Mécanique et électricité analytiques

Leçon 9

Dissipation

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

2 décembre 2016

Objectifs de la leçon

- Énumérer les causes principales de dissipation.
- Expliquer comment incorporer les forces correspondantes dans la formulation lagrangienne d'un problème.
- Fournir une base d'exemples pertinents.

Système non-dissipatif

- Si aucune source n'est présente (force ou force électromotrice prescrites) un système électro-mécanique est caractérisé par le fait que son énergie se conserve. Il existe une variable H dépendante des variables de configuration X et de leurs vitesses $\dot{X}$ telle que

$$H = \mathrm{Cste}$$

H est le hamiltonien qui est la somme des énergies cinétique, magnétique, potentielle et électrique.

- En présence de sources F prescrites l'énergie ne se conserve plus, elle est apportée où emportée par les sources : $\mathcal{P}$ est la puissance positive s'il y a apport d'énergie (et négative s'il y a emport)

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \mathcal{P}$$

La forme de cette puissance est

$$\mathcal{P} = F \cdot \dot{X}$$

c'est la somme des travaux par unité de temps des forces (mécaniques et/ou électromotrices).

Système dissipatif

► Si maintenant les sources F ne sont plus prescrites mais qu'elles sont des variables dépendantes de X et $\dot{X}$, alors $\mathcal{P}$ est une variable dépendante de X et $\dot{X}$. Si, à cause de leur complexité, le rayonnement [1] et la chimie [2] sont écartés des investigations, le seul cas qui se rencontre est celui de la *dissipation* de l'énergie du système sous forme de chaleur pour lequel

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \mathcal{P} < 0$$

1. Un courant électrique oscillant rapidemment génère un rayonnement qui se traduit par la nécessité pour la source qui entretient ce courant oscillant de fournir l'énergie qui s'échappe ainsi par unité de temps. Inversement un rayonnement incident à un support matériel susceptible d'être parcouru par un courant électrique génère une force électromotrice qui peut être source de courant et donc d'énergie par unité de temps entrante.

2. Une force électromotrice imposée aux bornes d'un système d'électrodes disposées dans une solution électrolyte génère des réactions chimiques consommant de l'énergie. La réaction chimique inverse fait apparaître une force électromotrice spontanée aux bornes des électrodes et peut fournir de l'énergie par unité de temps.

Origine de la dissipation

- À l'échelle microscopique, il n'y a pas de dissipation. Dans une description classique[3] l'espace est peuplé de particules dotées d'impulsions et de charges électrique qui sont en interaction et l'énergie de ce système se conserve.

- L'échelle macroscopique est une moyenne des mouvements de ces particules et la considération de cette moyenne seule sépare l'énergie totale E en deux composantes : une énergie E_m qui dépend des paramètres de configuration et de leurs vitesses que la moyenne conserve ; le reste de l'énergie $E - E_m$.

- Lorsque les changements de paramètres de configuration de la moyenne s'accompagnent d'une variation de E au profit de $E - E_m$ il y a dissipation[4].

3. L'alternative qui est profondément différente est la description quantique. Les aspects relativistes s'incorporent bien à la description classique.

4. La discipline qui s'occupe des lois générales auxquelles satisfont ces variations est la thermodynamique.

Exemple de dissipation : le frottement solide, lois d'Amontons-Coulomb

- Lorsqu'un corps d'un matériau donné se déplace (glisse) sur une surface en suivant une loi de mouvement décrit par la coordonnée x il subit alors un frottement solide de la part du matériau de la surface ; les force et puissance dissipée correspondantes sont de la forme

$$F = -f\ R\ ;\ \mathcal{P} = -f\ R\ \dot{x}$$

où f est le coefficient de frottement dynamique (sans dimensions, c'est une donnée par couples de matériaux) et R l'intensité de la force de réaction que la surface doit appliquer sur la masse pour que celle-ci ne la traverse pas.

- Lorsque le corps est immobile, il n'y a pas de puissance dissipée mais si une force lui est appliquée pour le faire bouger il reste immobile tant que cette force est en module plus petite que $f_0\ R$ (où f_0 est le coefficient de frottement statique).

