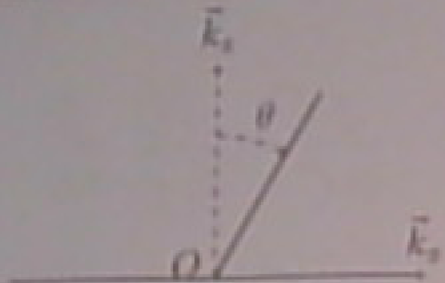
Informations : Tous documents et calculatrices autorisés – 1h00 – 3 points par question (approximativement)

Chute de bâton



Un bâton de masse m et de longueur ℓ est posé sur un plan horizontal. Il tombe (champ de pensanteur $-g\,\vec{k}_z$) dans le plan $\vec{k}_x, \vec{k}_z$. Son extrêmité O en contact avec le plan horizontal est fixe et on repère sa position par l'angle θ.

L'étude cinématique a permis de trouver les énergies cinétique et potentielle comme

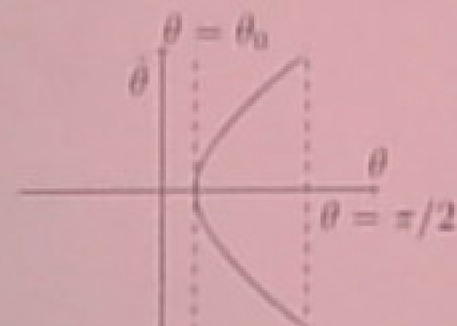
$$T = \frac{1}{2}\,\frac{m\,\ell^2}{3}\,\dot\theta^2 \;;\; V = \frac{1}{2}\,m\,g\,\ell\,\cos\theta$$

Question 1 – Écrire le lagrangien puis l'équation d'Euler-Lagrange.

Question 2 – Écrire le hamiltonien (on appellera p_θ le moment associé à θ) puis les équations de Hamilton.

Question 3 – La valeur du hamiltonien étant constante, on en déduit que, dans la circonstance où initialement $\theta = \theta_0$ et $\dot\theta = 0$,

$$\dot\theta^2 + \frac{3\,g}{\ell}\,\cos\theta = \frac{3\,g}{\ell}\,\cos\theta_0$$

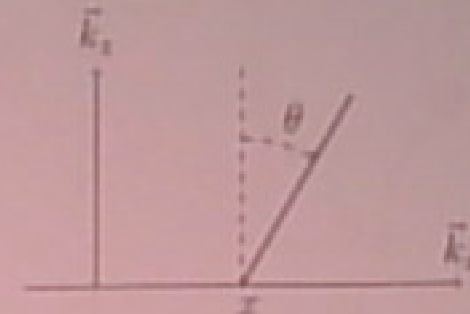


à droite, tracé des θ, $\dot\theta$ satisfaisant l'expression dans le plan de phase.

Donner l'expression du temps t_c au bout duquel le bâton se retrouve à la position ~~verticale~~ en fonction de θ_0 ($0 < \theta_0 < \pi/2$), g et ℓ sous une forme intégrale. Horizontale

> Ce n'est pas demandé pour l'interrogation, mais on tirera grand profit à vérifier en autonomie que les expressions données pour les énergies cinétique et potentielle sont correctes.

Chute de bâton bis



Ce même bâton et le même problème sont considérés, mais cette fois l'extrémité O du bâton peut se déplacer librement le long de l'axe $\vec{k}_x$, il est repéré par la coordonnée x. L'énergie potentielle ne varie pas et l'énergie cinétique est modifiée comme

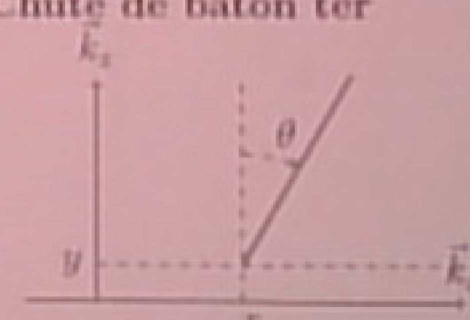
$$T = \frac{1}{2}\,m\,\left(\dot x^2 + \frac{\ell^2}{3}\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ell\,\dot x\,\dot\theta\right)$$

Question 4 – Écrire le hamiltonien (p_x pour le moment associé à x).

Question 5 – L'une des variables de configuration est ignorable. Préciser laquelle et montrer que si initialement $\dot x = 0$, $\dot\theta = 0$, $\theta = 0$ cela permet de se ramener à un problème similaire au précédent.

Question 6 – Donner alors : le temps au bout duquel le bâton se retrouve à la position horizontale ~~en fonction du temps de la question 3~~, la distance parcourue par x en fonction de θ_0 et l.

Chute de bâton ter



Le bâton et le même problème précédant sont considérés. On souhaite connaitre la force de réaction du plan horizontal sur l'extrémité O. Pour cela on introduit une variable de configuration supplémentaire y. Les énergie cinétique et potentielle sont modifiées comme

$V = mg\left(y + \frac{\ell\cos\theta}{2}\right)$

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \frac{\ell^2}{3}\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ell\,\dot x\,\dot\theta - \sin\theta\,\ell\,\dot y\,\dot\theta\right) \;;\; V = m\,g\,\left(y + \frac{1}{2}\,\ell\,\cos$$

Question 7 – Écrire le lagrangien modifié par la liaison $y = 0$, l'équation d'Euler-Lagrange en y et en tirer une expression de cette force de réaction en fonction des variables de phase et de l'accélération angulaire.

