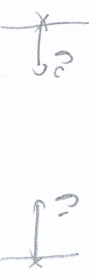
donc la multiplication de

l'équation de Schrödinger

mon état de base de

l'équation de Schrödinger

c)



on a donc

$$P_1 = P_0 + q \quad \text{de} \quad P_0^2 = (P_0 + q)^2$$

(conservation d'énergie cinétique)

$$q = -2P_0 \quad \text{et} \quad P_1 = -P_0$$

Question 6

b) Les billes sont prises sur une table donc la force

de frottement de la table est la force de frottement

avec on a l'expression $f = \mu N$ (μ coefficient de frottement, N :

est la force normale, N est la force normale)

est donc la force appliquée et la force normale

billes ne bougent pas, et la conservation de l'énergie

$$E = P_0 N$$

$$N = 10 \Rightarrow F \quad \text{et} \quad N = 5 \Rightarrow F/2$$

a) Cette loi de la force de frottement est valable, proportionnelle

à N (N est la force normale) donc par F est

$$N = 10 \Rightarrow F \quad \text{et} \quad N = 5 \Rightarrow F/2$$

$$N = \frac{1}{2} m \ddot{x} + \frac{g}{4} x = \frac{g}{4} x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{g}{2m} (\sqrt{x_0^2 - x^2}) = \frac{g}{2m} \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

si $\frac{1}{2}$ est la force normale pour $x_0 = 0$ (la $1/2$ de la période)

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{4}{2m}} \frac{T}{4}$$