Mouvement d'une sphère sur un plan (1/3)

- Une sphère (rayon r, masse m, moment d'inertie $\frac{2}{5}\ m\ r^2$) peut rouler et glisser sur un plan selon les lois d'Amontons-Coulomb (coefficients $f = f_0$) ; initialement son centre est à la vitesse $\dot{x}_0$ et son vecteur de rotation est normal à cette vitesse et parallèle au plan (pas de pivotement) d'amplitude $\dot{\theta}_0$ et son centre est à la vitesse $\dot{x}_0$. Il s'agit de prédire son mouvement.

- La position du centre de la sphère est x, son angle de rotation θ disposé dans le sens où la vitesse du point de contact de la sphère est

$$\dot{x} + r\ \dot{\theta}$$

- La force qu'exerce la sphère normalement au plan est $m\ g$ et donc la force de frottement qu'exerce le plan sur la sphère est dirigée dans la direction opposée à celle du mouvement du centre et d'amplitude $|\lambda|\ m\ g$, où

$$|\lambda| = \begin{cases} f \text{ si } \dot{x} + r\ \dot{\theta} \neq 0 \\ \text{une valeur quelconque } \leq f \text{ sinon} \end{cases}$$

Mouvement d'une sphère sur un plan (2/3)

- Les équations fondamentales de la dynamique fournissent

$$m\,\ddot{x} = -\lambda\, m\, g \quad ; \quad \tfrac{2}{5}\, m\, r^2\, \ddot{\theta} = -r\, \lambda\, m\, g$$

où λ a le signe de $\dot{x} + r\,\dot{\theta}$.

- Si $\dot{x} + r\,\dot{\theta} = 0$ alors $\ddot{x} + r\,\ddot{\theta} = 0$ et donc

$$\tfrac{7}{2}\,|\lambda|\, g = 0 \Longrightarrow |\lambda| = 0$$

- Si $\dot{x} + r\,\dot{\theta} \neq 0$ alors $|\lambda| = f$ et

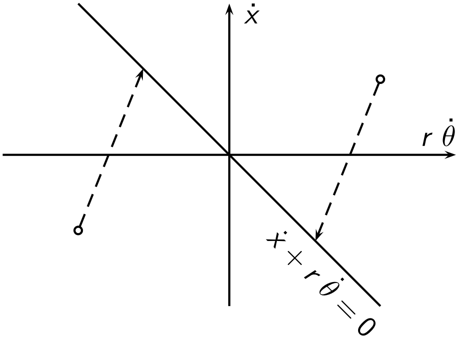
$$m\,\ddot{x} = -\mathrm{signe}(\dot{x} + r\,\dot{\theta})\, f\;\, m\, g \quad ; \quad \tfrac{2}{5}\, m\, r^2\, \ddot{\theta} = -\mathrm{signe}(\dot{x} + r\,\dot{\theta})\, r\, f\;\, m\, g$$

d'où

$$m\,\dot{x} = \dot{x}_0 - \mathrm{signe}(\dot{x} + r\,\dot{\theta})\, f\;\, g\;\, t \quad ; \quad r\,\dot{\theta} = r\,\dot{\theta}_0 - \mathrm{signe}(\dot{x} + r\,\dot{\theta})\, \tfrac{5}{2} f\;\, g\;\, t$$

Mouvement d'une sphère sur un plan (3/3)

- Si initialement la condition $\dot{x}_0 + r\,\dot{\theta}_0 = 0$ n'est pas remplie, les vitesses évoluent linéairement (dans la direction $(1, 5/2)$) pour atteindre la droite $\dot{x} + r\,\dot{\theta} = 0$ à l'instant $(\frac{2}{7}|\dot{x}_0 + r\,\dot{\theta}_0|/f\ g)$ et par la suite elles restent au point atteint et le mouvement devient un mouvement de roulement sans glissement.



