Mécanique et électricité analytiques

Leçon 1

Équations d'Euler-Lagrange et de Hamilton pour un problème mécanique à un degré de liberté

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

21 septembre 2018

Objectif de la leçon

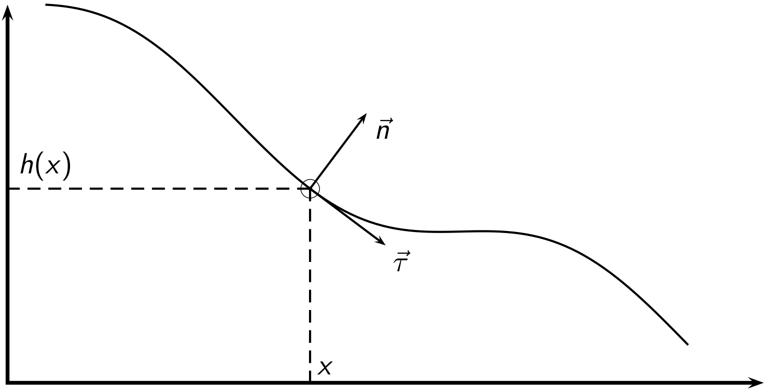
► Introduire les deux méthodes de détermination des équations de mouvement d'une masse ponctuelle dont la position est déterminée par un seul paramètre x :

1. de Euler-Lagrange $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x}$
   L, le lagrangien, est $L = T - V$ où T est l'énergie cinétique (dont la variable indépendante est la dérivée temporelle $\dot{x}$ du paramètre).
2. de Hamilton $\quad \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \quad$ et $\quad \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$
   H, le hamiltonien, est $H = \overline{T} + V$ où $\overline{T}$ est l'énergie cinétique dont la variable indépendante est l'impulsion (quantité de mouvement) p conjuguée à $\dot{x}$.

V est l'énergie potentielle dépendant de x.

Exemple emblématique

► Recherche de la loi de mouvement d'une masse pontuelle qui est assujettie à se déplacer sur une courbe donnée et qui se meut sous le seul effet de la force de pesanteur.



Restrictions et extensions

- L'origine et les fondements des deux méthodes (Euler-Lagrange et Hamilton) ne sont pas expliqués dans cette leçon ;

- leurs modalités d'utilisation sont discutées et comparées avec celle de la méthode connue des lois de Newton ;

- le cadre d'application des deux méthodes est étendue par l'introduction d'une force plus générale que la force de gravité ;

- leur application directe ne permet pas de prendre en compte les forces dissipatives (cf. Leçon No 9) ;

- la force de réaction est éliminée mais elle peut être réintroduite (cf. Leçon No 2).

Cinématique du point se déplaçant sur la courbe

- Position $\vec{x} = x\,\vec{k}_x + h\,\vec{k}_z$
- loi de mouvement du paramètre $x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & x(t) \end{array}$
- vitesse $\dot{\vec{x}} = \dot{x}\,\ell\,\vec{\tau}$ (ce n'est pas $\dot{x}\,\vec{\tau}$!)
- accélération $\ddot{\vec{x}} = \left(\ddot{x}\,\ell + h'\,C\,\dot{x}^2\,\ell^2\right)\,\vec{\tau} + C\,\dot{x}^2\,\ell^2\,\vec{n}$

La force centrifuge est $C\,\dot{x}^2\,\ell^2\,\vec{n}$ et il y a un terme en $h'\,C\,\dot{x}^2\,\ell^2$ dans la direction $\vec{\tau}$ de la vitesse qui prend en compte la variation de l'élément de longueur ℓ.

$\ell = \sqrt{1 + h'(x)^2}$, $C = \frac{h''(x)}{\ell^3}$ (cf. https://gerard.vinsard.fr/Cours/MEAN/GeometrieElementaire.pdf)

Variables indépendantes et dépendantes

- La position d'une masse ponctuelle en mouvement sur la courbe devrait être notée $x(t)\ \vec{k}_x + h(x(t))\ \vec{k}_z$, c'est très lourd ;

- pour éviter cela on note $x\ \vec{k}_x + h\ \vec{k}_z$ mais il faut préciser que
  - la variable indépendante est le temps t ;
  - x est une variable dépendante (de t) et cela directement ;
  - h est une variable dépendante toujours sous-entendu de t mais indirectement :
    - h est d'abord une variable dépendante de x si celle-ci est prise comme variable indépendante ;
    - mais comme x est une variable dépendante de t, h hérite de ce statut.

