Mécanique et électricité analytiques

Leçon 8

Liaisons holonomes et non holonomes

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

16 novembre 2015

Objectifs de la leçon

- Initier aux mécanismes comportant des ddls liés ;

- Introduire les liaisons holonomes qui conduisent à une modification *a priori* du lagrangien avant de lui appliquer l'opérateur d'Euler-Lagrange ;

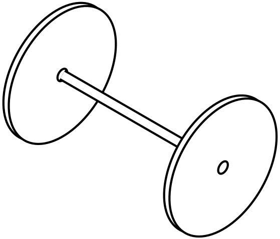
- Introduire les liaisons non-holonomes par la méthode de Ferrers qui conduit à une modification *a postériori* des équations d'Euler-Lagrange.

- Montrer qu'une liaison holonome peut être traitée comme une liaosn non-holonome sans risque.

Exemple emblématique : Un train posé sur un plan

- Un système composé de deux roues circulaires jointes l'une à l'autre par un axe qui est leur axe de symétrie axisymétrique et autour duquel elles peuvent tourner librement est un train.

- Un tel train est posé sur un plan rugueux, éventuellement incliné, pour lequel la vitesse du point de contact des roues avec le plan est nulle.



Liaison holonome

- Les deux roues ont pour rayon R ; la longueur de l'axe est d ;

- les coordonnées des centres des deux roues sont : (x_1, y_1, R), (x_2, y_2, R) ; les angles de rotation de chacune des roues sont θ_1, θ_2 ;

- La première relation entre ces 6 paramètres est

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2$$

ce qui suggère de poser

$$\begin{array}{lcl} x_1 = x - \frac{d}{2}\,\cos\phi & ; & y_1 = y - \frac{d}{2}\,\sin\phi \\ x_2 = x + \frac{d}{2}\,\cos\phi & ; & y_2 = y + \frac{d}{2}\,\sin\phi \end{array}$$

et donc de considérer les 5 paramètres $x, y, \phi, \theta_1, \theta_2$.

- une relation algébrique entre les paramètres d'un système s'appelle une liaison holonome ; ce type de liaison permet généralement de trouver une paramétrisation (comme celle-ci) qui réduit le nombre de paramètres à considérer.

Condition de non-glissement

- Après viennent les relations de non-glissement aux points de contact des deux roues.

- Le vecteur de vitesse de rotation de la roue No 1 est (cf. leçon no 3)
$$\vec{\Omega}_1 = \dot{\theta}_1 \, (\cos\phi \, \vec{k}_x + \sin\phi \, \vec{k}_y) + \dot{\phi} \, \vec{k}_z$$
et donc la vitesse de son point de contact est
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 \, \vec{k}_x + \dot{y}_1 \, \vec{k}_y + \vec{\Omega}_1 \times (-R \, \vec{k}_z) &= \left(\dot{x} + \tfrac{d}{2} \, \sin\phi \, \dot{\phi} - R \, \sin\phi \, \dot{\theta}_1\right) \, \vec{k}_x \\ &+ \left(\dot{y} - \tfrac{d}{2} \, \cos\phi \, \dot{\phi} + R \, \cos\phi \, \dot{\theta}_1\right) \, \vec{k}_y \end{aligned}$$

- La condition de non glissement de la roue No 1 s'écrit donc
$$\dot{x} + \sin\phi \, \left(\tfrac{d}{2} \, \dot{\phi} - R \, \dot{\theta}_1\right) = 0 \quad ; \quad \dot{y} + \cos\phi \, \left(-\tfrac{d}{2} \, \dot{\phi} + R \, \dot{\theta}_1\right) = 0$$