Exemple de dissipation : le frottement visqueux

- Lorsqu'un corps se déplace au contact d'un fluide (de viscosité dynamique ν et masse volumique ρ) en suivant une loi de mouvement décrit par la coordonnée x, il subit un frottement visqueux de la part du fluide. La force de frottement dépend du régime hydrodynamique que le mouvement du corps génère dans le fluide et sa détermination est donc un problème très complexe.
- Toutefois lorsque le corps est une sphère de rayon a qui se déplace à une vitesse v très faible ($\rho\ v\ a/\nu << 1$) dans un fluide immobile, les force et puissance correspondante sont (loi de Stokes)

$$F = -6\,\pi\,\nu\,a\,v\ ;\ \mathcal{P} = -6\,\pi\,\nu\,a\,v^2$$

- Si ce corps, présentant une surface normale à l'air circulaire de rayon d, se déplace dans l'air à une vitesse v, les force et puissance correspondante sont

$$F = -\tfrac{1}{2}\,v^2\,\frac{\pi\,d^2}{4}\,C_T\ ;\ \mathcal{P} = -\tfrac{1}{2}\,v^3\,\frac{\pi\,d^2}{4}\,C_T$$

où C_T, le coefficient de trainée, varie suivant que la vitesse est ou non subsonique $v < 330 m/s$.

Solides dans des fluides

- Cette recherche de la loi de frottement visqueux, qui passe par l'analyse de l'écoulement du fluide dans lequel le corps se déplace, s'accompagne de la recherche d'une autre force, la portance qui fournit entre autre une explication à ce qu'un avion puisse voler.

- De plus le cas où un grand volume de fluide entoure complétement le solide n'épuise pas le sujet.
Le corps peut par exemple reposer sur une faible épaisseur de lubrifiant laquelle est déposée sur un un coussinet : typiquement c'est le cas d'un axe dans un palier. Là encore il y a un problème d'hydrodynamique (équations de Reynolds) à résoudre pour déterminer la loi de frottement.

Exemple de dissipation : l'effet Joule

► Lorsqu'un courant d'intensité i traverse un corps conducteur de l'électricité, une force électromotrice e est générée dans le sens que la puissance dissipée soit

$$\mathcal{P} = -R\, i^2$$

où R est la résistance électrique (en S/m) qui dépend de la nature (celle-ci pouvant être influencée par sa température) et de la forme du corps. C'est la dissipation de l'effet Joule.

► L'effet Joule a beaucoup de rapport avec le frottement visqueux, en ce qu'il est dû aux pertes que subissent les porteurs de charge dans leur milieu lors de chocs multiples. Mais il est pris en compte plus facilement (et plus précisément ?) par un coefficient macroscopique que ce dernier dans la mesure où les chocs y ont lieu à une échelle plus petite.

Exemple de dissipation : l'hystéresis magnétique

- Lorsqu'un courant électrique évolue en présence d'un matériau magnétique (non conducteur de l'électricité), celui-ci est le siège d'une aimantation induite avec un certain retard qui introduit une dissipation (autre que la dissipation Joule des courants induits puisque le matériau est supposé non conducteur) par hystérésis magnétique. Cette dissipation est prise en compte par une résistance électrique dans les dispositifs électromécaniques.

- Au niveau d'un modèle de circuit électrique, cela peut être traduit par l'introduction d'une résistance analogue à celle de l'effet Joule mais qui n'a pas la même origine (typiquement la résistance de pertes fer en parallèle avec l'inductance de magnétisation dans un modèle de transformateur).

- Remarque : Lorsqu'un champ électrique est appliqué à un matériau diélectrique, il y a également un effet de retard qui conduit à des pertes par hystéresis électrique...

Explication (rapide) de l'effet d'hystérésis

- Une relation magnétique avec retard en circuit électrique est

$$\varphi(t) = \ell\, i(t - \tau)$$

où i est le courant électrique et φ le flux magnétique. La tension est

$$\frac{d\varphi}{dt}$$

et la puissance instantanée injectée au composant

$$p = \frac{d\varphi}{dt}\, i$$

Si $i(t)$ est périodique de période T la moyenne temporelle de cette puissance est

$$P = \int_0^T p = \int_0^T \ell\, \frac{d\varphi}{dt}(t - \tau)\, i(t)$$

Explication (rapide) de l'effet d'hystérésis

- Si

$$i(t) = \sqrt{2}\, \Re\{\underline{i}\ \exp^{j\,\omega t}\} \text{ avec } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

la puissance moyenne P devient

$$P = \Re\{j\,\ell\,\omega\ \exp^{-j\,\omega\tau}\ |\underline{i}|^2\} = \ell\,\omega\ \sin\omega\ \tau\ |\underline{i}|^2$$

Une inductance dans laquelle il y a un retard entre le flux magnétique et le courant est dissipative et le taux de dissipation est proportionel à la fréquence.

