Mécanique et électricité analytiques

Leçon 6

Électromécanique hamiltonienne

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

17 septembre 2014

Objectifs de la leçon

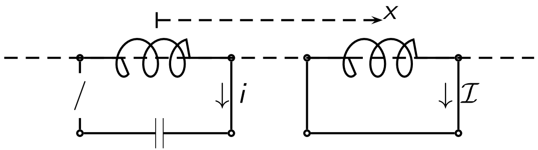
- Introduire les éléments de modélisation des systèmes électro-mécanique en l'absence de dissipation.

- Exploiter le formalisme lagrangien pour produire des modèles électromécaniques sans utliser directement les forces de Laplace et pression magnétiques.

- Les aimants et le magnétisme induit sont introduits pour ne pas limiter la portée de l'électromécanique au domaine des circuits électriques dans le vide.

Exemple emblématique : canon électromagnétique [1]

Une idéalisation de canon électromagnétique consiste en deux bobines coaxiales : l'une, fixe, est mise en série avec un condensateur et un interrupteur ; l'autre, mobile le long de l'axe, est fermée sur elle-même.



Le condensateur est chargé et l'interrupteur est fermé à l'instant initial.

La bobine mobile est alors éjectée dans la direction opposée à la position de la bobine fixe.

1. voir par exemple http://www.youtube.com/watch?v=Pl7KyVIJ1iE&feature=endscreen&NR=1

Analyse : bobine mobile immobilisée (1/2)

► Le condensateur a une valeur de capacité c. Les inductances propre et mutuelle des deux bobines sont l_f, l_m et m ; l_f et l_m sont constantes alorss que m est une fonction (décroissante et paire) de x. La masse de la bobine mobile est M. Les coénergie magnétique et énergie cinétique sont

$$\overline{W} = \tfrac{1}{2}\,(i\;\mathcal{I})\begin{pmatrix} l_f & m \\ m & l_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{ et } T = \tfrac{1}{2}\,M\,\dot{x}^2$$

► Si la bobine mobile restait immobile (en $x = x_0$ sa position initiale) le problème électrique serait traité comme indiqué leçon 5 : le lagrangien serait

$$L_{\text{él.}} = \overline{W} - \frac{q^2}{2\,c}$$

C'est une variable *a priori* dépendante des courant i et $\mathcal{I}$ et des charges correspondantes q et Q. Mais L ne dépend pas de Q qui est donc une variable ignorable ; le flux $\Phi = m\,i + l_m\,\mathcal{I}$ correspondant au courant $\mathcal{I}$ est donc constant.

Analyse : bobine mobile immobilisée (2/2)

- Compte tenu qu'à l'instant initial $i = \mathcal{I} = 0$,

$$m\ i + l_m\ \mathcal{I} = 0 \Longrightarrow \mathcal{I} = -\frac{m}{l_m}\ i$$

et le lagrangien devient

$$L_{\text{él.}} = \tfrac{1}{2}\ l_f\ \underbrace{\left(1 - \frac{m^2}{l_m\ l_f}\right)}_{=\sigma}\ i^2 - \frac{q^2}{2\ c}$$

C'est une variable dépendante de q et i.

- L'équation d'Euler-Lagrange est

$$\frac{d}{dt}(l_f\ \sigma\ i) = -\frac{q}{c} \quad \text{avec} \quad \frac{dq}{dt} = i$$

qui permet le calcul de q et i avec les conditions initiales

$$i(t=0) = 0 \quad ; \quad q(t=0) = q_0$$

Analyse : bobine mobile (1/3)

- Si maintenant la bobine mobile est laissée libre de se mouvoir, rien ne change dans l'analyse précédente. Par contre m et donc σ dépend de la position x. Si la loi d'évolution de cette dernière variable était connue l'équation d'Euler-Lagrange pourrait être réécrite comme

$$\frac{d}{dt}(l_f\ i) = -\frac{q}{c\ \sigma} - l_f\ \frac{1}{\sigma}\ \frac{d\sigma}{dx}\ \dot{x}\ i \quad \text{avec} \quad \frac{dq}{dt} = i$$

ce qui autoriserait le calcul de q et i à condition que la dépendance temporelle de x soit connue.