Liaison non-holonome

- Les relations

$$\dot{x} + \sin\phi\ \left(\tfrac{d}{2}\ \dot{\phi} - R\ \dot{\theta}_1\right) = 0 \quad ; \quad \dot{y} + \cos\phi\ \left(-\tfrac{d}{2}\ \dot{\phi} + R\ \dot{\theta}_1\right) = 0$$

ne sont pas intégrables, i.e., pour la première par exemple, il n'existe pas de fonction $f(x, \phi, \theta_1)$ telle que

$$f(x, \phi, \theta_1) = 0 \Longrightarrow \dot{x} + \sin\phi\ \left(\frac{d}{2}\ \dot{\phi} - R\ \dot{\theta}_1\right) = 0$$

- Si une telle fonction existait alors

$$\partial_x f\ \dot{x} + \partial_\phi f\ \dot{\phi} + \partial_{\theta_1} f\ \dot{\theta}_1 = 0 \Longrightarrow \dot{x} + \sin\phi\ \left(\frac{d}{2}\ \dot{\phi} - R\ \dot{\theta}_1\right) = 0$$

et donc on pourrait trouver une variable (un facteur intégrant) λ dépendante de x, ϕ, θ_1 telle que

$$\partial_x f = \lambda \quad ; \quad \partial_\phi f = \lambda\ \tfrac{d}{2}\ \sin\phi \quad ; \quad \partial_{\theta_1} f = -\lambda\ R\ \sin\phi$$

mais on n'en trouve pas.

Liaison non-holonome

► Un mouvement pour lequel x et y décrivent entièrement un cercle dont le centre est situé sur l'axe joignant les centres des roues et de rayon quelconque est compatible avec les relations

$$\dot{x} + \sin\phi \, \left(\tfrac{d}{2} \, \dot{\phi} - R \, \dot{\theta}_1 \right) = 0 \quad ; \quad \dot{y} + \cos\phi \, \left(-\tfrac{d}{2} \, \dot{\phi} + R \, \dot{\theta}_1 \right) = 0$$

Le choix d'un rayon $\mathcal{R} + d/2$ autour d'un centre dans le prolongement de l'axe du côté opposé à la seconde roue conduit à ce que, au bout d'un tour, x et ϕ reviennent à leur position ; mais la position θ_1 devient

$$\theta_1 + 2\pi \frac{\mathcal{R}}{R}$$

comme $\mathcal{R}$ est *a priori* quelconque, il faudrait que cette fonction f satisfasse à

$$\forall \, \theta_1 \; : \; f(x, \phi, \theta_1) = 0$$

elle ne peut pas dépendre de θ_1 ce qui est incompatible avec $\partial_{\theta_1} f = -\lambda \, R \, \sin\phi$ (sauf pour $\lambda = 0$ qui conduit à un cas trivial non significatif).

► Une relation non-intégrable entre les paramètres d'un système s'appelle une liaison non-holonome.

Liaison non-holonome : calcul

- $x = -(\mathcal{R} + d/2)\ cos\phi\,;\ y = -(\mathcal{R} + d/2)\ sin\phi$
$\Rightarrow \dot{x} = (\mathcal{R} + d/2)\ sin\phi\ \dot{\phi}\,;\ \dot{y} = -(\mathcal{R} + d/2)\ cos\phi\ \dot{\phi}$

- d'où

$$\dot{x} + \sin\phi\ \left(\frac{d}{2}\ \dot{\phi} - R\ \dot{\theta}_1\right) = 0 \quad ; \quad \dot{y} + \cos\phi\ \left(-\frac{d}{2}\ \dot{\phi} + R\ \dot{\theta}_1\right) = 0$$

devient

$$\mathcal{R}\ \sin\phi\ \dot{\phi} - R\ \sin\phi\ \dot{\theta}_1 = 0 \quad ; \quad -\mathcal{R}\ \cos\phi\ \dot{\phi} + R\ \cos\phi\ \dot{\theta}_1 = 0$$

soit

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\mathcal{R}}{R}\ \dot{\phi} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\mathcal{R}}{R}\ \phi + \text{Cste}$$

