Mécanique et électricité analytiques

Leçon 5

Circuits électriques non-linéaires

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

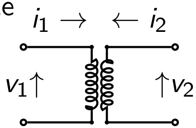
21 octobre 2013

Objectifs de la leçon

- Compléter la description des composants de circuit électrique par celle des inductances couplées.
- Introduire un mécanisme explicatif de non-linéarité ;
- Décrire l'effet de réponses multiples à une même sollicitation que peut introduire une non-linéarité sur l'exemple d'un circuit susceptible de produire de la ferrorésonnance (série) ;
- Compléter la description de la transformation de Legendre par l'inégalité de Young ;
- Reprendre la méthode du plan de phase et l'intégration par quadrature esquissée leçon 1.

Inductances couplées

L'idéographie d'un ensemble composé de deux autoinductances couplées est la suivante



Si les valeurs d'inductances propres de cet ensemble sont $\ell_1 > 0$ et $\ell_2 > 0$ et que la valeur de l'inductance mutuelle est m (qui peut être positive ou négative), les relations qu'il dénote sont [1]

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 & m \\ m & \ell_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \; ; \; m^2 \leq \ell_1 \, \ell_2$$

Ce composant est un quadripole [2] mais surtout il introduit une spécificité de l'électricité qui est qu'une variation de courant électrique à un endroit du circuit crée une tension à un autre endroit.

1. L'inégalité $m^2 \leq \ell_1 \, \ell_2$ est toujours vraie ; la matrice est donc l'inversible.
2. 2 paires d'entrées sont les courants entrant et sortant par chacune des paires sont identiques

Les inductances couplées dans les circuits électriques

- La description des circuits électriques en terme de graphes de la leçon précédente n'est pas modifiée pour les circuits comportant des inductances couplées.

- La partie de la co-énergie magnétique correspondant à une inductance couplée s'écrit

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\,\ell_1\ i_1^2 + \frac{1}{2}\,\ell_2\ i_2^2 + m\ i_1\ i_2$$

Cette expression permet en effet d'obtenir les expressions demandées pour les flux magnétiques par

$$\varphi_1 = \frac{\partial \overline{W}}{\partial i_1}\ ;\ \varphi_2 = \frac{\partial \overline{W}}{\partial i_2} \text{ ou encore } \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \nabla_{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}} \overline{W}$$

- Le reste n'étant pas modifié.

Coénergie et énergie magnétiques

Conformément à ce qui a été expliqué Leçon 2, la transformation de Legendre de $\overline{W}$ (variable dépendante de i_1 et i_2) est la variable dépendante de φ_1 et φ_2

$$W = (\varphi_1 \ \varphi_2) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} - \overline{W} \text{ avec } \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\ell_1 \, \ell_2 - m^2} \begin{pmatrix} \ell_2 & -m \\ -m & \ell_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

soit

$$W = \frac{1}{2} \, (\varphi_1 \ \varphi_2) \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{21} & \nu_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

où les coefficients sont appelés des reluctivités

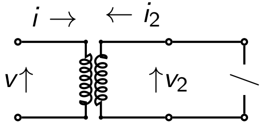
$$\nu_{11} = \frac{\ell_2}{\ell_1 \, \ell_2 - m^2} \ ; \ \nu_{22} = \frac{\ell_1}{\ell_1 \, \ell_2 - m^2} \ ; \ \nu_{12} = \nu_{21} = \frac{-m}{\ell_1 \, \ell_2 - m^2}$$

C'est la contribution des inductances couplées au hamiltonien global d'un circuit électrique.