- Le hamiltonien correspondant au lagrangien électrique est

$$H_{\text{él}} = \tfrac{1}{2}\frac{\varphi^2}{\sigma\ l_f} + \frac{q^2}{2\ c}$$

$\varphi = \sigma\ l_f\ i$ étant le flux magnétique conjugué (dans la transformation de Legendre) du courant électrique i.

Analyse : bobine mobile (2/3)

▶ Ce hamiltonien dépend explicitement du temps puisque σ dépend de x qui dépend elle-même du temps et

$$\frac{DH_{\text{él}}}{Dt} = \frac{\partial H_{\text{él}}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2}\,\frac{d\sigma}{dx}\,\dot{x}\,\frac{\varphi^2}{l_f} = -\underbrace{\frac{1}{2}\,l_f\,\frac{d\sigma}{dx}\,\dot{x}}_{=\,R_m}\,i^2$$

Le terme R_m peut s'interpréter comme une résistance[2] mais comme une résistance dépendant du temps (qui s'appelle une résistance motionnelle). Et la quantité

$$R_m\,i^2$$

est le taux de variation par unité de temps de l'énergie électromagnétique du système constitué par les deux bobines et le condensateur qui, puisque $i(t=0) = \mathcal{I}(t=0) = 0$, est initialement $\mathcal{E}_0 = \frac{q_0^2}{2\,c}$ et finit par s'annuler.

2. En anticipant sur la leçon 9.

Analyse : bobine mobile (3/3)

- L'énergie électromagnétique diminue donc, mais c'est au profit de l'augmentation en quantité égale de l'autre énergie du problème qui est l'énergie cinétique T de la bobine mobile, donc

$$\frac{DT}{Dt} = R_m \; i^2 = \tfrac{1}{2} \; l_f \; \frac{d\sigma}{dx} \; \dot{x} \; i^2$$

d'où la relation

$$M \; \dot{x} \; \frac{d\dot{x}}{dt} = \tfrac{1}{2} \; l_f \; \frac{d\sigma}{dx} \; \dot{x} \; i^2$$

qui doit être vérifiée pour toute vitesse $\dot{x}$ et donc conduit à

$$M \; \frac{d\dot{x}}{dt} = \tfrac{1}{2} \; l_f \; \frac{d\sigma}{dx} \; i^2$$

C'est la loi de mouvement de la position x.
La force de nature électromagnétique est donc

$$f = \tfrac{1}{2} \; l_f \; \frac{d\sigma}{dx} \; i^2$$

Synthèse (1/2)

- une démarche analytique[3] a été utilisée pour trouver les éléments de modélisation du canon électromagnétique ; il s'agit maintenant d'expliciter l'approche synthétique qui permet de subsumer ce problème particulier dans la classe général de l'interaction électromécanique.
- Pour cela on on convient de regrouper les énergies de nature cinétique d'une part et potentielles d'autre part comme

$$\begin{array}{ll} \mathcal{T} = T + \overline{W} = \frac{1}{2}\, M\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, l_f\, \sigma\, i^2 & \text{énergies de nature cinétique} \\ \mathcal{V} = \frac{q^2}{2\, c} & \text{énergies de nature potentielle} \end{array}$$

et de former un lagrangien global à partir de ces regroupements comme

$$L = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2}\, M\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, \sigma\, l_f - \frac{q^2}{2\, c}$$

qui est une variable dépendante des « positions » (q et x) et « vitesses » (i et $\dot{x}$).

3. dans le sens « de diviser chacune des difficultés que j'examinerois, en autant de parcelles qu'il se pourroit, et qu'il seroit requis pour les mieux résoudre » Descartes, Discours de la méthode.

Synthèse (2/2)

Les équations du « mouvement » seront fournies par les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d\nabla_{\text{vitesses}} L}{dt} = \nabla_{\text{positions}} L$$

soit ici

$$M \, \frac{d \, \dot{x}}{dt} = \tfrac{1}{2} \, l_f \, \frac{d\sigma}{dx} \, i^2 \quad ; \quad l_f \, \frac{d}{dt} (\sigma \, i) = -\frac{q}{c}$$

avec

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad ; \quad \frac{dq}{dt} = i$$

auxquelles doivent être ajoutées les conditions initiales

$$q(0) = q_0 \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad ; \quad i(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0$$

pour que les données du problème soient complètes.

