

Mécanique et électricité analytiques



Leçon 7



Fondements variationnels et principes

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

12 octobre 2020

Objectifs de la leçon

- ▶ Expliquer les principes des travaux virtuels en statique et de d'Alembert en dynamique.
- ▶ Expliquer le principe de moindre action mécanique (version de Hamilton) en connexion avec le principe de Fermat en optique.
- ▶ Donner en ensemble minimal d'éléments de calcul des variations. Seul le développement à l'ordre 1 des fonctionnelles est introduit. Les précisions sur les conditions de second ordre dans leur extrémisation ne sont pas données.
- ▶ Énumérer les autres principes de moindre action (d'après Lanczos).

La statique

- ▶ La statique s'occupe de la recherche des conditions d'équilibre d'un système mécanique.
- ▶ La position du système est décrit par un point de l'espace de configuration de coordonnées généralisées $X = (x_1, \dots, x_N)$ et il est soumis à un système de forces généralisées $F = (f_1, \dots, f_N)$ dépendant de X mais pas du temps.
- ▶ Le travail élémentaire δW de ce système de force dans un déplacement infinitésimal δX du point X est

$$\delta W = F \cdot \delta X = \sum_{n=1}^N f_n \delta x_n$$

ce déplacement infinitésimal δX s'appelle un déplacement virtuel et le travail élémentaire un travail virtuel.

Le principe des travaux virtuels

- Le principe des travaux virtuels énonce que le système est en équilibre lorsque

$$\forall \delta X : \delta W = 0$$

ce qui arrive lorsque X est tel que

$$F = 0$$

si les déplacements virtuels peuvent être quelconques.

- Le principe des travaux virtuels devient en fait utile dans le cas où les déplacements virtuels ne peuvent pas être quelconques (cf. leçon No 8) mais dans l'autre cas il peut être inféré de l'idée selon laquelle *aucun déplacement n'a lieu lorsque la force F est nulle* et qui se traduit par

$$\forall \delta X : F \cdot \delta X = 0$$

Le principe des travaux virtuels pour des forces potentielles

- Si les forces dérivent d'un potentiel V

$$F = -\nabla_X V$$

- Le développement de Taylor avec reste de Young de V autour d'une position X s'écrit

$$V(X + \delta X) = V(X) + \nabla_X V \cdot \delta X + o(\|\delta X\|)$$

$$\text{où } \nabla_X V = \begin{pmatrix} \partial_{X_1} V \\ \vdots \\ \partial_{X_N} V \end{pmatrix}; \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{o(u)}{u} = 0; \quad \|\cdot\| : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ Y \longrightarrow \|Y\|$$

$\nabla_X V$ est le gradient de V en X , o (notation de Landau) est une fonction satisfaisant la propriété ci-dessus, $\|\cdot\|$ est une norme définie sur \mathbb{R}^N qui est à préciser au cas à cas¹

-
1. si par exemple $X = (\rho, \theta)$ (avec $\rho \neq 0$), $\delta X = (\delta\rho, \delta\theta)$ alors

$$|\delta X| = \sqrt{\delta\rho^2 + 2\rho \sin\theta \delta\rho \delta\theta + \rho^2 \delta\theta^2} \text{ et pas } |\delta X| = \sqrt{\delta\rho^2 + \delta\theta^2}$$

Mais comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, cela n'a pas d'incidence mathématiquement.

Le principe des travaux virtuels pour des forces potentielles

- ▶ Le principe des travaux virtuels consiste en la recherche de X tel que

$$\forall \delta X : \nabla_X V \cdot \delta X = 0$$

- ▶ Mais il pourrait tout aussi bien être exprimé comme la recherche de X tel qui stationnarise V , la stationnarisation consistant précisément en cette condition.

- ▶ Il est même possible de demander que X soit un argument minimisant V

$$X \text{ tel que } \forall Y \in \mathbb{R}^N : V(X) \leq V(Y)$$

mais c'est une condition plus forte puisque la stationnarisation n'est que nécessaire : avec elle seule X peut maximiser V ou être un point selle (qui maximise V dans certaines directions et minimise dans les autres).