- Cela peut se modéliser en introduisant une inductance complexe

$$\underline{\ell} = \frac{\ell}{\cos\omega\tau + j\ \sin\omega\tau}$$

car la puissance complexe devient

$$P + j\ Q = j\ \underline{\ell}\,\omega\ |\underline{i}|^2 = \sin\omega\ \tau\ \ell\ |\underline{i}|^2 + j\cos\omega\tau\ \ell\ |\underline{i}|^2$$

D'où une impédance globale

$$Z = \sin\omega\ \tau\ \ell + j\cos\omega\tau\ \ell$$

Approche lagrangienne et dissipation

- Est-il possible d'incorporer la dissipation dans une approche lagrangienne ?

- La réponse n'est pas simple. D'un côté Lanczos, par exemple, explique que les

> Frictional forces [...] which originate from a transfer of macroscopic into microscopic motions demand an increase in the number of degrees of freedom and the application of statistical principles. They are thus automatically beyond the macroscopic variational treatment.

- Et d'un autre côté on peut trouver des moyens de réaliser cette incorporation.

Lagrangien dissipatif dans un cas particulier

- Pour l'exemple d'une masse m en chute libre, sa position étant repérée par x (croissant dans le sens dela force de gravité), si la fonction
$$L = \left(\frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - m\, g\, x\right) \exp^{\frac{\kappa}{m} t}$$
est traitée comme un lagrangien alors l'équation d'Euler-Lagrange est
$$\frac{d}{dt}\left(m\, \dot{x}\ \exp^{\frac{k}{m} t}\right) = -m\, g\ \exp^{\frac{k}{m} t}$$
soit
$$\frac{d}{dt}\left(m\, \dot{x}\ \right) + \kappa\, \dot{x} = -m\, g$$
qui est l'expression obtenue en introduisant une force visqueuse d'intensité
$$\kappa\, \dot{x}$$
- Il a donc été possible de trouver un lagrangien prenant en compte la dissipation.

Cependant pas de lagrangiens dissipatifs en général

- De façon générale, les problèmes dissipatifs résistif ou avec frottement visqueux comportant des ddls découplés les uns des autres admettent un lagrangien prenant en compte cette dissipation.
- Mais c'est plus difficile s'il y a couplage. Par exemple un problème électrique d'inductances couplées de coénergie

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\; l_1\; i_1^2 + \frac{1}{2}\; l_2\; i_2^2 + m\; i_1\; i_2$$

ne semble pas admettre de combinaisons analogues qui permettraient de restituer les équations d'Euler-Lagrange sous la forme souhaitée

$$l_1\; \frac{di_1}{dt} + m\; \frac{di_2}{dt} + r_1\; i_1 = 0 \quad ; \quad l_1\; \frac{di_2}{dt} + m\; \frac{di_1}{dt} + r_2\; i_1 = 0$$

- Aussi cette voie est-elle abandonnée.

Un problème général sans dissipation

► Un tel problème est décrit par un lagrangien L, variable dépendante des positions X, de leurs vitesses $\dot{X}$ et du temps t ; de plus il comporte P_h liaisons holonomes et P_n liaisons non holonomes

$$\forall\, p = 1 \ldots P_h \;:\; f_p(X, t) = 0 \quad ; \quad \forall\, p = 1 \ldots P_n \;:\; g_p(X, \dot{X}, t) = 0$$

► Les équations d'évolution du système sont alors

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) = \nabla_X L + \sum_{p=1}^{P_h} \lambda_p\, \nabla_X f_p + \sum_{p=1}^{P_n} \mu_p\, \nabla_{\dot{X}} g_p \quad ; \quad \frac{dX}{dt} = \dot{X}$$

en introduisant les multiplicateurs de Lagrange λ_p et de Ferrers μ_p.