Hamiltonien électromécanique

- Dès lors que l'énergie de nature cinétique est spécifiée, ses dérivées par rapport aux variables dont la nature est d'être une vitesse sont définies par

$$\underbrace{\text{impulsions ou flux magnétiques}}_{=P} = \nabla_{\underbrace{\text{vitesses ou courants électriques}}_{=\dot{X}}} \mathcal{T}$$

et la transformation de Legendre de cette énergie est également définie comme

$$\overline{\mathcal{T}} = \max_{\dot{X}} (\dot{X} \cdot P - \mathcal{T})$$

Pour le canon électromagnétique $P = (p, \varphi, \; \dot{X} = (\dot{x}, i)$ et

$$\overline{\mathcal{T}} = \frac{\varphi^2}{2 \; l_f \; \sigma} + \frac{p^2}{2M}$$

et le hamiltonien est donc la somme de cette transformation de Legendre et de l'énergie de nature potentielle $\mathcal{V}$ qui dépend des postions ou charges X. Pour le canon $X = (x, q)$ et

$$H = \frac{\varphi^2}{2 \; l_f \; \sigma} + \frac{p^2}{2M} + \frac{q^2}{2 \; c}$$

Équations de Hamilton

- Les équations de Hamilton sont

$$\frac{d}{dt}(P) = -\nabla_X H \quad ; \quad \tfrac{d}{dt}(X) = \nabla_P H$$

Pour le canon

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\varphi^2}{2\ l_f\ \sigma^2}\ \frac{d\sigma}{dx} \quad ; \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{q}{c} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{p}{M} \quad ; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\varphi}{\sigma\ l_f}$$

- Tout ceci présente la plus grande analogie avec les éléments de la leçon No 3 ; la notion de coordonnées, vitesses, impulsions généralisées peut être étendue aux jeux de variables des problèmes électromécaniques [4].

4. Ce n'est pas fortuit, dans le Maxwell fait précéder l'analyse qui le mène aux équations de Maxwell d'un chapitre consacré à la mécanique de Lagrange.

Dispositifs électromécaniques relevant de cette approche

- La seule limitation vient du fait que les termes dissipatifs (les résistances électriques) ne sont pas pris en compte par l'approche (voir cependant la leçon 10) et que par exemple le cas du moteur à induction (moteur asynchrone) où l'aspect dissipatif est essentiel ne peut être traité ainsi.

- Les dispositifs à aimant sont par contre éligibles : un aimant (parfait) peut toujours être considéré comme une bobine dont le courant est constant (modèle ampérien de l'aimant) ; ce qui fait que le problème est de nature mécanique plutôt qu'électromécanique.

- Le moteur à courant continu ne relève pas directement de l'approche du fait des contacts glissants qui nécessitent un traitement particulier (voir leçon 8 sur les liaisons).

- Les moteurs à reluctance variables à base d'effet de magnétisme induit sont eux parfaitement pris en compte (à la remarque sur les termes dissipatifs près).

Aimants (1/2)

- Un aimant parfait est assimilable à une bobine fermée sur elle même dont le courant i ne peut varier[5] ;
- Le fait que le courant de la bobine par laquelle est représenté l'aimant ne peut varier rend souvent inutile de prendre en compte l'énergie propre de l'aimant qui est ainsi couramment éludée ; par contre l'énergie d'interaction entre l'aimant et soit une véritable bobine (alimentée et dont le courant peut varier) soit un autre aimant est elle très utile.
- Énergie d'interaction entre deux aimants : si les courants des bobines équivalentes aux aimants sont i_1 et i_2 la forme de cette énergie est

$$\overline{W}_{\text{int.}} = m\, i_1\, i_2$$

c'est la partie correspondant à l'inductance mutuelle m de la coénergie magnétique du système composé des deux bobines.

5. C'est le modèle ampérien de l'aimant. Voir par exemple Jackson, électrodynamique classique, Dunod, Paris 2001, p 209.

Aimants (2/2)

► Cette inductance mutuelle dépend de la position et de la forme des aimants ; à titre d'exemple, pour deux aimants sphériques et dont l'aimantation est uniforme [6], et placés dans le vide elle est

$$\overline{W}_{\text{int.}} = \frac{\mu_0 \; m_1 \; m_2}{4\pi \; |\vec{r}|^3} (3 \; (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}) \; (\vec{d}_2 \cdot \vec{d}) - \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, $4\pi \; 10^{-7}$ H/m, m_1 et m_2 sont les moments magnétiques des dipoles, $\vec{r} = r \; \vec{d}$ est le vecteur distance joignant leurs centres, $\vec{d}$ la direction de ce vecteur et $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ sont les directions de leurs moments magnétiques.