L'interrupteur commandé

Le circuit électrique est doté d'un dernier composant qui n'est purement ni passif ni actif mais commandé, il s'appelle l'interrupteur

et il convient d'indiquer sa loi de commande, par exemple l'élément de circuit



n'est complet que si, par exemple, on spécifie que

$$K \text{ est} \left| \begin{array}{l} \text{fermé} \Longrightarrow v_2 = 0 \quad \text{si} \quad |i| > \mathcal{I} \\ \text{ouvert} \Longrightarrow i_2 = 0 \quad \text{si} \quad |i| < \mathcal{I} \end{array} \right.$$

Relation non-linéaire entre flux et courant

L'association précédente d'inductances couplées avec un interrupteur commandé comme indiqué, recèle deux cas :

- quand $|i| < \mathcal{I}$, K est ouvert donc $i_2 = 0$ et

$$\varphi = \ell_1 \; i \text{ lorsque } |i| < \mathcal{I}$$

- quand $|i| > \mathcal{I}$, K est fermé donc $v_2 = 0$ et

$$\frac{d}{dt} \left(\ell_2 \; i_2 + m \; i \right) \Longrightarrow \ell_2 \; i_2 + m \; i = \text{Cste}$$

et donc

$$\varphi = \left(l - \frac{m^2}{\ell_2} \right) \; i + \frac{m}{\ell_2} \times \text{Cste}$$

L'inégalité $|i| > \mathcal{I}$ définit un domaine non connexe et donc la constante peut ne pas être la même pour $i > \mathcal{I}$ et $i < -\mathcal{I}$; comme de plus φ doit être *a minima* continu au passage des lignes $i = \mathcal{I}$ et $i = -\mathcal{I}$ (car $v = d\varphi/dt$) ces deux constantes doivent être choisies pour cela.

Relation non-linéaire entre flux et courant

Après calcul des constantes et après avoir posé

$$\ell - \frac{m^2}{\ell_2} = \left(1 - \frac{m^2}{\ell\,\ell_2}\right)\,\ell = \sigma\,\ell$$

(σ s'appelle le coefficient de couplage) il vient

$$\varphi = \begin{cases} \ell\, i & \text{pour} \quad |i| < \mathcal{I} \\ \ell\,\sigma\,(i - \mathcal{I}) + \ell\,\mathcal{I} & - \qquad i > \mathcal{I} \\ \ell\,\sigma\,(i + \mathcal{I}) - \ell\,\mathcal{I} & - \qquad i < -\mathcal{I} \end{cases}$$

Le mécanisme décrit (fermeture et ouverture de l'interrupteur suivant les valeurs du courant i) engendre une relation non-linéaire entre le flux magnétique et le courant électrique.

La non-linéarité magnétique

► La relation entre flux magnétique et courant électrique dans une autoinductance (pas spécialement couplée à une autre inductance) à noyau de fer est en première approximation [3] de la forme

$$\varphi = F(i)$$

où F est une fonction croissante, impaire et telle que sa pente soit décroissante avec i ; comme l'est la fonction du mécanisme précédent.

► Ce mécanisme ne prétend pas expliquer le phénomène mais il est cependant capable de l'approcher schématiquement ; c'est un modèle qui présente l'intérêt de se prêter à des calculs explicites qui ont une certaine portée prédictive comme illustré par le traitement de l'exemple emblématique dont la description suit.

3. il existe de plus des effets d'hystérésis dont la description dépasse les intentions de la leçon.

Exemple emblématique : un système ferrorésonnant

Une autoinductance dont la relation entre flux magnétique φ et courant électrique i est de la forme

$$\varphi = F(i)$$

où F est croissante, impaire et telle que sa pente soit décroissante avec i est mise en série avec un condensateur de capacité c et un générateur de force électromotrice périodique de période T tel que

$$e = \begin{cases} E & \text{pour} \quad 0 < t < T/2 \\ -E & \text{pour} \quad T/2 < t < T \end{cases}$$

Les équations de circuit sont

$$\left\{ \frac{d\varphi}{dt} + \frac{q}{c} = e \quad ; \quad \frac{dq}{dt} = i \right.$$

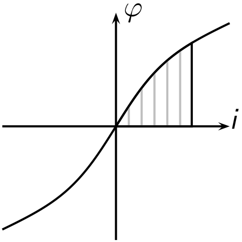
Il s'agit de trouver les solutions périodiques de période T de ce système.