- d'autre part une variable dépendante peut à tout moment être à nouveau re-considérée comme indépendante : il y aura des exemples dans cette leçon.

Notations pour la dérivation

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{u(\xi + \epsilon) - u(\xi)}{\epsilon} = \frac{du}{d\xi}(\xi) \quad \text{Leibnitz}$$

$$u'(\xi) \quad \text{Lagrange}$$

$$\dot{u}(\xi) \quad \text{Newton}$$

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{f(u + \epsilon, v) - f(u, v)}{\epsilon} = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \quad \text{Dérivée partielle}$$

$$\partial_u f(u, v) \quad \text{Notation abrégée}$$

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{f(u(\xi + \epsilon), v(\xi + \epsilon)) - f(u, v)}{\epsilon} = \frac{Df}{D\xi}(u(\xi), v(\xi)) \quad \text{Dérivée totale}$$

$$D_\xi f(u(\xi), v(\xi)) \quad \text{Notation abrégée}$$

Approche par les lois de Newton

- Les lois de Newton sont :

1º loi : *une masse ponctuelle se déplace à vitesse constante si elle n'est soumise à aucune force (loi d'inertie) ;*

2º loi : *masse $\times$ accélération $=$ somme des forces appliquées (loi fondamentale de la dynamique) ;*

3º loi : *si une masse exerce une force sur une autre alors l'autre exerce sur la première une force d'intensité et direction égale et de sens opposé (principe de réciprocité ou loi d'action réaction).*

- Appliquées ici :
  - $\vec{f} = -m\ g\ \frac{h'\ \vec{\tau} + \vec{n}}{\ell}$, force de pesanteur ;
  - $\vec{R} = R\ \vec{n}$, force de réaction ;
  - $m\ \ddot{\vec{x}} = -m\ g\ \frac{h'\ \vec{\tau} + \vec{n}}{\ell} + R\ \vec{n}$, seconde loi de Newton
    - projection suivant $\vec{\tau}$: $m\ (\ddot{x} + h'\ C\ \ell\ \dot{x}^2) = -m\ g\ \dfrac{h'}{\ell^2}$

      c'est une équation différentielle ordinaire à résoudre en x ;
    - projection suivant $\vec{n}$: $m\ C\ \dot{x}^2\ \ell^2 = -\dfrac{m\ g}{\ell} + R$

      c'est une équation algébrique en R.

Approche par l'équation d'Euler-Lagrange

- Exprimer les énergies cinétique : $T = \frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{x}^2$ et potentielle $V = m\, g\, h$;

- Considérer x et $\dot{x}$ comme variables indépendantes pour former le lagrangien

$$\begin{array}{rccl} L & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,\dot{x}) & \longrightarrow & L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{x}^2 - m\, g\, h \end{array}$$

- calculer : $\dfrac{\partial L}{\partial x} = m\, h'\, h''\, \dot{x}^2 - m\, g\, h'$ et $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\, (1 + h'^2)\, \dot{x}$

- Écrire $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x} \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(m\, \ell^2\, \dot{x}\right) = m\, h'\, h''\, \dot{x}^2 - m\, g\, h'$ soit

$$m\, \left(\ell^2\, \ddot{x} + \cancel{2}\, h'\, h''\, \dot{x}^2\right) = \cancel{m\, h'\, h''\, \dot{x}^2} - m\, g\, h'$$

C'est l'équation obtenue par la 2$^{\text{o}}$ loi de Newton projetée sur $\vec{\tau}$!

Structure de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x} \end{array}\right.$$

- L'impulsion (quantité de mouvement) est définie comme

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

C'est une variable dépendante de $\dot{x}$, $\dot{x}$ étant prise comme variable indépendante.