Q1 : $L = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m g \ell \cos\theta$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \longrightarrow \quad \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} = \frac{mg\ell}{2}\sin\theta$$

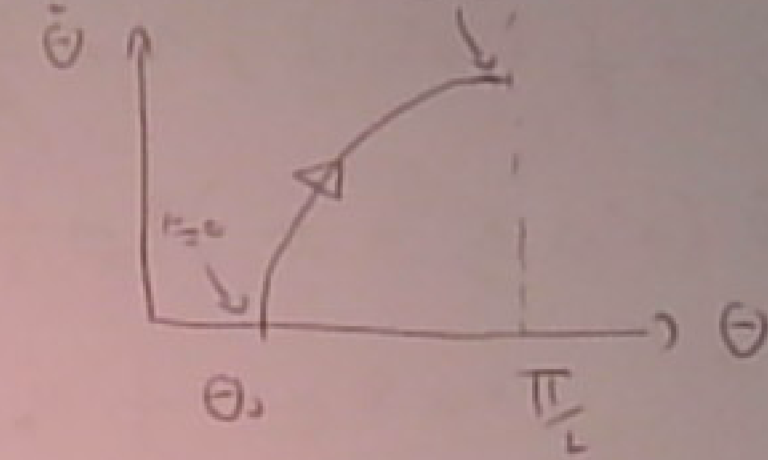
Q2 $\quad p_\theta = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}$

$$\longrightarrow T = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)}$$

$$\rightarrow H = T + V = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)} + \frac{1}{2} m g \ell \cos\theta$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{d}{dt} p_\theta = \frac{mg\ell}{2}\sin\theta \\ \frac{d}{dt}\theta = \frac{p_\theta}{\frac{m\ell^2}{3}} \end{array}\right.$$

Q3 :



$$\dot\theta = + \sqrt{\frac{3g}{\ell}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

$\downarrow$

$$\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} = dt$$

$\downarrow$

$$t_c = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$

Q4:

$$T = \frac{1}{2} m \begin{pmatrix} \dot\theta & \dot x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l^2}{3} & \frac{l\cos\theta}{2} \\ \frac{l\cos\theta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot x \end{pmatrix}$$

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P_\theta & P_x \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{l\cos\theta}{2} \\ -\frac{l\cos\theta}{2} & \frac{l^2}{3} \end{pmatrix}}{m\, l^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\cos^2\theta}{4}\right)} \begin{pmatrix} P_\theta \\ P_x \end{pmatrix}$$

$$H = \overline{T} + V$$

Q5: x est ignorable

$\Rightarrow P_x = m\left(\dot x + \frac{l\cos\theta}{2}\dot\theta\right)$

est constant

$\dot x(t=0),\ \dot\theta(t=0) = 0 \Rightarrow P_x = 0$

ainsi $\dot x + \frac{l\cos\theta}{2}\dot\theta = 0$

Du coup ça revient à étudier

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{3} - \frac{\cos^2\theta}{2}\right)\dot\theta^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m l^2}{3}\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\theta\right)\dot\theta^2$$

avec $V = \frac{1}{2} m g l \sin\theta$

Q6: $l \to l\sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2\theta}$

et l'intégrale 1ère est

$$\dot\theta^2 + \frac{3g}{l\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2\theta}}\sin\theta = \frac{3g}{l\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2\theta_0}}\sin\theta_0$$

d'où $t_c = \sqrt{\frac{l}{3g}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2\theta_0}} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2\theta}}}}$

et

$$\int_0^{t_c} \dot x\, dt + \int_0^{t_c} \frac{l}{2}\cos\theta\, \dot\theta = 0$$

$$x(t_c) - x(0) = \frac{l}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\theta_0\right)$$

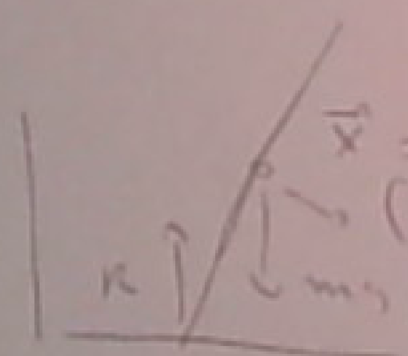
Q7. $L = \frac{1}{2} m\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \frac{l^2}{3}\dot\theta^2 + \cos\theta\, l \dot x \dot\theta - \sin\theta\, l \dot y \dot\theta\right) - mg\left(y + \frac{1}{2} l \cos\theta\right) + \lambda y$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot y} = \frac{\partial L}{\partial y} \longrightarrow \frac{d}{dt} m\left(\dot y - \sin\theta \frac{l}{2}\dot\theta\right) = -mg + \lambda$

$y = 0 \Rightarrow \dot y, \ddot y = 0 \Rightarrow \lambda = mg - \frac{d}{dt}\left(\sin\theta \frac{l}{2}\dot\theta\right)$

$= mg - \cos\theta \frac{l}{2}\dot\theta^2 - \sin\theta \frac{l}{2}\ddot\theta$

et si on applique le PFD on voit que λ est bien la force de réaction.



$\vec X = (x + \frac{l}{2}\sin\theta)\vec e_x + (y + \frac{l}{2}\cos\theta)\vec e_y$

$m\frac{d^2}{dt^2}\left(x + \frac{l}{2}\sin\theta\right) = 0$

$m\frac{d^2}{dt^2}\left(y + \frac{l}{2}\cos\theta\right) = R - mg \iff \frac{d}{dt}\left(m\left(\dot y - \dot\theta\frac{l}{2}\sin\theta\right)\right) = R - mg$

$m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{l^2}{3}\theta\right) = R\sin\theta$