

Mécanique et électricité analytiques



Notions élémentaires sur la géométrie et géométrie différentielle

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

28 septembre 2018

L'espace, la position dans l'espace

- E_3 l'espace, sont confondues les notions : 1) mathématique d'espace vectoriel euclidien et 2) physique d'espace absolu dans lequel sont placés des objets ;
- $\vec{x} \in E_3, \vec{x}' \in E_3$ deux positions dans l'espace :
 - $|\vec{x} - \vec{x}'|$ la norme euclidienne est la distance séparant $\vec{x}$ de $\vec{x}'$;
 - $\vec{x} \cdot \vec{x}' = |\vec{x}| |\vec{x}'| \cos \theta$ le produit scalaire de $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ est le produit des distances à l'origine de $\vec{x}, \vec{x}'$ et du cosinus de l'angle en l'origine du triangle formé par l'origine et $\vec{x}, \vec{x}'$
 - $\vec{x} \times \vec{x}'$ le produit vectoriel de $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ est le vecteur orthogonal à $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ de norme la surface du parallélogramme qui complète le triangle précédent ; ce n'est donc pas une position !
- Ces définitions ne sont pas opérationnelles en elles même $\implies$ Passage en coordonnées.

Coordonnées cartésiennes

► $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$ sont des vecteurs d'une base orthonormée de E_3 ;
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z$ sont les coordonnées cartésiennes (ou rectangulaires) de $\vec{x}$.

► $|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$, la distance entre $\vec{x}$ et $\vec{x}'$;

► $\vec{x} \cdot \vec{x}' = x x' + y y' + z z'$, le produit scalaire de $\vec{x}$ et $\vec{x}'$;

► $\vec{x} \times \vec{x}' = (y z' - y' z) \vec{k}_x + (z x' - z' x) \vec{k}_y + (x y' - x' y) \vec{k}_z$, le produit vectoriel de $\vec{x}$ et $\vec{x}'$;

► $\vec{x} - \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}}{|\vec{x}'|^2} \vec{x}'$, la projection de $\vec{x}$ sur l'orthogonal de $\vec{x}'$.

Coordonnées cylindriques et sphériques

► Soit $\vec{k}_r = \cos \phi \vec{k}_x + \sin \phi \vec{k}_y$, $\vec{k}_\phi = -\sin \phi \vec{k}_x + \cos \phi \vec{k}_y$;
 $(\vec{k}_r, \vec{k}_\phi, \vec{k}_z)$ forment une base orthonormée de E_3 ;
 $(r, \phi, z) \in [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ sont les coordonnées cylindriques de
 $\vec{x} = r \vec{k}_r + z \vec{k}_z$;

► Soit $\vec{k}_\rho = \cos \theta \vec{k}_z + \sin \theta \vec{k}_r$, $\vec{k}_\theta = -\sin \theta \vec{k}_z + \cos \theta \vec{k}_r$;
 $(\vec{k}_\rho, \vec{k}_\theta, \vec{k}_\phi)$ forment une base orthonormée de E_3 ;
 $(\rho, \phi, \theta) \in [0, \infty[\times [0, \pi[\times]0, 2\pi[$ sont les coordonnées sphériques
de $\vec{x} = \rho \vec{k}_\rho$;

► La position $\vec{x}$ s'exprime comme

$$\vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z = r \vec{k}_r + z \vec{k}_z = \rho \vec{k}_\rho$$

Courbe plane ($z = h(x)$)

► Expression paramétrique $\Gamma = \{\vec{x} \in E_3 : \vec{x} = x \vec{k}_x + h(x) \vec{k}_z\}$
pour $x \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction donnée ;
 $x \longrightarrow h(x)$

► $\vec{\tau} = \frac{\vec{k}_x + h'(x) \vec{k}_z}{\sqrt{1 + h'(x)^2}}$, vecteur tangent ;

► $\vec{n} = -\vec{k}_y \times \vec{\tau} = \frac{-h'(x) \vec{k}_x + \vec{k}_z}{\sqrt{1 + h'(x)^2}}$, vecteur normal ;

► $\ell(x) = \sqrt{1 + h'(x)^2}$, l'élément de longueur de la courbe est $\ell \, dx$

► $C(x) = \frac{h''(x)}{(1 + h'(x)^2)^{3/2}} = \frac{h''(x)}{\ell^3}$, la courbure
(inverse du rayon de courbure) ;

► $\begin{cases} \vec{\tau}' &= C \ell \vec{n} \\ \vec{n}' &= -C \ell \vec{\tau} \end{cases}$, relations de Frenet pour une courbe plane.