► Si la dimension de X est N, il y a donc $2 \times N + P_h + P_n$ équations scalaires (différentielles ou algébriques) à $2 \times N$ (X et $\dot{X}$) et $P_h + P_n$ (les λ_p et μ_p) inconnues.

La fonction de dissipation de Rayleigh

- La dissipation de nature visqueuse (cas de Stokes et effet Joule inclu) peut être considérée globalement par la fonction de dissipation de Rayleigh $\mathcal{D}$ qui est la demi-somme de toutes les puissances dissipées. Pour un système décrit par les coordonnées X c'est une variable dépendante de X et de $\dot{X}$.

- Le gradient de cette fonction de Rayleigh par rapport aux vitesses $\dot{X}$ est le vecteur des forces résultant de la dissipation et donc celle-ci est prise en compte si les équations d'évolution précédentes sont modifiées comme

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) = \nabla_X L + \sum_{p=1}^{P_h} \lambda_p \, \nabla_X f_p + \sum_{p=1}^{P_n} \mu_p \, \nabla_{\dot{X}} g_p - \nabla_{\dot{X}} \mathcal{D} \quad ; \quad \frac{dX}{dt} = \dot{X}$$

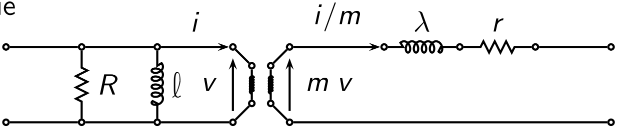
Exemple : le mvt d'une particule entraînée par un fluide

- Un fluide (newtonnien) de densité constante ρ et de viscosité dynamique ν est en mouvement avec un champ de vitesses $\vec{v}(t, \vec{x})$; le mouvement d'une particule sphérique de rayon a, faite d'une matière homogène de densité ρ' et immergée dans ce fluide à la position $\vec{x}$ (dépendant du temps) est déterminé par :
  - l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2$ avec $m = \frac{4}{3}\, \pi\, a^3\, \rho$;
  - l'énergie potentielle (prenant en compte la force d'Archimède) $V = \left(m - \frac{4}{3}\, \pi\, a^3\, \rho'\right)\, g\, \vec{k} \cdot \vec{x}$ où $\vec{k}$ est la direction de la pesanteur ;
  - la fonction de dissipation pour une loi de frottement de Stokes $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\, 6\, \pi\, \nu\, a\, \left(\dot{\vec{x}} - \vec{v}\right)^2$ du mouvement différentiel de la sphère par rapport au fluide.
- Ce qui conduit à

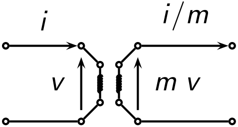
$$m\, \frac{d\dot{\vec{x}}}{dt} = -\left(m - \frac{4}{3}\, \pi\, a^3\, \rho'\right)\, \vec{k} - 6\, \pi\, \nu\, a\, \left(\dot{\vec{x}} - \vec{v}\right)$$

Exemple : le transformateur (de tension) (1/2)

- Le transformateur (de tension) est modélisé par le circuit électrique



où est introduit l'idéogaphie du composant « transformation de tension idéal »



qui multiplie la tension par m et corrélativement divise le courant par m (m est un coefficient sans dimension, pas une mutuelle) corrigé par la présence de l'inductance de magnétisation ℓ, de la résistance de pertes fer R, des inductance de fuite λ et résistance d'effet Joule r (primaire ramené au secondaire).

Le transformateur (de tension) (2/2)

- Les variables de position et de vitesse sont $X = (q_1, q_2, q_3)$, $\dot{X} = (i_1, i_2, i_3)$; le lagrangien est

$$L = \frac{1}{2}\,\ell\, i_2^2 + \frac{1}{2}\,\lambda\, \left(\frac{i_3}{m}\right)^2 + (q_1 + q_2 + q_3)\, E - \frac{q_3}{m}\, e$$

- La fonction de dissipation est

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\, R\, i_1^2 + \frac{1}{2}\, r\, \left(\frac{i_3}{m}\right)^2$$

- Les équations d'évolution sont

$$0 = E - R\, i_1 \quad ; \quad \ell\, \frac{di_1}{dt} = E \quad ; \quad \frac{\lambda}{m^2}\frac{di_3}{dt} = E - \frac{e}{m} - \frac{r}{m^2}\, i_3$$

c'est à dire exactement celles qui auraient pu être obtenues par analyse directe du circuit.