Dynamique

- ▶ La dynamique décrit l'évolution de positions successives $X(t)$, chacune correspondant à un temps t , dans l'espace de configuration d'un système.
- ▶ L'équilibre du système correspond à une évolution pour laquelle le point de l'espace de configuration ne varie pas : $X(t) = X_0$.
- ▶ Mais la loi d'évolution est *a priori* libre, elle pourrait par exemple être de la forme

$$\lambda \dot{X} = F ; \lambda \text{ une matrice}$$

où λ est une matrice. La dynamique décrite serait aristotélienne. Si par contre elle est de la forme

$$M \ddot{X} = F ; M \text{ une matrice}$$

la dynamique est newtonienne.

Exemple de dynamique aristotélicienne

► Une sphère de rayon R , de masse volumique ρ tombe dans un liquide de viscosité dynamique μ et masse volumique ρ' ; Son mouvement est correctement décrit par

$$6\pi \mu R \dot{x} = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho') g$$

où où la loi de Stokes est utilisée. Le terme d'inertie $\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \ddot{x}$ est négligé; si ce n'était pas fait, à partir d'une vitesse initiale nulle, il faudrait un temps de quelques

$$\tau = \frac{2}{9} \frac{R^2}{\nu} \quad \text{avec } \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{viscosité cinématique})$$

pour que la vitesse limite soit atteinte. Numériquement

ρ (kg)	μ (Pa s)	ρ' (kg)	;	R (m)		10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	...
$8.96 \cdot 10^3$	10^{-3}	10^3				τ (s)	22	0.22	0.002

L'approximation devient très valable pour les petites sphères. Et effectivement l'inertie est généralement négligée dans la dynamique des petites échelles.

Qu'est-ce-que l'inertie ?

- ▶ Inversement si les frottements sont négligés, les forces appliquées se traduisent encore par un mouvement mais en agissant sur l'inertie ; toute la question étant de spécifier une dénotation raisonnablement simple à ce concept d'inertie.
- ▶ De la même façon qu'une masse libre se déplace à vitesse constante, il y a des mouvements possibles dans un système mécanique. Le critère est que ces mouvements s'accomplissent en conservant l'énergie cinétique T .
- ▶ Parce que cela rend possible le développement qui suit, et aussi parce que c'est le cas pour tous les systèmes mécaniques, l'énergie cinétique est supposée être une forme quadratique des vitesses

$$T = \frac{1}{2} {}^t\dot{X} G \dot{X}$$

où G est une matrice dépendant de X .

Mouvement conservant l'énergie cinétique

► Un mouvement conservant l'énergie cinétique est donc une dépendance temporelle de la position X telle que

$$\frac{dT}{dt} = \nabla_{\dot{X}} T \cdot \ddot{X} + \nabla_X T \cdot \dot{X} = {}^t \dot{X} G \ddot{X} + \frac{1}{2} {}^t \dot{X} \left(\nabla_X G \dot{X} \right) \dot{X} = 0$$

► Et donc le vecteur $G \ddot{X} + \frac{1}{2} \left(\nabla_X G \dot{X} \right) \dot{X}$ doit être orthogonal à chaque instant au vecteur \dot{X} . Soit

$$G \ddot{X} + \frac{1}{2} \left(\nabla_X G \dot{X} \right) \dot{X} = A \dot{X}$$

où A est une matrice $N \times N$ complètement antisymétrique (pour que ${}^t \dot{X} A \dot{X} = 0$) dépendant de X et dont l'expression dépend de celle de G .

► Des considérations de symétries² conduisent à $A = 0$ et donc la loi du mouvement conservant l'énergie cinétique est

$$G \ddot{X} + \frac{1}{2} \left(\nabla_X G \dot{X} \right) \dot{X} = 0$$

2. La matrice A pourrait servir par exemple à introduire des forces de Coriolis, mais le référentiel d'étude est supposé ici galiléen.