► Les courants équivalents i_1 et i_2 des deux aimants sont remplacés par leurs moments magnétiques m_1 et m_2 (en $A \; m^2$) et donc en posant [7]

$$m_1 = \pi \; a_1^2 \; i_1 \; ; \; m_2 = \pi \; a_2^2 \; i_2 \text{ où } a_1, a_2 \text{ sont les rayons des aimants}$$

on retrouve

$$\overline{W}_{\text{int.}} = m \; i_1 \; i_2 \quad \text{avec } m = \frac{\mu_0 \; \pi^2 \; a_1^2 \; a_2^2}{4\pi \; |\vec{r}|^3} (3 \; (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}) \; (\vec{d}_2 \cdot \vec{d}) - \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)$$

6. dans ce cas leur champ magnétique ne comporte qu'un terme dipolaire, ce qui rend les calculs simples.
7. c'est en fait un peu plus compliqué puisque le dipole magnétique n'est pas une simple spire circulaire.

Exemple de l'interaction dipole-dipole magnétiques

► Deux aimants sphériques correspondent donc à une coénergie magnétique d'interaction

$$\overline{W}_{\text{int.}} = \frac{\mu_0 \ m_1 \ m_2}{4\pi \ |\vec{r}|^3}(3 \ (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}) \ (\vec{d}_2 \cdot \vec{d}) - \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)$$

(grandeurs définies au transparent précédent)

► Si les masses et moments d'inertie de ces deux aimants sont M_1, M_2, J_1 et J_2, l'énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2}\frac{M_1 \ M_2}{M_1 + M_2} \ \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \ J_1 \ (\dot{\vec{d}}_1)^2 + \frac{1}{2} \ J_1 \ (\dot{\vec{d}}_2)^2$$

et donc le lagrangien électromécanique est

$$L = \overline{W}_{\text{int.}} + T$$

il dépend de 5 degrés de liberté mécanique (r, et deux jeux de deux angles pour $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_3$) et aucun électrique.

Remarque sur l'interaction dipole-dipole magnétiques

- On retrouve souvent que l'énergie magnétique d'interaction est définie par

$$V_{\text{int.}} = -\frac{\mu_0 \ m_1 \ m_2}{4\pi \ |\vec{r}|^3}(3 \ (\vec{d}_1 \cdot \vec{d}) \ (\vec{d}_2 \cdot \vec{d}) - \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)$$

Le lagrangien se retrouve être

$$L = T - V_{\text{int.}}$$

et donc est exactement le même que $L = T + \overline{W}_{\text{int.}}$.

- C'est une façon de voir les choses mais cette approche a l'inconvénient d'introduire un signe « - » un peu magique dans l'expression de l'énergie magnétique d'interaction alors que l'identification des aimants à leurs bobine équivalente dans un modèle ampérien est finalement moins artificielle.

Interaction entre un aimant et un courant électrique

- Si le courant électrique de la bobine équivalente de l'aimant est i_a et si le courant électrique de la vraie bobine (d'inductance propre l) est i la coénergie magnétique s'écrit

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\, l\, i^2 + m\, i_a\, i$$

où est omis la partie correspondant à la coénergie propre de l'aimant. m est l'inductance mutuelle entre les deux bobines qui dépend de leur position relative[8].

- Il est plus commode d'introduire le flux φ_a qu'exerce l'aimant sur la bobine de courant comme

$$\varphi_a = m\, i_a$$

comme m et puisque i_a est invariable ce flux est une fonction de la position relative de l'aimant et de la bobine, la coénergie magnétique s'écrit alors

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\, l\, i^2 + \varphi_a\, i$$

8. Le calcul de cette grandeur relève de la magnétostatique

Exemple de l'alternateur à aimant

- Un alternateur à aimant très simplifié peut être fabriqué à partir d'un barreau aimanté entrainé en rotation à proximité d'une bobine fermée sur elle même ; si θ est la position angulaire de l'aimant alors la disposition peut être telle que

$$\varphi_a = \Phi_0 \ \cos\theta$$

- Si le moment d'inertie de l'aimant est J alors le lagrangien est

$$L = T + \overline{W} = \tfrac{1}{2}\ I\ \dot{\theta} + \frac{1}{2}\ I\ i^2 + \Phi_0\ \cos\theta\ i$$

et les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}(I\ i + \Phi_0\ \cos\theta) = 0 \quad ; \quad J\ \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\Phi_0\ \sin\theta\ i$$

Bien entendu dans une application réelle il faudrait ajouter des termes au lagrangien ou corriger la démarche pour prendre en compte la dissipation (leçon 9) mais on dispose ainsi d'un germe de modèle électromécanique.