- L'avantage de cette approche est qu'elle permet une systématisation adaptée au calcul symbolique (comme cela a été expliqué Leçon 4).

Exemple : la spire tournante (1/2)

- Un anneau de cuive est placé dans un champ magnétique uniforme d'intensité b ; il possède un degré de liberté θ en rotation autour d'un axe normal à la direction du champ dont il s'agit de prédire l'évolution compte tenu que la dissipation est due à l'effet Joule du courant électrique i généré par ce mouvement.
- Les énergies cinétique et coénergie magnétique sont

$$T = \frac{1}{2}\, J\, \dot{\theta}^2 \; ; \; \overline{W} = \frac{1}{2}\, \ell\, i^2 + b\, s\, \cos\theta\, i$$

où J est le moment d'inertie de l'anneau, s sa surface, ℓ son inductance propre et l'origine de θ est telle que le flux magnétique soit maximum lorsque $\theta = 0$ (la direction du champ est normale au plan de l'anneau).

- La fonction de dissipation est

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{2}\, r\, i^2$$

où r est la résistance de l'anneau.

La spire tournante (2/2)

- Les variables de position sont $X = (q, \theta)$ et les vitesses correspondantes $\dot{X} = (i, \dot{\theta})$, le lagrangien est

$$L = \frac{1}{2}\, J\, \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\, \ell\, i^2 + b\, s\, \cos\theta\, i$$

- Les équations d'évolution sont alors

$$J\, \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -b\, s\, \sin\theta\, i \quad ; \quad \frac{d}{dt}\big(\ell\, i + b\, s\, \cos\theta\big) = -r\, i \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

soit

$$J\, \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -b\, s\, \sin\theta\, i \quad ; \quad l\, \frac{di}{dt} = -r\, i + b\, s\, \dot{\theta}\, \sin\theta \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

L'évolution de l'énergie

- Pour un système (de paramètre de configuration X) régi par un lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps et en présence de dissipations traduites par une fonction de dissipation

$D = \frac{1}{2}\, \dot{X} \cdot \left(D\, \dot{X} \right)$; D une matrice positive (pas nécessairement définie)

les équations d'évolution sont

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) = \nabla_X L - \nabla_{\dot{x}} \mathcal{D} \; ; \; \frac{dX}{dt} = \dot{X}$$

L'impulsion est encore

$$P = \nabla_{\dot{X}} L$$

et il reste possible d'introduire le hamiltonien

$$H = \max_{\dot{x}} \dot{X} \cdot P - L$$

qui permet de réécrire les équations d'évolution comme

$$\frac{dP}{dt} = -\nabla_X H - D\, \nabla_P H \; ; \; \frac{dX}{dt} = \nabla_P H$$

L'évolution de l'énergie

- Le hamiltonien est donc tel que

$$\frac{dH}{dt} = -\nabla_P H \cdot (D \, \nabla_P H)$$

c'est une fonction décroissante du temps.

- Cette décroissance ne cesse que lorsque $\nabla_P H = \dot{X}$ est tel que

$$D \, \dot{X} = 0$$

Lorsque cette condition est remplie, on parle d'équilibre du système :

  - si D est définie en plus d'être positive, l'état est l'immobilité : les coordonnées sont constantes et elles sont telles que

$$\nabla_X H = 0$$

  - si D ne l'est pas, le mouvement peut continuer d'avoir lieu sur les variables qui satisfont $D \, \dot{X} = 0$.

Exemple : la variation d'énergie de la spire tournante

- Si $p_\theta = J\,\dot\theta$ et $\varphi = l\ i + b\ s\ \cos\theta$ sont les impulsions, le hamiltonien de la spire tournante est

$$H = \frac{p_\theta^2}{2\ J} + \frac{(\varphi - b\ s\ \cos\theta)^2}{2\ l}$$

- Il évolue de manière que

$$\frac{dH}{dt} = -r\ \left(\frac{\varphi - b\ s\ \cos\theta}{l}\right)^2$$

- Et donc à l'équilibre

$$\dot\theta = 0\ ;\ i = 0 \longrightarrow \varphi = b\ s \cos\theta$$

la position θ peut être quelconque.