Cas particuliers

► Plan incliné : $h(x) = h_0 - \tan \theta x$ où $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ est l'angle d'inclinaison du plan

► $l = \frac{1}{\cos \theta}$, $C = 0$,

$$\vec{\tau} = \cos \theta \vec{k}_x - \sin \theta \vec{k}_z \quad ; \quad \vec{n} = \sin \theta \vec{k}_x + \cos \theta \vec{k}_z$$

► $\dot{\vec{x}} = \dot{x} (\vec{k}_x + \tan \theta \vec{k}_z)$; $\ddot{\vec{x}} = \ddot{x} (\vec{k}_x + \tan \theta \vec{k}_z)$

► Demi-cercle inférieur : $h(x) = -R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$ pour $x \in]-R, R[$

► $l = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}$, $C = \frac{1}{R}$, $\vec{\tau} = \frac{\vec{k}_x}{l} + \frac{x}{R} \vec{k}_z$, $\vec{n} = -\frac{x}{R} \vec{k}_x + \frac{\vec{k}_z}{l}$

► $\dot{\vec{x}} = \dot{x} \left(\vec{k}_x + \frac{l x}{R} \vec{k}_z \right)$; $\ddot{\vec{x}} = \ddot{x} \vec{k}_x + \frac{\dot{x}^2 l^3}{R} \vec{k}_z$

(Abscisse curviligne) – juste pour mémoire

- L'abscisse curviligne : la courbe peut être reparamétrée comme

$$x(s) \vec{k}_x + h(x(s)) \vec{k}_z$$

en introduisant la nouvelle variable

$$s = \int_0^{x(s)} \sqrt{1 + h'(\alpha)^2} d\alpha$$

où $x(s)$ est la valeur de x qui correspond à un s donné ;

► $\frac{dx}{ds}(s) (\sqrt{1 + h'(x(s))^2}) = 1$

- l'avantage est que $\ell = 1$, l'élément de longueur est ds et donc :

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{ds} (\vec{k}_x + h' \vec{k}_z), \quad \vec{n} = \frac{dx}{ds} (-h' \vec{k}_x + \vec{k}_z)$$

Nappe plane ($z = h(x, y)$)

► Expression paramétrique

$\Gamma = \{ \vec{x} \in E_3 : \vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + h(x, y) \vec{k}_z \}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction donnée ;

$$x \longrightarrow h(x, y)$$

► $\vec{\tau}_x = \frac{\vec{k}_x + \partial_x h(x, y) \vec{k}_z}{\sqrt{1 + \partial_x h(x, y)^2}}$, vecteur tangent dans le plan normal à $\vec{k}_y$

► $\vec{\tau}_y = \frac{\vec{k}_y + \partial_y h(x, y) \vec{k}_z}{\sqrt{1 + \partial_y h(x, y)^2}}$, vecteur tangent dans le plan normal à $\vec{k}_x$

► $\vec{n} = \vec{\tau}_x \times \vec{\tau}_y$, vecteur normal de la nappe ;

► $\Delta(x) = \sqrt{1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2}$, l'élément de surface de la courbe est $\Delta dx dy$

Nappe plane ($z = h(x, y)$)

► On n'aura pas besoin des courbures mais... disons que chaque courbe plane définie comme

$$\left\{ \vec{x} = r \left(\cos \theta \vec{k}_x + \sin \theta \vec{k}_y + h(r \cos \theta, r \sin \theta) \vec{k}_z \right) \text{ avec } r \in \mathbb{R} \right\}$$

a une courbure propre $c(\theta)$ On peut trouver les valeurs maximales $c_{\min}$ et minimales $c_{\max}$ (les courbures principales) de $c(\theta)$ et définir la courbure moyenne comme

$$c_{\text{moyenne}} = \frac{c_{\min} + c_{\max}}{2}$$

la courbure de Gauss comme

$$c_{\text{Gauss}} = c_{\min} c_{\max}$$

et se livrer à des investigations qui conduisent au
Theorema egregium ; pour se la jouer Gauss, mais c'est pas
gagné :)