Les liaisons non-holonomes peuvent contenir des liaisons holonomes

- En ajoutant celles de la roue No 2, il y a 4 liaisons non-holonomes quand elles sont considérées une à une

$$\dot{x} + \sin\phi \left(\frac{d}{2}\,\dot{\phi} - R\,\dot{\theta}_1\right) = 0 \quad ; \quad \dot{y} + \cos\phi \left(-\frac{d}{2}\,\dot{\phi} + R\,\dot{\theta}_1\right) = 0$$
$$\dot{x} - \sin\phi \left(\frac{d}{2}\,\dot{\phi} + R\,\dot{\theta}_2\right) = 0 \quad ; \quad \dot{y} + \cos\phi \left(\frac{d}{2}\,\dot{\phi} + R\,\dot{\theta}_2\right) = 0$$

- Mais cela ne signifie pas qu'il soit impossible de les combiner entre elles pour faire émerger des liaisons holonomes entre certains des paramètres. De fait en soustrayant la première de la seconde ligne on trouve

$$d\,\dot{\phi} = R\,(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

qui s'intégre en

$$d\,(\phi - \phi_0) = R\,(\theta_1 - \theta_2)$$

en convenant qu'initialement

$$\phi = \phi_0 \quad ; \quad \theta_1 = 0 \quad ; \quad \theta_2 = 0$$

Les degrés de liberté du train

- Après avoir pris en compte la liaison holonome (qui compte pour deux) entre les vitesses angulaires, les liaisons non-holonomes restantes sont

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R\ \sin\left(\frac{R}{d}(\theta_1 - \theta_2) + \phi_0\right) \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{2} \\ \dot{y} &= -R\ \cos\left(\frac{R}{d}(\theta_1 - \theta_2) + \phi_0\right) \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{2} \end{aligned}$$

et elles sont irréductibles.

- Le système formé d'un train qui roule sans glisser sur un plan comporte donc deux degrés de liberté θ_1 et θ_2 dont il s'agit de calculer l'évolution temporelle et qui permettent de reconstruire les autres paramètres directement par

$$\phi = \phi_0 + \frac{R}{d}\ (\theta_1 - \theta_2)$$

pour ϕ et par intégration des EDOs ci-dessus pour x et y.

Énergie cinétique du train

- L'énergie cinétique du train est ($\vec{d} = \cos\phi\ \vec{k}_x + \sin\phi\ \vec{k}_y$)

$$
\begin{array}{rcll}
T & = & \frac{1}{2}\,(2\,M + m)\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) & \text{(translation)} \\
 & + & \frac{1}{2}\,j\,\dot{\phi}^2 & \text{(rotation de l'axe autour de } \vec{k}_z\text{)} \\
 & + & \frac{1}{2}\,J\,(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) & \text{(rotation des roues autour de } \vec{d}\text{)} \\
 & + & 2\,\frac{1}{2}\,J'\,\dot{\phi}^2 & \text{(rotation des roues autour de } \vec{k}_z\text{)}
\end{array}
$$

où M et m sont les masses d'une roue et de l'axe joignant les deux roues et

$$J = M\,\frac{R^2}{2}$$ (moment d'inertie d'une roue par rapport à l'axe passant par son centre et dirigés suivant $\vec{d}$)

$$J' = M\,\frac{R^2}{4}$$ (moment d'inertie d'une roue par rapport à l'axe passant par son centre et dirigés suivant $\vec{k}_z$)

$$j = m\,\frac{d^2}{12}$$ (moment d'inertie par rapport à l'axe passant par son centre et dirigé suivant $\vec{k}_z$.)

- soit donc, en utilisant les liaisons,

$$T = \frac{1}{2}\,M\,\frac{R^4}{2\,d^2}\,(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}\left(M + \tfrac{m}{3}\right)\,R^2\,(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\,\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2)$$

Mouvement libre du train sur un plan horizontal

- L'énergie cinétique ne dépend que des dérivées des degrés de liberté [1] et donc, si $L = T$, l'écriture des équations d'Euler-Lagrange conduit donc à la conclusion que $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ sont des constantes :

$$\theta_1 = \dot{\theta}_1\ t \ \ ; \ \ \theta_2 = \dot{\theta}_2\ t \quad \text{d'où } \dot{\phi} = \frac{R}{d}\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right) = \text{Cste}$$