L'équation d'Euler-Lagrange du mouvement libre

- Avec l'identité $G \ddot{X} = \frac{d}{dt} (G \dot{X}) - (\nabla_X G \dot{X})$ cette loi du mouvement conservant l'énergie cinétique devient

$$\frac{d}{dt} (G \dot{X}) - \frac{1}{2} (\nabla_X G \dot{X}) \dot{X} = 0$$

- Puisque $T = \frac{1}{2} \dot{X}^t G \dot{X}$, elle se réécrit³

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{X}} T) - \nabla_X T = 0$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange du mouvement libre, c'est à dire qui se produit sans forces appliquées et sous la seule action de l'inertie.

3. Cela n'a été établi que dans le cas où l'énergie cinétique est une forme quadratique des vitesses et il n'est pas certain que le résultat resterait identique à celui-ci dans un cas non-linéaire comme celui de la leçon 6 en électricité où énergie et coénergie magnétiques ne coïncidaient pas numériquement et où il faudrait effectivement reprendre l'analyse (qui conduirait cependant au même résultat).

Exemples de mouvements libres

- Pour une masse ponctuelle m , $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$, le mouvement libre est

$$m \frac{d}{dt} \dot{\vec{x}} = 0 \longrightarrow m \dot{\vec{x}} = \vec{C} \text{ste}$$

- Pour le double pendule (cf. exercice 1, leçon 2)

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

le mouvement libre est tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \sin(\theta_1 - \theta_2) \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix}$$

Il contient notamment les deux cas

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta_2 = \theta &\longrightarrow \ddot{\theta} = 0 && \text{(rotation pure)} \\ \theta_1 = -\theta_2 = \theta &\longrightarrow \cos\theta \ddot{\theta} + \sin\theta \dot{\theta}^2 = 0 && \text{(translation pure)} \end{aligned}$$

et cet exemple met en évidence la complexité que peut avoir un mouvement libre⁴.

4. En fait le mouvement est ici celui d'une masse soumise à des liaisons complexes, ce qui sera explicité leçon 8.

Force d'inertie

- Dans un mouvement donné, la force d'inertie \mathcal{I} est par définition l'opposé du terme $\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}} T - \nabla_x T$ soit

$$\mathcal{I} = -\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{x}} T) + \nabla_x T$$

- Le mouvement libre est donc celui pour lequel la force d'inertie est posée nulle

$$\mathcal{I} = 0$$

- Un mouvement sous l'action d'un système de forces F répond à la relation

$$\mathcal{I} + F = 0$$

Ce qui présente une analogie avec la statique.

Dynamique : le principe de d'Alembert

- ▶ La dynamique ajoute la force d'inertie \mathcal{I} à celles F qui s'exercent en statique.
- ▶ Le principe de d'Alembert est une extension du principe des travaux virtuels appliqué à la somme $F + \mathcal{I}$:
« l'équilibre dynamique » a lieu lorsque le travail de cette force dans un déplacement virtuel est nul

$$\forall \delta X : (F + \mathcal{I}) \cdot \delta X = 0$$

- ▶ Si l'équilibre est l'immobilité et que la dynamique traduit le mouvement alors la locution « d'équilibre dynamique » serait un oxymore puisque les deux termes sont antinomiques.
- ▶ Mais la dénotation à choisir de cette locution est que le point X de l'espace de configuration évolue selon les lois du mouvement plutôt que tout autrement ainsi qu'il pourrait *virtuellement* le faire.
- ▶ Avec le principe de d'Alembert ces autres possibilités d'évolution n'ont pas lieu, puisque la force d'inertie s'ajuste pour cela.