Le magnétisme induit

- Les exemples précédents ne prennent pas en compte l'existence du magnétisme induit[9] celui des matériaux magnétiques « mous. »

- Ce magnétisme induit dans un matériau qui peut en être le siège se traduit par une modification de l'inductance d'une bobine lorsqu'il en est approché. Cette modification est toujours une augmentation.

- Donc si la coénergie magnétique d'une bobine est donnée comme

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\, l\, i^2$$

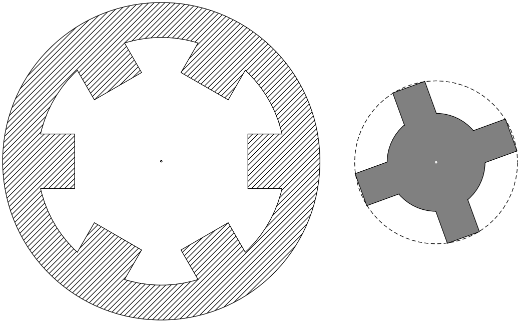
la valeur de l peut dépendre de sa position par rapport à un tel matériau et donc elle comporte des degrés de liberté mécaniques.

---

9. Le magnétisme des aimants parfaits est permanent donc pas induit dans le sens où il ne disparaît pas avec le champ magnétique appliqué

Exemple du moteur à reluctance variable (1/5)

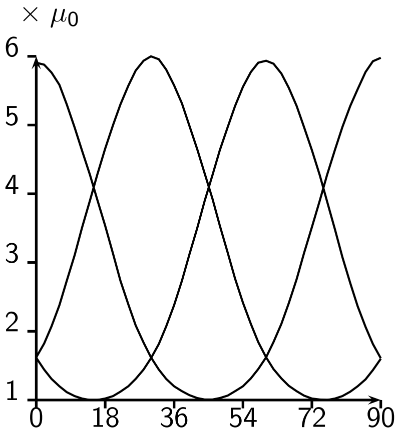
Un stator et un rotor sont constitués d'un empilement de tôles magnétiques de formes



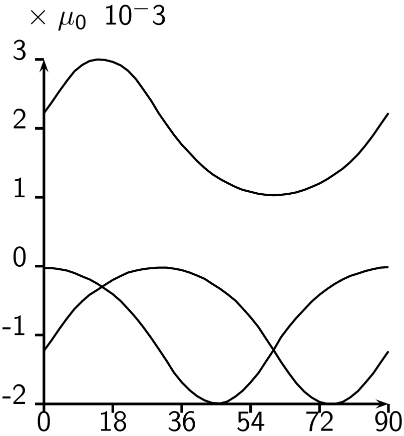
Trois bobines 1, 2, 3 sont enroulées autour des plots 1–4, 2–5, 3–6 au stator ; le rotor est placé dans le stator, il peut tourner et son angle de rotation est θ.

Exemple du moteur à reluctance variable (2/5)

Les inductances propres et mutuelles des trois bobines en fonction de l'angle θ du rotor sont



Inductances propres/angle



Inductances mutuelles/angles

Exemple du moteur à reluctance variable (3/5)

- Les inductances mutuelles étant négligeables, la coénergie magnétique du moteur est

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\, l(\theta)\, i_1^2 + \frac{1}{2}\, l\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\, i_2^2 + \frac{1}{2}\, l\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\, i_3^2$$

où i_1, i_2, i_3 sont les courants dans les bobines.