- Il ne reste alors qu'à intégrer

$$\dot{x} = R\ \sin\left(\dot{\phi}\ t + \phi_0\right)\ \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{2}\ ;\ \dot{y} = -R\ \cos\left(\dot{\phi}\ t + \phi_0\right)\ \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{2}$$

Soit donc, dans le cas $\dot{\theta}_1 \neq \dot{\theta}_2$: une rotation

$$x = -\frac{R}{2}\ \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2}\ \cos\left(\dot{\phi}\ t + \phi_0\right) + x_0\ ;\ y = -\frac{R}{2}\ \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2}\ \sin\left(\dot{\phi}\ t + \phi_0\right) + y_0$$

et dans le cas $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$: une translation

$$x = R\ \dot{\theta}_1\ \sin\phi_0\ t\ ;\ y = -R\ \dot{\theta}_1\ \cos\phi_0\ t$$

1. C'est vrai dans le cas de l'exemple, mais ça pourrait ne pas être le cas.

Yet another change of variables

► Il paraissait naturel au début de l'analyse de choisir θ_1 et θ_2 comme variables, mais les résultats de cette analyse font apparaître qu'il serait plus astucieux de choisir ϕ et

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

Ainsi, l'énergie cinétique s'écrit

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\left(M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{d^2}{4} \right) + m \, \frac{d^2}{12} \right)}_{= \; J_\phi} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{(m + 3 \; M) \; R^2}_{= \; J_\theta} \dot{\theta}^2$$

et les liaisons

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \frac{d}{2 \; R}(\phi - \phi_0) \quad &; \quad \theta_2 &= \theta - \frac{d}{2 \; R}(\phi - \phi_0) \\ \dot{x} &= R \; \dot{\theta} \; \sin\phi &; \quad \dot{y} &= -R \; \dot{\theta} \; \cos\phi \end{aligned}$$

► Il est tout à fait courant de changer de variables en cours d'analyse d'un problème ; parce que les étapes font souvent apparaître des groupements qui n'étaient pas visibles au départ.

Les liaisons et les multiplicateurs de Lagrange

- L'étape suivante dans les investigations sur le mouvement du train sera de supposer qu'il est disposé sur un plan incliné. Cela introduit les variables x ou y dans le lagrangien et leur présence oblige à prendre explicitement en compte les liaisons non-holonome lors du calcul du mouvement.

- La méthode utilisée est celle de Ferrers où les contraintes non-holonomes sont introduites par une méthode qui ressemble à celle des multiplicateurs de Lagrange mais qui est sensiblement différente de la méthode des multiplicateurs de Lagrange applicable dans le cas des liaisons holonome.

- La méthode des multiplicateurs de Ferrers est souvent appelée méthode des multiplicateurs de Lagrange...

Liaison holonome (1/3)

- Un problème général où le lagrangien L dépendant des variables X et $\dot{X}$ est donné et ce problème comporte une liaison holonome

$$f(X) = 0$$

entre les variables de l'espace de configuration.

- En l'absence de liaisons, le mouvement X ayant lieu entre les instants t_0 et t_1, tel que $X(t_0) = X_0$ et $x(t_1) = t_1$ stationnarise la fonctionnelle d'action, soit donc

$$\forall\ \delta X\ :\ \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{X}} L \right) + \nabla_X L \right) \cdot \delta X\ dt = 0$$

- Mais la présence d'une liaison modifie les circonstances pour lesquelles cette stationnarisation a lieu, il faut que la liaison soit respectée

$$\begin{array}{lcl} \text{par } X & : & f(X) = 0 \\ \text{mais aussi par } X + \delta X & : & \nabla_X f \cdot \delta X = 0 \ \text{ (à l'ordre 1)} \end{array}$$

l'ordre 2 et les ordres successifs n'étant pas considérés.

