

Interrogation : Mécanique et électricité analytiques

ISN 1A

17 nov. 2022

L'adéquation des réponses aux questions posées, le soin et la qualité de la rédaction seront pris en compte.

A- L'expression des énergies cinétique et potentielle d'un dispositif à 2 degrés de liberté (ddls) s, ϑ est

$$T = \frac{m}{2} \left(\left(s^2 + \frac{a^2}{6} \right) \dot{\vartheta}^2 + \dot{s}^2 \right), \quad V = -g m s \sin \vartheta \quad (1)$$

1)[2pt] Écrire les équations d'Euler-Lagrange.

2)[2pt] Écrire le hamiltonien.

3)[2pt] Écrire les équations de Hamilton.

B- On considère maintenant un dispositif à 3 ddls x, z, ϑ avec une liaison entre ddls et les énergies cinétique et potentielles

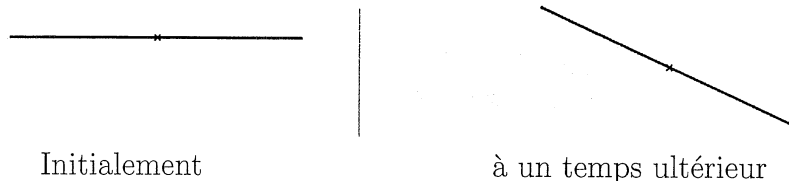
$$z \cos \vartheta + x \sin \vartheta = 0, \quad T = \frac{m}{2} \left(\dot{z}^2 + \dot{x}^2 + \frac{a^2}{6} \dot{\vartheta}^2 \right), \quad V = g m z \quad (2)$$

4)[2pt] Écrire les équations d'Euler-Lagrange (en prenant la liaison en compte).

5)[2pt] Calculer la valeur du multiplicateur de Lagrange en fonction des $x, z, \vartheta, \dot{x}, \dot{z}, \dot{\vartheta}$.

6)[2pt] Montrer que le dispositif de A s'obtient à partir de celui-ci en posant $x = s \cos \vartheta, z = -s \sin \vartheta$.

C- On considère la chute d'une barre droite très peu épaisse posée sur une table de manière que le centre de gravité (cdg) de la barre dépasse de la table. La barre tombe en glissant sur le coin de la table (cf. dessin, le bloc gris est la table, le trait noir la barre, la croix son cdg)



7)[3pt] Montrer que cette chute se modélise comme dans A- et/ou B-.

8)[3pt] Le multiplicateur de Lagrange de B- a alors une interprétation en termes de mécanique newtonienne. La donner et illustrer l'explication par un dessin.

9)[2pt] Lorsque la barre est posée de manière le centre de gravité coïncide avec le bord de la table, elle ne bouge a priori pas. Retrouver ce fait à partir des équations d'Euler-Lagrange de A- et B-.

$$A - T = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \frac{v^2}{6} \right) \ddot{\theta} + \dot{x}^2, \quad V = -m g \Delta \sin \theta$$

$$1) \quad L = T - V \quad \rightarrow \quad m \ddot{x} = m \Delta \ddot{\theta} + m g \Delta \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \rightarrow \quad m \frac{d}{dt} \left(\Delta \cdot \frac{v^2}{6} \dot{\theta} \right) = m g \Delta \cos \theta$$

$$2) \quad T = \frac{1}{2} \left(\frac{p_{\theta}^2}{m(\Delta^2 + \frac{v^2}{6})} + \frac{p_x^2}{m} \right) \quad \left| \quad p_{\theta} = m(\Delta^2 + \frac{v^2}{6}) \dot{\theta} \right. \\ \left. p_x = m \dot{x} \right.$$

$$3) \quad \left| \begin{aligned} \frac{d p_x}{d t} &= - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{d p_{\theta}}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \end{aligned} \right| \quad \left| \begin{aligned} \frac{d p_x}{d t} &= - m g \Delta \cos \theta \\ \frac{d p_{\theta}}{d t} &= \frac{p_{\theta}^2}{m(\Delta^2 + \frac{v^2}{6})^2} + m g \Delta \sin \theta \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{d p_{\theta}}{d t} &= - \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \frac{d x}{d t} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} \end{aligned} \right| \quad \left| \begin{aligned} \frac{d p_{\theta}}{d t} &= - m g \Delta \cos \theta \\ \frac{d x}{d t} &= \frac{p_x}{m(\Delta^2 + \frac{v^2}{6})} \end{aligned} \right.$$

$$B - T = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \frac{v^2}{3} + \frac{v^2}{6} \dot{\theta}^2 \right), \quad V = m g \Delta \sin \theta \quad \text{or} \quad 3 \cos \theta + \Delta \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$4) \quad L = T - V + \lambda (3 \cos \theta + \Delta \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \rightarrow \quad m \ddot{x} = \lambda \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \rightarrow \quad \frac{m v^2}{6} \ddot{\theta} = \lambda (-3 \dot{\theta} \sin \theta + \Delta \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \quad \rightarrow \quad m \ddot{\lambda} = \lambda \cos \theta - m g$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \quad \rightarrow \quad 3 \cos \theta + \Delta \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