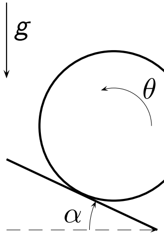
Autres dissipations

- Les autres formes de dissipation de la nature du frottement visqueux newtonnien (ou autres lois encore) admettent encore une fonction de Rayleigh dont la forme est à trouver au cas à cas.
- Le frottement solide introduit une difficulté suplémentaire – la fonction de Rayleigh devient une fonction des coordonnées qui prend une forme différente selon les valeurs de vitesse – qui sans être insurmontable complique l'analyse.
- Mais pour ces deux cas, le plus simple est l'ajout *a postériori* de la force *ad hoc*.
- Cela conduit à écrire

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) &= \nabla_X L + \sum_{p=1}^{P_h} \lambda_p \, \nabla_X f_p + \sum_{p=1}^{P_n} \mu_p \, \nabla_{\dot{X}} g_p - \nabla_{\dot{X}} \mathcal{D} + F \\
\frac{dX}{dt} &= \dot{X}
\end{aligned}
$$

où F est le vecteur des forces de dissipation autres que celles contenue dans la fonction de dissipation.

Exercice 1 : Mouvement d'une boule sur une pente



Une boule de masse m est posée sur une pente, elle est initialement immobile. Les coefficient de frottement de la matière de la boule avec celle de la pente est sont f_0 et f dans les cas statique et dynamique. Avec $f < f_0$.

1- Décrire le mouvement de la boule en supposant que la vitesse v du point de contact est nul. À quelle condition sur α ce mouvement est-il possible ?

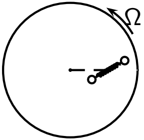
2- Même question lorsque v n'est plus nul.

3- Les conditions de ces deux cas peuvent-elles être simultanément remplies ? Commenter.

4- Écrire un bilan de puissance dans les deux cas.

Exercice 2 : Oscillateur sur un plateau tournant

► Un système est composé de deux masses $m/2$ reliées par un ressort (longueur à vide d_0, raideur k) qui peuvent tourner autour de leur point milieu fixe par rapport à un plateau tournant lui-même à la vitesse angulaire Ω



Le mouvement est dissipatif avec une fonction de dissipation $D = \frac{1}{2}\, r\, \dot{d}^2$ où d est la distance entre les deux masses.

► Étudier le mouvement et notamment chercher les configurations d'équilibre.

► La raison pour laquelle la lune présente toujours la même face à la terre est que si elle tournait sur elle même elle serait soumise à des forces de marée qui la déformeraient périodiquement ; ces forces sont dissipatives et donc au cours du temps elles ont fait disparaître une telle rotation pour autant qu'elle ait existé. Voir l'analogie de l'exercice avec ce phénomène.

Exercice 3 : rotor élémentaire de machine électrique

- Écrire les équations du mouvement de la spire tournante lorsque :

1. le champ magnétique a une direction fixe et une amplitude variable en temps de la forme

$$b = \sqrt{2}\, \Re\{\underline{b}\ \exp^{j\ \omega\ t}\}$$

2. le champ magnétique a une direction variable en temps et une amplitude b constante ; c'est un vecteur tel que si $\vec{k}_x$ et $\vec{k}_y$ sont des vecteurs normaux à l'axe de rotation de la spire

$$\vec{b} = b\ \left(\cos\left(\Omega\ t\right)\ \vec{k}_x + \sin\left(\Omega\ t\right)\ \vec{k}_y\right)$$

3. le champ magnétique a à la fois une direction variable en espace et en temps

$$\vec{b} = \sqrt{2}\, \Re\{\underline{b}\ \exp^{j\ \omega\ t}\}\ \left(\cos\Omega\ t\ \vec{k}_x + \sin\Omega\ t\ \vec{k}_y\right)$$