Liaison holonome (2/3)

- Les conditions portant sur X sont alors

$$f(X) = 0$$
$$\forall\ \delta X \text{ tel que } \nabla_X f \cdot \delta X = 0\ :\ \int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{X}} L \right) + \nabla_X L \right) \cdot \delta X\ dt = 0$$

- Si X est tel que $f(X) = 0$ et si

$$\exists\ \lambda\ \ (\text{dépendant de } t) \text{ tel que } -\frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{X}} L \right) + \nabla_X L = \lambda\ \nabla_X f$$

alors les conditions de stationnarisation sont satisfaites.

- Cette condition est suffisante, il reste à montrer qu'elle est nécessaire ; mais la technique relève d'un cours de mathématique sur le calcul des variations et on se contente de l'admettre.

Liaison holonome (3/3)

- Le résultat peut être synthétisé en modifiant le lagrangien comme

$$L_{\text{mod}} = L - \lambda\, f(X)$$

où λ est appelé le multiplicateur de Lagrange associé à la liaison $f(X) = 0$. L'écriture des équations d'Euler-Lagrange se fait par rapport au jeu de variables $(X, \dot{X})$ et $(\lambda, \dot{\lambda})$, soit par rapport à

$$\begin{aligned} (X, \dot{X}) &\quad : \quad \frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) = \nabla_X L - \lambda \nabla_X f \\ (\lambda, \underbrace{\dot{\lambda}}_{\text{non présent}}) &\quad : \quad 0 = -f(X) \end{aligned}$$

- La liaison apparaît alors comme interne au mécanisme lagrangien : le lagrangien est modifié par ajout du terme $-\lambda\, f$ où λ est une nouvelle variable (de position) dont la vitesse $\dot{\lambda}$ n'est pas présente mais le couple $(\lambda, \dot{\lambda})$ est cependant traité comme un dll supplémentaire au problème.

Liaison non-holonome : méthode de Ferrers

- Le cas de la liaison non-holonome suivant le traitement qu'en a fait Ferrers est complétement différent de de celui de la liaison holonome.
- Un problème général où le lagrangien L dépend des variables X et $\dot{X}$ est donné et ce problème comporte une liaison non-holonome

$$f(\dot{X}, X) = 0$$

entre les variables de l'espace de configuration.
- Les équations d'Euler-Lagrange en l'absence de cette liaison sont

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) = \nabla_X L$$

La présence de la liaison sera prise en compte en modifiant ces équations d'Euler-Lagrange comme

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) = \nabla_X L + \lambda \, \nabla_{\dot{X}} f$$

où λ, qui est encore appelé un multiplicateur de Lagrange, est une variable à éliminer entre ces équations.

Liaison non-holonome : Explication de la méthode

- En l'absence de liaison, l'équation d'Euler-Lagrange, soit obtenue par le principe de d'Alembert soit à partir de la stationnarisation de la fonctionnelle d'action, est obtenue à partir d'une étape où

$$\forall\, \delta\dot{X}\ :\ \left(\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) - \nabla_X L\right)\cdot \delta\dot{X} = 0$$

- En présence d'une liaison $f(\dot{X},\dot{X}) = 0$, la vitesse virtuelle $\delta\dot{X}$ n'est plus quelconque mais elle doit pour chaque position X fixe satisfaire à

$$\delta\dot{X}\cdot\nabla_{\dot{X}} f = 0$$

afin que f ne varie pas lorsque $\dot{X}$ varie.