- On souhaite transformer le problème en choisissant p comme variable indépendante et $\dot{x}$ comme variable dépendante (x restant une variable indépendante) de façon à obtenir

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\partial L}{\partial x} \end{array}\right. \quad \text{où } \dot{x} \text{ est solution de } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p$$

Transformation de Legendre du lagrangien

- La transformation de Legendre[1] de la variable L dépendante de x et $\dot{x}$ par rapport à $\dot{x}$ est la variable H dépendante de x et p définie par

$$H = p\,\dot{x} - L \text{ où } \dot{x} \text{ est solution de } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p$$

$\dot{x}$ devient une variable dépendante de p et x.

- la dérivée partielle par rapport à p de H est

$$\frac{\partial H}{\partial p} = p\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial p} + \dot{x} = \underbrace{\left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}_{=0}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p} + \dot{x} = \dot{x}$$

- la dérivée partielle par rapport à x de H est

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \underbrace{p\,\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}}_{=0} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x}$$

1. La notion est revisitée leçon No 5

Équations de Hamilton

- Les équations d'Euler-Lagrange se transforment en

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Elles s'appellent alors les équations de Hamilton (ou canoniques) et H le hamiltonien.

- Si $L = T - V$ où T, l'energie cinétique, est une variable dépendante de x et $\dot{x}$ et V, l'énergie potentielle, une variable dépendante de x alors

$$H = \overline{T} + V$$

où $\overline{T}$ est la transformation de Legendre de T

$$\overline{T} = p\,\dot{x} - T \text{ où } \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = p$$

(donc une variable dépendante de x et p)

Exemple emblématique traité par les équations de Hamilton

- Les énergies cinétiques et potentielles sont

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{x}^2 \quad ; \quad V = m\ g\ h$$

- calculer l'énergie cinétique $\overline{T}$ dépendante de x et p

$$\overline{T} = p\ \dot{x} - \frac{1}{2}\ m\, \ell^2\ \dot{x}^2 \text{ où } m\, \ell^2\ \dot{x} = p \Longrightarrow \overline{T} = \frac{p^2}{2\ m\ l^2}$$

- le hamiltonien est

$$H = \frac{p^2}{2\ m\, \ell^2} + m\ g\ h$$

- les équations de Hamilton fournissent alors

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p/(m\, \ell^2) \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{p^2}{m\, \ell^3}\ \dfrac{h''\ h'}{\ell} - m\ g\ h' \end{cases}$$

C'est encore l'équation obtenue par la 2° loi de Newton projetée sur $\vec{\tau}$!

Hamiltonien et énergie

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dp}{dt}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}\dfrac{dp}{dt} \\ \dfrac{dx}{dt}\dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0$$

- Si H est une variable dépendante de x et p seuls (et donc indépendant du temps) alors

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0$$

  le hamiltonien est constant et sa valeur s'appelle l'énergie (c'est le cas de l'exemple emblématique) ;
- Si par contre H dépend aussi du temps alors

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

  la dérivée temporelle totale est égale à la dérivée partielle.

Résumé : Problème de mécanique à 1 ddl

- Choisir le paramètre x du degré de liberté ;

- Exprimer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V en fonction de x et $\dot{x}$;

- Lagrange : le lagrangien est $L = T - V$ et $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x} \end{cases}$

- Hamilton :
  - exprimer la transformée de Legendre $\overline{T}$ en fonction de x et p avec
  $$\overline{T} = p\,\dot{x} - T \text{ où } \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = p$$
  - le hamiltonien est $H = \overline{T} + V$ et $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$

Changement de variable (1/2)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ \ddot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\ \dot{x} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

Si $x = G(X)$ alors $\dot{x} = G'\ \dot{X}$ et $\ddot{x} = G''\ \dot{X}^2 + G'\ \ddot{X}$, d'où

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ G'\ \ddot{X} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ G''\ \dot{X}^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\ G'\ \dot{X} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

où les dérivées partielles de L sont des variables dépendantes de X et $\dot{X}$ comme

$$\frac{\partial^{p+q} L}{\partial x^p \partial \dot{x}^q}(G(X), G'(X)\ \dot{X})$$

Si on introduit une autre fonction

$$\mathcal{L}(X, \dot{X}) = L(G(X), G'(X)\ \dot{X})$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \frac{\partial L}{\partial x}\ G' + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ G''\ \dot{X} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ G'$$