Forces potentielles

- Si les forces F dérivent d'un potentiel V

$$F = -\nabla_X V$$

alors le principe de d'Alembert d'écrit

$$\forall \delta X : \left(-\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{X}} T) + \nabla_X T - \nabla_X V \right) \cdot \delta X = 0$$

- les déplacements virtuels peuvent être des variables dépendantes du temps, et alors

$$\forall \delta X : -\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{X}} T \cdot \delta X) + \nabla_{\dot{X}} T \cdot \delta \dot{X} + \nabla_X (T - V) \cdot \delta X = 0$$

L'introduction du lagrangien $L = T - V$ conduit à la réécriture

$$\forall \delta X : -\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{X}} L \cdot \delta X) + \nabla_{\dot{X}} L \cdot \delta \dot{X} + \nabla_X L \cdot \delta X = 0$$

Forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange

► l'intégration entre les instants t_0 et t_1 de cette expression conduit à

$$\forall \delta X : \left[-\nabla_{\dot{X}} T \cdot \delta X \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_{\dot{X}} L \cdot \delta \dot{X} + \nabla_X L \cdot \delta X \right) dt = 0$$

► Le choix

$$\delta X(t_0) = 0 \quad ; \quad \delta X(t_1) = 0$$

élimine le terme de bord et il reste

$$\forall \delta X \text{ tq } \delta X(t_0) = \delta X(t_1) = 0 : \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_{\dot{X}} L \cdot \delta \dot{X} + \nabla_X L \cdot \delta X \right) dt = 0$$

qui s'appelle la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange posée en forme forte

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{X}} L) - \nabla_X L = 0$$

Fonctionnelle

- Une application

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R} \\ X(.) &\longrightarrow \mathcal{A}(X(.)) \end{aligned}$$

définie sur un espace vectoriel \mathfrak{X} de fonctions et à valeur dans \mathbb{R} est appelée une fonctionnelle. On note son argument $X(.)$ pour bien signifier qu'il s'agit d'une fonction et non pas d'un simple vecteur.

- Par exemple pour $N = 2$: $X(.) = (x, y)$

$$\mathcal{A}(x, y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{V(x, y)} ds$$

où $V(x, y)$ est la vitesse à laquelle un mobile peut se déplacer quand il est à la position (x, y) . L'espace de fonction peut être par exemple $\mathfrak{X} = C^1([0, 1])^2$ et la valeur de la fonctionnelle est le temps mis par un mobile qui se déplace sur la trajectoire (x, y) pour passer de la position $(x(0), y(0))$ à $(x(1), y(1))$.

Fonctionnelle différentiable

► Comme toute application une fonctionnelle est différentiable en $X(\cdot) \in \mathfrak{X}$ s'il est possible d'écrire le développement de Taylor avec reste de Young

$$\mathcal{A}(X(\cdot) + \delta X(\cdot)) = \mathcal{A}(X(\cdot)) + \nabla_{X(\cdot)} \mathcal{A}(X(\cdot))(\delta X(\cdot)) + o(\|\delta X(\cdot)\|)$$

où

$$\begin{aligned} \nabla_{X(\cdot)} \mathcal{A}(X(\cdot)) &: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R} \\ Y(\cdot) &\longrightarrow \nabla_{X(\cdot)} \mathcal{A}(X(\cdot))(Y(\cdot)) \end{aligned}$$

est une fonctionnelle linéaire continue ; o est la notation de Landau et où

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R} \\ Y(\cdot) &\longrightarrow \|Y(\cdot)\| \end{aligned}$$

est une norme définie sur \mathfrak{X} qui est à spécifier au cas à cas. Ce qui n'est pas si simple parce qu'il s'agit d'une norme sur un espace de fonction donc de dimension infinie et non pas une norme sur un espace vectoriel de dimension finie où toutes sont équivalentes les unes aux autres.

Différentiation de la fonctionnelle « temps »

► la fonctionnelle « temps » est celle de l'exemple précédant

$$\mathcal{A}(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{V(x, y)} ds$$