- Cela se traduit par l'orthogonalité de $\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) - \nabla_X L$ par rapport à tous les vecteurs orthogonaux à $\nabla_{\dot{X}} f$, d'où la proportionalité par rapport à $\nabla_{\dot{X}} f$

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) - \nabla_X L = \lambda\, \nabla_{\dot{X}} f$$

Mouvement libre du train sur un plan incliné (1/2)

► Si le plan est incliné selon $\vec{k}_x$ d'une pente α, le lagrangien s'écrit

$$L = T - V \text{ avec } T = \frac{1}{2}\, J_\phi\, \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\, J_\theta\, \dot{\theta}^2 \text{ et } V = -\underbrace{(2\, M + m)}_{\mathcal{M}}\, g \text{ tg}\alpha\, x$$

Il comporte le paramètre x qui est lié aux degrés de liberté ϕ et θ par la liaison non holonome de non glissement

$$f(\phi, \dot{\theta}, \dot{x}) = \dot{x} - R\, \dot{\theta}\, \sin\phi = 0$$

► Le mouvement avec prise en compte de cette liaison non-holome par la méthode de Ferrers est alors

$$\begin{array}{lcl}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}} & \longrightarrow & J_\phi\, \ddot{\phi} = 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} & \longrightarrow & J_\theta\, \ddot{\theta} = -\lambda\, R\, \sin\phi \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} & \longrightarrow & 0 = \lambda + \mathcal{M}\, g \text{ tg}\alpha
\end{array}$$

On constate que le multiplicateur λ s'élimine sans problème.

Mouvement libre du train sur un plan incliné (2/2)

- Les équations du mouvement sont donc

$$J_\phi \, \ddot{\phi} = 0 \quad ; \quad J_\theta \, \ddot{\theta} = -\mathcal{M} \, g \, \mathrm{tg}\alpha \, R \, \sin\phi$$

d'où

$$\phi = \dot{\phi}_0 \, t + \phi_0$$
$$\theta = \begin{cases} -\dfrac{\mathcal{M} \, g \, \mathrm{tg}\alpha \, R \, \sin\phi_0}{J_\theta} \, t^2 + \dot{\theta}_0 \, t + \theta_0 & \text{si} \quad \dot{\phi}_0 = 0 \\ \frac{\mathcal{M} \, g \, \mathrm{tg}\alpha \, R}{J_\theta \, \dot{\phi}_0^{\,2}} \, \sin\left(\dot{\phi}_0 \, t + \phi_0\right) + \dot{\theta}_0 \, t + \theta_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Le train peut avoir un mouvement de translation ou de rotation suivant les valeurs initiales des angles.

Les liaisons holonomes comprises comme non-holonomes

- Le problème général où le lagrangien L dépendant des variables X et $\dot{X}$ est donné et ce problème comporte une liaison holonome

$$f(X) = 0$$

entre les variables de l'espace de configuration est repris.

- Mais il se trouve que la liaison holonome n'apparaît pas comme telle mais sous une forme dérivée, soit

$$\nabla_X f \cdot \dot{X} = 0$$

qui n'est pas reconnue comme intégrable et donc est interprétée comme une liaison non holonome.

- La question se pose de savoir ce qui arrive alors.

Les liaisons holonomes comprises comme non-holonomes

- La méthode de Ferrers conduit à

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{X}} L\right) = \nabla_X L + \lambda \nabla_X f$$

- Au signe près sur λ (ce qui est sans importance puisque λ est une variable à calculer et donc que le resultat s'accordera avec le signe donné), c'est exactement la relation qui aurait été obtenue avec la méthode de Lagrange pour les contraintes holonomes.

- Il est donc neutre de ne pas savoir reconnaître l'holonomie dans les liaisons non-holonomes.

Les liaisons holonomes comprises comme non-holonomes

- Par exemple si le problème du train est repris sous sa forme première et dans le cas du mouvement sur un plan horizontal

$$L = T = \frac{1}{2}\ \underbrace{(2\ M + m)}_{\mathcal{M}}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\, j\ \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\, J\ (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + J'\ \dot{\phi}^2$$

où les liaisons sont

$$\begin{array}{lcl} \dot{x} + \sin\phi\ \left(\frac{d}{2}\ \dot{\phi} - R\ \dot{\theta}_1\right) = 0 & ; & \dot{y} + \cos\phi\ \left(-\frac{d}{2}\ \dot{\phi} + R\ \dot{\theta}_1\right) = 0 \\ \dot{x} - \sin\phi\ \left(\frac{d}{2}\ \dot{\phi} + R\ \dot{\theta}_2\right) = 0 & ; & \dot{y} + \cos\phi\ \left(\frac{d}{2}\ \dot{\phi} + R\ \dot{\theta}_2\right) = 0 \end{array}$$