- Si le moment d'inertie du rotor est J son énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2}\, J\, \dot{\theta}^2$$

- Si les bobines sont mises en série avec des sources de tension e_1, e_2, e_3, l'énergie électrique est

$$V = -e_1\, q_1 - e_2\, q_2 - e_3\, q_3$$

- Et donc le lagrangien électromécanique est

$$L = \overline{W} + T - V$$

Exemple du moteur à reluctance variable (4/5)

- Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\frac{d}{dt}(l(\theta)\ i_1) = e_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(l\left(\theta - \tfrac{2\pi}{3}\right)\ i_2\right) = e_2 \qquad \frac{d}{dt}\left(l\left(\theta - \tfrac{4\pi}{3}\right)\ i_3\right) = e_3$$

$$J\,\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \tfrac{1}{2}\,\frac{dl}{d\theta}(\theta)\ i_1^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{dl}{d\theta}\left(\theta - \tfrac{2\pi}{3}\right)\ i_2^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{dl}{d\theta}\left(\theta - \tfrac{4\pi}{3}\right)\ i_3^2$$

où comme précédemment manquent quelques ingrédients pour rendre le modèle plus réaliste ; ce qui ne lui enlève pas de rendre compte du phénomène essentiel qu'est le couplage électromécanique.

- Bien entendu il faut pouvoir disposer des valeurs d'inductances en fonction de la position ; et pour cela résoudre un problème de magnétostatique dont le détail de la mise en forme et du traitement relève de l'électromagnétisme.

Exemple du moteur à reluctance variable (5/5)

- Le hamiltonien est

$$H = \frac{\varphi_1^2}{2\ l(\theta)} + \frac{\varphi_2^2}{2\ l\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)} + \frac{\varphi_3^2}{2\ l\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)} + \frac{p^2}{2\ J} - e_1\ q_1 - e_2\ q_2 - e_3\ q_3$$

où les flux φ_n sont les dérivées de la coénergie magnétique par rapport aux courants i_n et l'impulsion $p$la dérivée de l'énergie cinétique par rapport à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

- Sa variation temporelle est

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{de_1}{dt}\ q_1 - \frac{de_2}{dt}\ q_2 - \frac{de_3}{dt}\ q_3$$

qui se réécrit comme

$$\frac{D}{Dt}\Big(\underbrace{H + e_1\ q_1 + e_2\ q_2 + e_3\ q_3}_{= \text{énergie du système électromécanique}}\Big) = \underbrace{e_1\ i_1 + e_2\ i_2 + e_3\ i_3}_{= \text{puissance électrique}}$$

d'où vient la relation entre puissance issue des sources et énergie électromécanique.

La force de Laplace (1/3)

- La force de Laplace qui s'exerce sur un élément linéaire de circuit électrique parcouru par un courant i est

$$\vec{df} = i\,\vec{dl} \times \vec{b}$$

où $\vec{dl}$ est l'élément de circuit (si le circuit est décrit par une courbe paramétrée $\vec{X}(s)$ $(0 < s < 1)$ c'est $\vec{X}'(s)\,ds$) et $\vec{b}$ est l'induction magnétique[10] due aux autres courants que i.

- Cette expression est utilisée pour obtenir la force $\vec{F}$ et le $\vec{\Gamma}$ couple globaux qui s'exercent sur le circuit électrique (supposé indéformable) par intégration sur son parcours C

$$\vec{F} = \int_C \vec{df} = \int_0^1 i\,\vec{X}'(s) \times \vec{b}(\vec{X}(s))\,ds \;\; ; \;\; \vec{\Gamma} = \int_C \vec{r} \times \vec{df}$$

où $\vec{r}$ est la position sur la courbe C depuis une origine par rapport à laquelle est défini le couple.

10. dans $\vec{b} = \mu_0\ \vec{h}$, $\vec{b}$ s'appelle l'induction magnétique et $\vec{h}$ le champ magnétique.

La force de Laplace (2/3)

► Il n'a pas été nécessaire d'utiliser cette expression parce que les résultats auxquels elle conduit sont entièrement contenus dans la coénergie magnétique. Le système de courants (vrais ou ampériens) qui produit le champ magnétique $\vec{b}$ produit un flux global φ_s sur le circuit électrique et la coénergie magnétique d'interaction entre ce système et le courant i est

$$\overline{W}_{\text{int}} = \varphi_s \; i$$

Si le circuit est considéré comme un solide indéformable défini par trois coordonnées et trois angles d'Euler groupés dans les vecteurs X et Ξ les expressions de la force $\vec{F}$ et du couple $\vec{\Gamma}$ sont alors les trois coordonnées de $\vec{f}$ et $\vec{\Gamma}$ sont groupés dans des vecteurs F et Γ tels que

$$F = \nabla_{\vec{x}} \varphi_s \; i \; ; \; \Gamma = \nabla_{\Xi} \varphi_s \; i$$

La force de Laplace (3/3)

Cette assertion peut être vérifiée sur un exemple un peu académique mais simple, celui de deux lignes parallèles situées à la distance x l'une de l'autre parcourues par des courants i (aller) et $-i$ (retour).