La coénergie magnétique

La coénergie magnétique est la variable dépendante de i telle que

$$\overline{W} = \int_0^i F(\alpha)\, d\alpha$$

C'est l'aire sous la courbe $\varphi = F(i)$
(Elle est positive même si $i < 0$: voir par exemple avec $F(i) = \ell\ i$)



Le lagrangien s'écrit alors

$$\ell = \overline{W}(i) - \frac{q^2}{2\ c} + q\ e$$

et l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial i}\right) = -\frac{q}{c} + e \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{F(i)}_{=\varphi}\right) = -\frac{q}{c} + e$$

Manipulation de l'expression de la coénergie

- L'intégration par parties de l'expression de la coénergie donne

$$\overline{W} = \int_0^i F(\alpha)\, d\alpha = [\alpha\, F(\alpha)]_0^i - \int_0^i \alpha\, \frac{dF}{d\alpha}(\alpha)\, d\alpha$$

- Avec l'expression du terme entre crochet et le changement de variables $\beta = F(\alpha)$ dans l'intégrale il vient alors

$$\begin{aligned}\overline{W} &= i\, F(i) - \int_0^{F(i)} F^{-1}(\beta)\, \frac{dF}{d\alpha}(F^{-1}(\beta))\, \frac{d\beta}{\frac{dF}{d\alpha}(F^{-1}(\beta))}\, d\beta \\ &= i\, F(i) - \int_0^{F(i)} F^{-1}(\beta)\, d\beta\end{aligned}$$

Si $\varphi = F(i)$, la variable

$$W = \int_0^{\varphi} F^{-1}(\beta)\, d\beta$$

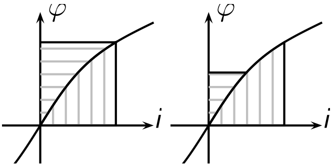
est une variable dépendante de φ

Inégalité de Young

Il vient

$$\overline{W} + W_{|\varphi=F(i)} = \overbrace{\varphi_{|\varphi=F(i)}}^{F(i)}\ i$$

comme W est l'aire sous la courbe $i = F^{-1}(\varphi)$ cette relation se comprend graphiquement (dessin de gauche)



De plus on constate graphiquement (dessin de doite) que

$$\forall \text{ les variables indépendantes } i, \varphi \ :\ \overline{W} + W \geq \varphi\, i$$

et que l'égalité n'a lieu que lorsque i et φ sont liées par $\varphi = F(i) \iff i = F^{-1}(\varphi)$.

L'énergie magnétique

L'inégalité : $\forall$ les variables indépendantes i, φ : $\overline{W} + W \geq \varphi\ i$ s'appelle l'inégalité de Young ; elle et son cas d'égalité permettent de définir W par rapport à $\overline{W}$ (ou l'inverse) comme

$$W = \max_i \left(\varphi\ i - \overline{W}\right)$$

La condition nécessaire d'extréma s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial i}\left(\varphi\ i - \overline{W}\right) = 0 \Longrightarrow \varphi - F(i) = 0$$

et donc

$$W = \varphi\ i - \overline{W} \text{ avec } i \text{ solution de } \frac{\partial \overline{W}}{\partial i} = \varphi \text{ i.e. } F(i) = \varphi$$

C'est la définition donnée leçon 2 pour la transformation de Legendre de la coénergie magnétique ; W est l'énergie magnétique.

Le hamiltonien

Le hamiltonien s'écrit alors

$$H = W + \frac{q^2}{2\,c} - q\,e$$

c'est une variable dépendante de φ et q et de t par e.
Les équations de Hamilton sont

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{q}{c} + e \quad ; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

et une propriété (cf. leçon 1) du hamiltonien est que

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -q\,\frac{de}{dt}$$

Comme $e = \begin{cases} E & \text{pour} \quad 0 < t < T/2 \\ -E & \text{pour} \quad T/2 < t < T \end{cases}$, le hamiltonien est constant la plupart du temps et sa dérivée temporelle est celle d'une fonction discontinue[4] aux instants $k\ T/2,\ k \in \mathbb{N}$.