Changement de variable (2/2)

il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ G''\ \dot{X} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\ G'\ \dot{X} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ \left(G'' \dot{X}^2 + G'\ \ddot{X}\right)\right)\ G'$$

et l'affirmation que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \text{ Compte tenu que : } \dot{x} = G'\ \dot{X}\ ;\ \ddot{x} = G''\ \dot{X}^2 + G'\ \ddot{X}$$

conduit à

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ G'\ \ddot{X} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ G''\ \dot{X}^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\ G'\ \dot{X} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ G''}\ \dot{X} = \frac{\partial L}{\partial x}\ G' + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ G''}\ \dot{X}$$

C'est le produit de G' par l'équation du mouvement en X issue de celle de x. Donc si G est bijective l'écriture des équations d'Euler-Lagrange à partir d'un lagrangien directement issu d'un changement de variable conduit aux équations de mouvement correcte.

La méthode d'Euler Lagrange (et donc aussi de Hamilton) est invariante par rapport au paramétrage utilisée.

Énergie potentielle d'une force dépendant de x

► Si maintenant la force $\vec{f}$ qui s'exerce sur la masse ponctuelle une fonction de $\vec{x}$ soit : $\vec{f}(\vec{x})$
Seule agit la composante de cette force dans la direction du mouvement et la position $\vec{x}$ est assujettie à rester sur la courbe Γ, le travail élémentaire de $\vec{f}$ dans un déplacement élémentaire δx est

$$\delta W = \vec{f}\left(x + \vec{k}_x + h(x)\; \vec{k}_z\right) \cdot \vec{\tau}\, \ell\, \delta x$$

d'où vient la définition de la force associée à x comme

$$f(x) = \vec{f}\left(x\; \vec{k}_x + h(x)\; \vec{k}_z\right) \cdot \vec{\tau}\, \ell$$

Ce travail est apporté à la masse ponctuelle et converti en énergie cinétique, ce qui se fait au détriment d'une énergie potentielle définie par

$$V = -\int_0^x f(\alpha)\; d\alpha$$

qui est une variable dépendante de x.
Les méthodes d'Euler-Lagrange et de Hamilton restent valables avec cette énergie potentielle.

Énergie potentielle et travail d'une force prescrite

► Si cette fois la force qui s'exerce sur la masse ponctuelle est prescrite, c'est à dire de la forme $\vec{f}(t)$ ou $\vec{f}$ une variable dépendante de la variable indépendante t.
Comme précédemment, Le travail élémentaire de la force dans un déplacement élémentaire δx est

$$\delta w = \vec{f}(t) \cdot \vec{\tau}\, \ell\, \delta x$$

d'où vient la définition de la force associée à x comme

$$f(t, x) = \vec{f}(t) \cdot \vec{\tau}\, \ell$$

Ce travail est apporté à la masse ponctuelle et converti en énergie cinétique, ce qui se fait au détriment d'une énergie potentielle définie par

$$V = -\int_0^x f(t, \alpha)\, d\alpha$$

qui est une variable dépendante de x et t.
Les méthodes d'Euler-Lagrange et de Hamilton restent valables avec cette énergie potentielle.

Pas d'énergie potentielle pour une force dissipative

- Finalement lorsque la force qui s'exerce sur la masse ponctuelle est dissipative, c'est à dire de la forme $\vec{f}(\dot{x})$
Son travail élémentaire de la force dans un déplacement élémentaire δx est
$$\delta w = \vec{f}\,(\dot{x}) \cdot \vec{\tau}\,\ell\,\delta x$$
d'où vient la définition de la force associée à x comme
$$f(\dot{x}, x) = \vec{f}\,(\dot{x}) \cdot \vec{\tau}\,\ell$$
Elle ne dérive pas d'une énergie potentielle, i.e. on ne trouve pas V telle que
$$f = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
D'autre part on ne peut non plus ranger cette force dans T
Les méthodes d'Euler-Lagrange et de Hamilton échouent [2] en présence de forces dissipatives.