- Si $\vec{k}_z$ est la direction des lignes, l'induction magnétique créée par la ligne $+i$ à la position de l'autre est

$$\vec{b} = \frac{\mu_0 \; i}{2\pi \; x}(\vec{k}_z \times \vec{k}_x)$$

où $\vec{k}_x$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{k}_z$ et indiquant la direction de la ligne $-i$ depuis la ligne $+i$; la force exercée sur l'élément de longueur dz de la ligne $-i$ est alors

$$\vec{df} = -\frac{\mu_0 \; i^2}{2\pi \; x} \; dz \; \vec{k}_x$$

- D'autre part la coénergie d'interaction par unité de longueur entre ces lignes est

$$\overline{W}_{\text{int}} = -\frac{\mu_0 \; i^2}{2\pi} \log x$$

d'où la force par unité de longueur,

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 \; i^2}{2\pi \; x}\vec{k}_x$$

Pression magnétique

- La force de Laplace n'est pas la seule en présence dans un dispositif électromécanique, il y a aussi la pression magnétique. Si on admet l'approximation [11] selon laquelle le magnétisme induit est suffisamment fort pour que le champ magnétique $\vec{h}$ disparaisse dans les matériaux qui en sont le siège, la pression en dehors de ces matériaux est
$$P = \frac{\vec{b}^2}{2\,\mu_0}$$
et les forces et couples qui s'exercent sur le domaine D d'un de ces matériaux sont alors
$$\vec{F} = -\int_{\partial D} P\,\vec{n}\,dS\ ;\ \vec{\Gamma} = -\int_{\partial D} P\,\vec{r} \times \vec{n}\,dS$$
- Là encore ces forces et couples sont pris en compte par l'expressions de la coénergie magnétique.

11. Sans cela les efforts sont plus difficiles à définir : il devient presque nécessaire d'introduire le tenseur de Maxwell plutôt que de se limiter comme ici au tenseur isotrope qu'est la pression.

Exercice No 1 : forme d'une spire à courant constant

L'inductance d'une spire rectangulaire de côtés x et y a pour expression [12]

$$L = L_0 \left(1 - \left(\frac{2\,x}{x+y} - 1\right)^2\right)$$

► Quelle forme la spire doit-elle avoir pour que les efforts électromagnétiques ne la déforment pas quand sa longueur $p = 2\,(x+y)$ est fixée et qu'elle est parcourue par un courant i constant ?

► On suppose que l'énergie cinétique mise en jeu lors de la déformation de la spire est (M sa masse)

$$T = \tfrac{M}{8}\dot{x}^2$$

écrire les équations du mouvement.

► Trouver une intégrale première de ce mouvement en exprimant le hamiltonien.

► Trouver la force électromotrice à placer aux bornes de la spire pour que le courant reste constant.

12. c'est très approximatif mais correct qualitativement : une expression plus exacte existe mais elle est trop difficile à manier pour un exercice.

Exercice No 2 : forme d'une spire en présence d'un aimant

On reprend l'exercice No 2 mais cette fois un aimant est disposé à proximité de manière à créer un flux magnétique (induction uniforme $b \times$ surface de la spire)

$$\varphi_a = b\,x\,y$$

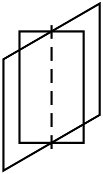
- Montrer que la forme prise par la spire est la même que précédemment (toujours avec p constant).
- Trouver les équations dont dépendent x et i.
- Écrire le hamiltonien du problème.

Exercice No 3 : Élément de moteur électrique

La coénergie d'interaction par unité de longueur entre deux lignes parallèles parcourues par des courants i_1 et i_2 et situées à la distance r_{12} l'une de l'autre est

$$\frac{\mu_0 \; i_1 \; i_2}{2\pi} \log r_{12}$$

Deux cadres rectangulaires de demi-côtés r et R, parcourus par des courants i et $\mathcal{I}$ et de même hauteur l forment un angle θ entre eux



calculer le couple exercé par un des cadres sur l'autre en négligeant les effets d'extrémités.