4. Le cours de mathématique sur les distribution donnera un sens aux dérivées de fonctions discontinues

Évolution libre : les énergies

Si $e = 0$ et que $\varphi = F(i) = \begin{cases} \ell\, i & \text{pour} \quad |i| < \mathcal{I} \\ \ell\,\sigma\,(i - \mathcal{I}) + \ell\,\mathcal{I} & - \quad i > \mathcal{I} \\ \ell\,\sigma\,(i + \mathcal{I}) - \ell\,\mathcal{I} & - \quad i < -\mathcal{I} \end{cases}$

alors

$$\overline{W} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\ell\, i^2 & \text{pour} \quad |i| < \mathcal{I} \\ \frac{1}{2}\,\ell\,\sigma\,(i - \mathcal{I})^2 + \ell\,\mathcal{I}\,(i - \mathcal{I}) + \frac{1}{2}\,\ell\,\mathcal{I}^2 & - \quad i > \mathcal{I} \\ \frac{1}{2}\,\ell\,\sigma\,(i + \mathcal{I})^2 - \ell\,\mathcal{I}\,(i + \mathcal{I}) + \frac{1}{2}\,\ell\mathcal{I}^2 & - \quad i < -\mathcal{I} \end{cases}$$

et, pour $\Phi = \ell\,\mathcal{I}$,

$$W = \begin{cases} \dfrac{\varphi^2}{2\,\ell} & \text{pour} \quad |\varphi| < \Phi \\ \dfrac{(\varphi - \Phi)^2}{2\,\sigma\,\ell} + \dfrac{\Phi\,(\varphi - \Phi)}{\ell} + \dfrac{\Phi^2}{2\,\ell} & - \quad \varphi > \Phi \\ \dfrac{(\varphi + \Phi)^2}{2\,\sigma\,\ell} - \dfrac{\Phi\,(\varphi + \Phi)}{\ell} + \dfrac{\Phi^2}{2\,\ell} & - \quad \varphi < -\Phi \end{cases}$$

Évolution libre : le hamiltonien (1/3)

Le hamiltonien est constant

$$W + \frac{q^2}{2\,c} = \mathcal{E}$$

ce qui définit une liaison implicite entre φ et q. Il y a deux cas.

- La zone linéaire où $\mathcal{E} < \frac{\Phi^2}{2\,\ell}$ dans laquelle l'expression est

$$\frac{\varphi^2}{2\,\ell} + \frac{q^2}{2\,c} = \mathcal{E}$$

- la zone non-linéaire où $\mathcal{E} > \frac{\Phi^2}{2\,\ell}$; lorsque $\varphi > 0$ l'expression est

$$\frac{(\varphi - \Phi)^2}{2\,\sigma\,\ell} + \frac{\Phi\,(\varphi - \Phi)}{\ell} + \frac{\Phi^2}{2\,\ell} + \frac{q^2}{2\,c} = \mathcal{E}$$

et lorsque $\varphi < 0$

$$\frac{(\varphi + \Phi)^2}{2\,\sigma\,\ell} - \frac{\Phi\,(\varphi + \Phi)}{\ell} + \frac{\Phi^2}{2\,\ell} + \frac{q^2}{2\,c} = \mathcal{E}$$

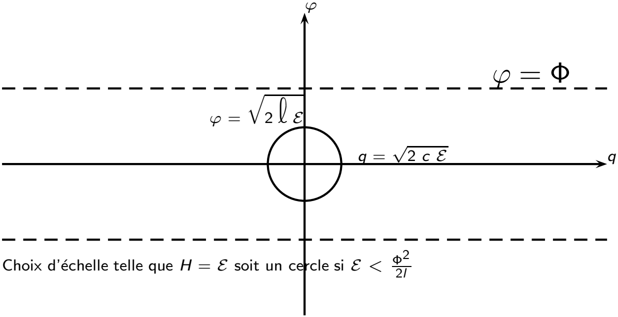
Évolution libre : le hamiltonien (2/3)

Au final

$$\mathcal{E} < \frac{\Phi^2}{2l} \implies \frac{\varphi^2}{2\,\ell} + \frac{q^2}{2\,c} = \mathcal{E}$$