Compte tenu que

$$\frac{\sqrt{(\dot{x} + \dot{\tilde{x}})^2 + (\dot{y} + \dot{\tilde{y}})^2}}{V(x + \tilde{x}, y + \tilde{y})} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{V(x, y)} + \left(\frac{\dot{x} \dot{\tilde{x}} + \dot{y} \dot{\tilde{y}}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} V(x, y)} - \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\partial_x V \tilde{x} + \partial_y V \tilde{y})}{V(x, y)^2} \right) + o\left(\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2}\right) + o\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}\right)$$

il est possible de développer

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x(\cdot) + \tilde{x}(\cdot), y + \tilde{y}(\cdot)) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{V(x, y)} ds \\ &+ \int_0^1 \left(\frac{\dot{x} \dot{\tilde{x}} + \dot{y} \dot{\tilde{y}}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} V(x, y)} - \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\partial_x V \tilde{x} + \partial_y V \tilde{y})}{V(x, y)^2} \right) ds \\ &+ \int_0^1 \left(o\left(\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2}\right) + o\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}\right) \right) ds \end{aligned}$$

Différentiation de la fonctionnelle « temps »

► Ainsi $\nabla_{x(\cdot), y(\cdot)} \mathcal{A}((x(\cdot), y(\cdot)))(\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot)) =$

$$\int_0^1 \left(\frac{\dot{x} \dot{\tilde{x}} + \dot{y} \dot{\tilde{y}}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} V(x, y)} - \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\partial_x V \tilde{x} + \partial_y V \tilde{y})}{V(x, y)^2} \right) ds$$

► et

$$o(\|(x(\cdot), y(\cdot))\|) = \int_0^1 \left(o\left(\sqrt{\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2}\right) + o\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}\right) \right) ds$$

ce qui porterait à définir⁵ la norme dans l'espace de fonction comme

$$\|(x(\cdot), y(\cdot))\| = \int_0^1 \left(\tau \sqrt{\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2} + \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \right) ds$$

où τ est un temps caractéristique (le rapport d'une distance moyenne sur la vitesse moyenne du problème par exemple) ajouté pour ne pas créer d'inhomogénéité dans les dimensions physiques.

5. Les mathématiciens procèdent différemment, ils introduisent une norme *a priori*, celle des espaces de Sobolev (qui est différente de celle-ci), et partent de l'idée que les problèmes qui leur sont soumis sont adimensionnés

Conventions et permissions

- ▶ Les notations utilisées sont trop lourdes, aussi cesse-t-on de signifier que $\ll X \gg$ est une fonction en la notant $\ll X(.) \gg$
- ▶ de la même façon on cesse de signifier toutes les dépendances dans l'expression des fonctionnelles : $\mathcal{A}(X(.))$ devient \mathcal{A} , i.e. une variable dépendante de la variable indépendante X ; et surtout $\nabla_{X(.)}\mathcal{A}(X(.))(\delta X(.))$ devient $\nabla_X\mathcal{A}(\delta X)$, une variable dépendante de X et δX .
- ▶ Plus abusivement, la spécification des termes figurés dans les o est trop lourde dans le cas général, aussi convient-on de remplacer ces o par⁶ $\ll \& \dots \gg$ dans lequel seront rangés tous les termes d'ordre supérieurs à ceux qui sont investigués dans les développements.

6. C'est la notation qu'utilise Maxwell (dont il est vraisemblable que le souvenir restera alors que seront oubliés les notations qui suivent celles d'hier.)

Fonctionnelle d'action

► Les coordonnées X (des variables dépendantes du temps éléments d'un espace de fonction \mathfrak{X}) et Le lagrangien d'un système étant donné, la fonctionnelle d'action \mathcal{A} est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &: \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} L(X(t), \dot{X}(t)) dt \end{aligned}$$

d''unité physique de l'action est le Joule-seconde ($J s$)

► Par delà la forme particulière qui vient de lui être donné, l'action est un concept alternatif⁷ ceux de Newton pour formuler la mécanique de façon connexe à l'optique géométrique⁸.

L'idée est de définir une fonction (la fonctionnelle d'action) des positions possibles du système (les coordonnées généralisées) qui se révélerait être minimum pour le mouvement réel.

► En mécanique newtonienne au contraire le mouvement est déterminé par des lois locales plutôt que globales.

7. qui a été exploré par Leibnitz et Maupertuis.