- La méthode de Ferrers conduit à

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M}\ \ddot{x} = \lambda_1 + \lambda_3 & \mathcal{M}\ \ddot{y} = \lambda_2 + \lambda_3 \\ J\ \ddot{\theta}_1 = -R\sin\phi\ \lambda_1 + R\ \cos\phi\ \lambda_2 & J\ \ddot{\theta}_2 = R\sin\phi\ \lambda_3 + R\ \cos\phi\ \lambda_4 \\ (j + 2\ J')\ \ddot{\phi} = \frac{d}{2}(\lambda_1\ \sin\phi - \lambda_2\ \cos\phi - \lambda_3\ \sin\phi + \lambda_2\ \cos\phi) & \end{array}$$

où les multiplicateurs λ_i sont des inconnues.

Méthode de résolution (1/3)

- La méthode de résolution consiste à déjà éliminer les 4 inconnues λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 entre les 5 équations

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{M}\ \ddot{x} = \lambda_1 + \lambda_3 & \mathcal{M}\ \ddot{y} = \lambda_2 + \lambda_3 \\
J\ \ddot{\theta}_1 = -R \sin\phi\ \lambda_1 + R\ \cos\phi\ \lambda_2 & J\ \ddot{\theta}_2 = R \sin\phi\ \lambda_3 + R\ \cos\phi\ \lambda_4 \\
\multicolumn{2}{l}{(j + 2\ J')\ \ddot{\phi} = \frac{d}{2}(\lambda_1\ \sin\phi - \lambda_2\ \cos\phi - \lambda_3\ \sin\phi + \lambda_2\ \cos\phi)}
\end{array}
$$

Cela produit 5-4=1 équation (cf. script maxima)

$$
j\ \ddot{\phi} + \frac{d}{2}\ \cos\phi\ M\ \ddot{y} - \frac{d}{2}\ \sin\phi\ M\ \ddot{x} - \frac{d}{R}\ J\ \ddot{\theta}_2 = 0
$$

qui dépend entre autre des dérivées secondes de x, y, θ_2, ϕ (et aussi de θ_1 même si dans ce cas l'équation obtenue n'en dépend pas) ;

Méthode de résolution (2/3)

- L'équation obtenue contient les dérivées secondes des variables x, θ_2, ϕ (et θ_1, y) ; il faut alors privilégier une variable, par exemple ϕ et éliminer les autres dérivées secondes à partir des relation obtenue en dérivant les liaisons, soit

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} + \sin\phi \left(\frac{d}{2}\,\ddot{\phi} - R\,\ddot{\theta}_1\right) + \cos\phi\,\dot{\phi}\left(\frac{d}{2}\,\dot{\phi} - R\,\dot{\theta}_1\right) = 0\\
&\ddot{y} + \cos\phi \left(-\frac{d}{2}\,\ddot{\phi} + R\,\ddot{\theta}_1\right) - \sin\phi\,\dot{\phi}\left(-\frac{d}{2}\,\dot{\phi} + R\,\dot{\theta}_1\right) = 0\\
&\ddot{x} - \sin\phi \left(\frac{d}{2}\,\ddot{\phi} + R\,\ddot{\theta}_2\right) - \sin\phi\,\dot{\phi}\left(\frac{d}{2}\,\dot{\phi} + R\,\dot{\theta}_2\right) = 0\\
&\ddot{y} + \cos\phi \left(\frac{d}{2}\,\ddot{\phi} + R\,\ddot{\theta}_2\right) - \sin\phi\,\dot{\phi}\left(\frac{d}{2}\,\dot{\phi} + R\,\dot{\theta}_2\right) = 0
\end{aligned}
$$