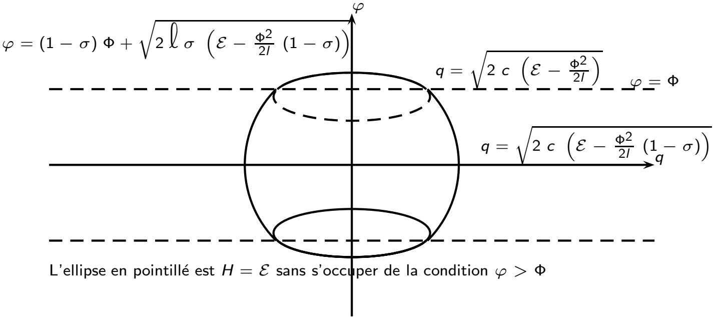
$$\mathcal{E} > \frac{\Phi^2}{2l} \implies \begin{cases} \varphi > \Phi \\ \varphi < -\Phi \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{(\varphi - (1-\sigma)\,\Phi)^2}{2\,\sigma\,\ell} + \dfrac{q^2}{2\,c} = \mathcal{E} - \dfrac{\Phi^2}{2\,\ell}\,(1-\sigma) \\ \dfrac{(\varphi + (1-\sigma)\,\Phi)^2}{2\,\sigma\,\ell} + \dfrac{q^2}{2\,c} = \mathcal{E} - \dfrac{\Phi^2}{2\,\ell}\,(1-\sigma) \end{cases}$$

Ce qui permet de réaliser des tracés : pour $\mathcal{E} < \frac{\Phi^2}{2l}$



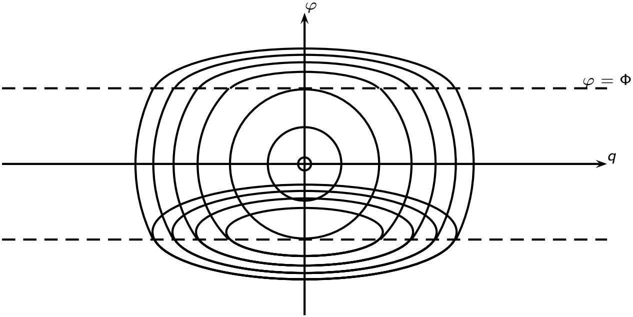
Évolution libre : le hamiltonien (3/2)

Pour $\mathcal{E} > \frac{\Phi^2}{2I}$



Évolution libre : les trajectoires

Il est ainsi possible de visualiser l'ensemble des courbes paramétrées par $\mathcal{E}$



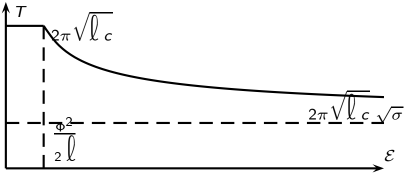
Ces courbes sont les trajectoires dans le plan de phase de l'évolution de la charge q et du flux φ ; elles sont parcourues dans le sens des aiguilles d'une montre (puisque $d\varphi/dt = -q/c$) et il est possible d'associer une valeur de période T à chacune des trajectoires.

Évolution libre : La période dépend de l'énergie

Un calcul de quadrature (cf. exercice 2 pour le principe) fournit

$$T = \begin{cases} 2\,\pi\,\sqrt{\ell\; c} & \text{si } \mathcal{E} < \frac{\Phi^2}{2I} \\ 4\sqrt{\ell\; c}\,\arcsin\frac{\Phi}{\sqrt{2\,\ell\,\mathcal{E}}} + 4\sqrt{\sigma\,\ell\;c}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\sigma\Phi}{2\,\sigma\,\ell\left(\mathcal{E} - \frac{\Phi^2}{2\,\ell}\,(1-\sigma)\right)}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

qui correspond au tracé



La valeur de la période dépend de l'énergie (la valeur initiale du hamiltonien qui se conserve).