5)

$$3\omega_0 + n\dot{\omega}_0 = 0 \Rightarrow (3\omega_0 + 2\dot{\omega}_0) + (-3\dot{\omega}_0 + n\omega_0)\ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow (3\omega_0 + 2\dot{\omega}_0) + (-3\dot{\omega}_0 + n\omega_0)\ddot{\theta} + 2(-3\dot{\omega}_0 + n\omega_0)\dot{\theta}$$

$$- (3\omega_0 + n\dot{\omega}_0)\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\frac{\lambda\omega_0 - m_2}{m}\omega_0 + \frac{\lambda\dot{\omega}_0}{m}\dot{\omega}_0 + (-3\dot{\omega}_0 + n\omega_0)\lambda \frac{(-3\dot{\omega}_0 + n\omega_0)}{m\omega_0^2} = 2(3\dot{\omega}_0 - n\omega_0)\dot{\theta}$$

→

$$\frac{\lambda}{m} \left(1 - \frac{(-3\dot{\omega}_0 + n\omega_0)^2}{\omega_0^2} \right) = 2(3\dot{\omega}_0 - n\omega_0)\dot{\theta} + g\omega_0$$

→

$$\lambda = m \frac{2(3\dot{\omega}_0 - n\omega_0)\dot{\theta} + g\omega_0}{1 - \frac{(-3\dot{\omega}_0 + n\omega_0)^2}{\omega_0^2}}$$

6)

$$n = \Delta\omega_0 \Rightarrow 3\omega_0 + n\dot{\omega}_0 = 0 \quad \text{donc c'est hier une paramétrisation de la liaison}$$

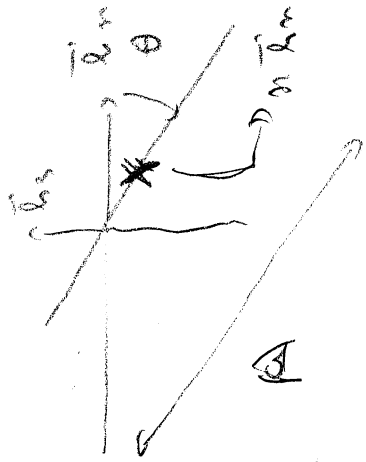
$$\dot{\omega}_0 = \dot{\omega}_0 - n\dot{\omega}_0\dot{\theta}$$

$$\dot{\omega}_0 = -n\dot{\omega}_0 - n\dot{\omega}_0\dot{\theta}$$

$$\dot{\omega}_0^2 + \dot{\omega}_0^2 = \dot{\omega}_0^2 + n^2\dot{\omega}_0^2$$

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{\omega}_0^2 + \dot{\omega}_0^2 \right) = \frac{m}{2} \left(\dot{\omega}_0^2 + n^2\dot{\omega}_0^2 \right) \quad \text{et } V = m_2 g z = -m_2 g n \dot{\omega}_0$$

C)



$$3 \times 10^4 \times 10^{-3} \bar{e}_3 - 10(10 \bar{e}_2 - 10 \bar{e}_3) = 0$$

4

$$\textcircled{1} \begin{cases} 10 - 10 = 0 \\ 3 + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow 30 + 10 = 0$$

Généralisation

$$10 \bar{e}_1 + 3 \bar{e}_3 \rightarrow 10 \bar{e}_1 - 10 \bar{e}_3$$

S'il on utilise $10, 3$ et 0 de $30 + 10 = 0$, c'est B-

S'il on utilise $10, 0$ et 0 de $10 - 10 = 0$, c'est A-

$$\text{de la car B} - T = \frac{1}{L} m (\ddot{x}^2 + \ddot{z}^2) + \frac{1}{L} j \ddot{\phi}$$

$$\frac{1}{L} m (\ddot{x}^2 + \ddot{z}^2) + \frac{1}{L} j \ddot{\phi} = \int \frac{A}{L} \frac{1}{L} \ddot{\phi}^2 ds = \frac{1}{L} \frac{m}{A} \frac{2 A^3}{3 \times 8} \ddot{\phi}^2$$

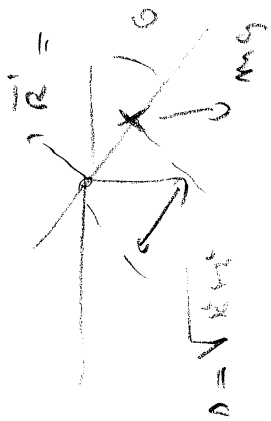
$$\rightarrow j = \frac{m A^2}{12} \quad \text{pour avoir } \frac{1}{L} \frac{m A^2}{6} \ddot{\phi}^2$$

$$A = \sqrt{2} a$$

(Hormisément, il me suis trompé)

2)

$$\vec{R} = R(\cos\theta \vec{e}_3 + \sin\theta \vec{e}_\theta)$$



En mécanique newtonienne

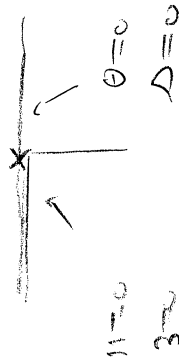
$$\begin{cases} m\ddot{\theta} = -mg + R\cos\theta \\ m\ddot{\phi} = R\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\theta = R\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

par compensation avec 4) on a $R = \lambda$ et $\lambda\sqrt{1-\sin^2\theta} = \lambda(-\sin\theta\cos\theta)$

Ce qui arrive pour $\begin{cases} x = \lambda\cos\theta \\ z = -\lambda\sin\theta \end{cases}$

3)



Avec A- $\dot{x} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$ initiales

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = 0$$

Avec B- $\dot{x} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ initiales

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{\theta} = \lambda - mg, \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\text{et } 5) \quad \lambda = mg$$