2. Ce n'est pas tout à fait exact, ce point est repris leçon No 9.

La force de réaction

- La considération de la force de réaction exercée par le support pour que le mouvement se fasse suivant la courbe prescrite entre dans le cadre des méthodes d'Euler-Lagrange et de Hamilton ;

- mais son analyse passe par l'utilisation de la notion de multiplicateur de Lagrange qui sera introduite leçon No 2.

Exercice 1 : Masse, ressort et force prescrite

Une masse ponctuelle m liée à un ressort de raideur k, assujettie à un déplacement rectiligne x compté à partir de la longueur à vide du ressort, est soumise à l'action d'une force f prescrite dépendant du temps.

1. Trouver les équations du mouvement par la méthode d'Euler-Lagrange ;
2. Idem par la méthode de Hamilton ;
3. Dans le cas où la force est constante, vérifier que le hamiltonien H est constant et tracer le portrait de phase (les lignes $H =$ Constante dans le plan de phase) ;
4. Paramétrer ces lignes sous la forme $x = \mathcal{X}\ \sin\theta; p = \mathcal{P}\ \cos\theta$ où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{X}$ sont des constantes et montrer que θ varie linéairement avec le temps comme $\theta = 2\pi\ t/T + \theta_0$ où T et θ_0 sont à déterminer ; en déduire la loi de mouvement de x ;
5. La force est maintenant constante par morceaux : de 0 à $T/2$ elle vaut F, de $T/2$ à T $-F$. Tracer l'allure du portrait de phase et vérifier que cette dépendance conduit à une situation de résonnance.

Exercice 2 : Pendule simple – modèle avec variable de position angulaire

Une masse ponctuelle m est reliée à une extrémité d'une tige de longueur l_0 dont l'autre est fixée de manière pouvoir se déplacer librement dans un plan et soumise à l'action de la pesanteur (dont la direction est dans le plan). L'angle entre la direction de la pesanteur et la tige est noté θ.

1. Trouver les équations du mouvement par la méthode d'Euler-Lagrange ;
2. Idem par la méthode de Hamilton ;
3. Vérifier que le hamiltonien H est constant et tracer le portrait de phase ;
4. Exprimer la période d'oscillation dans le cas où il y en a une (i.e. θ oscille entre deux valeurs sans que la différence de ces deux valeurs dépasse 2π) ;
5. Exprimer le temps nécessaire pour que le pendule fasse un tour complet dans l'autre cas.

Exercice 3 : Pendule simple – modèle avec comme variable de position la projection de la position de la masse sur l'axe horizontal

Le problème du pendule simple est repris avec cette nouvelle variable de position dans le but de montrer que les méthodes d'Euler-Lagrange et de Hamilton conduisent encore aux équations correctes du mouvement. On suppose que l'angle est toujours compris entre $\pm\pi/2$.

1. Trouver les équations du mouvement par la méthode d'Euler-Lagrange ;
2. Idem par la méthode de Hamilton ;
3. Montrer que les équations trouvées sont compatible savec celles de l'exercice précédent par un changement de variables direct ;
4. Constater donc sur cet exemple que le gain épistémique apporté par les méthodes d'Euler-Lagrange et de Hamilton se traduit par une diminution importante des calculs à faire dans le cas de re-paramétrisation d'un problème.

Exercice 4 : Balançoire simplifiée

Les conditions de l'exercice 2 sont reprises, à ceci près ce n'est plus la masse ponctuelle qui est située à l'extrémité libre de la tige mais l'extrémité d'une autre tige de longueur l et c'est sur l'autre extrémité de cette tige qu'est attachée la masse ponctuelle. L'angle entre les deux tiges est noté α, c'est une fonction du temps prescrite.

1. Trouver les équations du mouvement par la méthode d'Euler-Lagrange ;
2. Idem par la méthode de Hamilton ;
3. Utiliser une méthode numérique d'intégration sur les équations de Hamilton dans le cas où $\alpha = \pi/2\ \cos 2\pi\ t/T$ où T est la période libre d'oscillation d'un pendule de longueur l_0 ;
4. Tester l'amélioration de la loi de α en le choisissant comme précédemment tant que $t < 5T$ et nul par la suite ;
5. Comment les calculs précédents devraient-ils être modifiés si α était pris comme une variable qui dépendrait non plus du temps t mais de θ ?