Autres Évolutions libres : 1° loi de commande

► Si maintenant le générateur est connecté mais d'une façon telle que la tension qu'il délivre soit commandée par les valeurs de la charge

$$H = W + \frac{q^2}{2\ c} - q\ e \text{ avec } e = \begin{cases} E & \text{pour} \quad q > 0 \\ -E & \text{pour} \quad q < 0 \end{cases}$$

Il est possible de réécrire

$$H = \begin{cases} W + \dfrac{(q - c\ E)^2}{2\ c} - \frac{1}{2}\ c\ E^2 & \text{pour} \quad q > 0 \\ W + \dfrac{(q + c\ E)^2}{2\ c} - \frac{1}{2}\ c\ E^2 & \text{pour} \quad q < 0 \end{cases}$$

et de constater que ce hamiltonien reste constant lorsque q et ϕ varient.

► Il est donc possible d'étudier les trajectoires et les périodes de ce système exactement comme dans le cas du mouvement libre.

Autres Évolutions libres : 2° loi de commande

► Si maintenant le générateur est connecté mais d'une façon telle que la tension qu'il délivre soit commandée par les valeurs de la charge

$$H = W + \frac{q^2}{2\ c} - q\ e \text{ avec } e = \begin{cases} -E & \text{pour} \quad q > 0 \\ E & \text{pour} \quad q < 0 \end{cases}$$

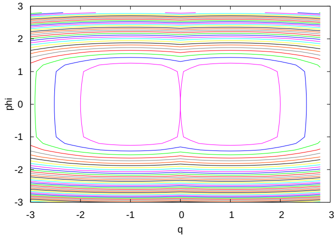
Il est possible de réécrire

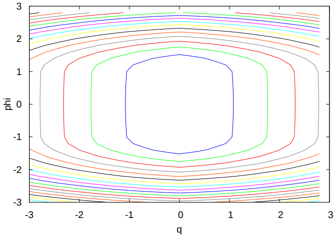
$$H = \begin{cases} W + \dfrac{(q + c\ E)^2}{2\ c} - \frac{1}{2}\ c\ E^2 & \text{pour} \quad q > 0 \\ W + \dfrac{(q - c\ E)^2}{2\ c} - \frac{1}{2}\ c\ E^2 & \text{pour} \quad q < 0 \end{cases}$$

et de constater que ce hamiltonien reste constant lorsque q et ϕ varient.

► Il est encore possible d'étudier les trajectoires et les périodes de ce système exactement comme dans le cas du mouvement libre.

Les tracés des lignes $H = \text{Cste}$ pour les hamiltoniens des 2 lois de commande





- Certaines trajectoires des deux lois de commandes correspondent à la même période !

Évolution forcée

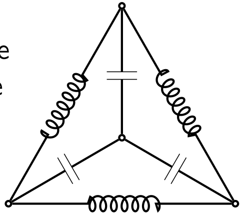
- Si maintenant le générateur n'est plus commandé par les valeurs de q et que le problème de circuit non-linéaire est non-autonome

$$e = \begin{cases} E & \text{pour} \quad 0 < t < T/2 \\ -E & \text{pour} \quad T/2 < t < T \end{cases}$$

- la question est de savoir en quelle mesure il est possible
  1. de supposer dans un premier temps que $e = \begin{cases} E & \text{pour} \quad q > 0 \\ -E & \text{pour} \quad q < 0 \end{cases}$;
  2. de chercher les solutions qui correspondent aux périodes T ;
  3. d'affirmer que les solutions du problème non-autonomes sont celles-ci.
- La réponse à cette question est fournie par l'étude précédente : pour certains jeux de paramètres il y a deux solutions possible pour une même période. C'est le phénomène de ferrorésonnance (qui est quand même un peu plus compliqué que ce qui vient d'en être dit).

Exercices

- Écrire les équations électriques dans le cas où les selfs sont couplées comme
  $$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ell & m & m\\ m & \ell & m\\ m & m & \ell\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\\ i_2\end{pmatrix}$$



- Retrouver la période d'un pendule par la méthode de quadrature.

- Etudier les solutions périodiques de

$$\ell\,\frac{di}{dt} = -\frac{q}{c} + e \quad ; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dt} = i$$

pour $(E > 0)$

$$a)\ e = \begin{cases} +E & \text{si} \qquad q > 0 \\ -E & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad b)\ e = \begin{cases} -E & \text{si} \qquad q > 0 \\ E & \text{sinon} \end{cases}$$