Cela amène à une équation

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(2\,d\,\sin^2\phi - d\right)\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}_2 + d\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}_1\right)\,M\,R^3\\
&+\left(\left(\left(2\,d^2\,\sin^2\phi - d^2\right)\,\left(\dot{\phi}\right)^2 - d^2\,\cos\phi\,\sin\phi\,\ddot{\phi}\right)\,M - 4\,j\,\cos\phi\,\sin\phi\,\ddot{\phi}\right)\,R^2\\
&+\left(\left(4\,d\,\sin^2\phi - 2\,d\right)\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}_2 + 2\,d\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}_1\right)\,J\,R + \left(\left(4\,d^2\,\sin^2\phi - 2\,d^2\right)\,\left(\dot{\phi}\right)^2 - 4\,d^2\,\cos\phi\,\sin\phi\,\ddot{\phi}\right)\,J = 0
\end{aligned}
$$

qui dépend de $\ddot{\phi}$, $\dot{\phi}$, ϕ et des dérivées premières de x, y, θ_1 et θ_2

Méthode de résolution (2/3)

- Les liaisons

$$\dot{x} + \sin\phi \left(\frac{d}{2}\,\dot{\phi} - R\,\dot{\theta}_1\right) = 0 \quad ; \quad \dot{y} + \cos\phi \left(-\frac{d}{2}\,\dot{\phi} + R\,\dot{\theta}_1\right) = 0$$
$$\dot{x} - \sin\phi \left(\frac{d}{2}\,\dot{\phi} + R\,\dot{\theta}_2\right) = 0 \quad ; \quad \dot{y} + \cos\phi \left(\frac{d}{2}\,\dot{\phi} + R\,\dot{\theta}_2\right) = 0$$

sont finalement utilisées pour éliminer les dérivées premières de x, y, θ_1 et θ_2, et l'équation obtenue est

$$\ddot{\phi} = 0$$

qui est celle qui était attendue.

- Pour obtenir les expressions des 4 autres variables, il suffit d'intégrer les liaisons.

- Les calculs peuvent sembler très lourds, mais dès lors que la possibilité d'utiliser un outil de calcul symbolique est envisagée ce sentiment se dissipe.

la nature des liaisons

- L'exercice 3 de la leçon 2 avait mis en évidence qu'une liaison holonome était le cas limite d'un mouvement libre comportant un potentiel pouvant devenir très grand dès lors que l'équation de la liaison n'était pas satisfaite.

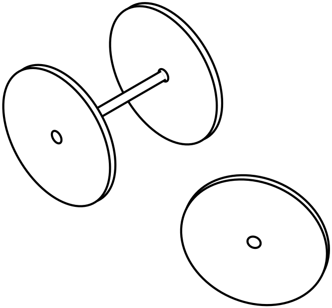
$$F(X) = 0 \Longleftrightarrow V = \frac{F(X)^2}{\epsilon} \text{ avec } \epsilon \text{ petit}$$

De façon générale une telle liaison peut toujours être interprétée ainsi.

- De la même façon une liaison non-holonome est le cas limite d'un mouvement avec frottement lorsque le coefficient de frottement est très grand. Ce point sera repris dans la leçon 9 sur la dissipation.

Exercice No 1 : Équations du mouvement d'un tricycle

- Un tricycle est un train auquel est raccordé une roue mobile en rotation, dont le moyeux est dans le plan médian aux moyeux des deux roues du train et à distance fixe de son axe



Introduire les variables de configuration et les liaisons et décrire le mouvement libre du tricycle.

Exercice No 2 : mouvement d'une sphère roulant sans glisser sur un plan horizontal

- Écrire les équations du mouvement d'une sphère homogène roulant sans glisser sur un plan horizontal en utilisant les angles d'Euler.

- Montrer que les mouvements de translation du centre de gravité et de rotation de la sphère sont indépendants.

Exercice No 3 : mouvement d'un cylindre à section elliptique posé sur un plan horizontal

- Écrire les équations du mouvement d'un cylindre à section elliptique posé sur un plan horizontal.