8. Le principe de Fermat.

Le principe de Hamilton (1/2)

► Le principe de Hamilton considère l'action

$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} L(X(t), \dot{X}(t)) dt$ puis l'ensemble \mathcal{V} des fonctions X qui ont des valeurs X_0 et X_1 connues aux temps t_0 et t_1

$$\mathcal{V} = \{X \in \mathfrak{X} \text{ tq } X(t_0) = X_0 ; X(t_1) = X_1\}$$

et stipule que le mouvement qui passe par les positions X_0 en t_0 et X_1 en t_1 est décrit par la fonction $X \in \mathcal{V}$ qui stationnarise \mathcal{A} dans cet ensemble.

► On préférerait remplacer « stationnarise » par « minimise » c'est à dire que

$$X \in \mathcal{V} \text{ et } \forall Y \in \mathcal{V} \mathcal{A}(X) \leq \mathcal{A}(Y)$$

mais le mouvement réel ne conduira pas toujours à un minimum par contre il correspondra toujours à une stationnarisation de l'action.

Le principe de Hamilton (2/2)

► La signification de « stationnariser une fonctionnelle dans l'ensemble \mathcal{V} » est que le terme d'ordre 1 en δX dans le développement de $\mathcal{A}(X + \delta X)$ est nul. Mais il faut aussi que $X + \delta X$ soit élément de \mathcal{V} . Pour cela il suffit que δX soit élément de \mathcal{V}_0

$$\mathcal{V}_0 = \{X \in \mathfrak{X} \text{ tq } X(t_0) = 0 ; X(t_1) = 0\}$$

qui est une version homogène de \mathcal{V} .

► Ainsi la stationnarisation de \mathcal{A} dans \mathcal{V} s'écrit

$$\forall \delta X \in \mathcal{V}_0 : \nabla_X \mathcal{A}(\delta X) = 0$$

soit donc

$$\forall \delta X \in \mathcal{V}_0 : \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_X L(X, \dot{X}) \cdot \delta X + \nabla_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) \cdot \delta \dot{X} \right) dt = 0$$

qu'on reconnaît être la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange. Mais elle s'appelle maintenant plutôt la forme variationnelle de l'équation d'Euler-Lagrange.

Intégration par parties

► le terme en $\delta\dot{X}$ peut être intégré par parties

$$\int_{t_0}^{t_1} \nabla_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) \cdot \delta\dot{X} dt = \underbrace{\left[\nabla_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) \cdot \delta X \right]_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) \right) \cdot \delta X dt$$

et donc

$$\forall \delta X \in \mathcal{V}_0 : \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_X L(X, \dot{X}) - \frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) \right) \right) \cdot \delta X dt = 0$$

► La question se pose de savoir si cette relation entraîne nécessairement que $\nabla_X L(X, \dot{X}) - \frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) \right) = 0$. Ce serait le cas si par exemple (ce n'est pas le cas)

$$\nabla_X L(X, \dot{X}) - \frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) \right) \in \mathcal{V}_0$$

et que (ça peut ou non être le cas selon le choix fait de \mathfrak{W})

$$\langle u, v \rangle = \int_{t_0}^{t_1} u \cdot v dt$$

soit un produit scalaire sur \mathcal{V}_0 .

Équation d'Euler-Lagrange

► Les difficultés mathématiques rencontrées lors du passage de la recherche d'un élément extrémisant la fonctionnelle d'action à l'équation d'Euler-Lagrange dont il est solution seront levées dans le cours (mathématique) d'analyse fonctionnelle⁹. On se borne ici à admettre qu'effectivement

$$\begin{aligned} \forall \delta X \in \mathcal{V}_0 : \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_X L(X, \dot{X}) - \frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) \right) \right) \cdot \delta X \, dt = 0 \\ \Rightarrow \nabla_X L(X, \dot{X}) - \frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{X}} L(X, \dot{X}) \right) = 0 \end{aligned}$$

► Le résultat est l'équation d'Euler-Lagrange qui se trouve ainsi établie à partir du principe de stationnarisation dans \mathcal{V} de la fonctionnelle d'action.

9. Voir Gelfand pour des explications claires sur le sujet

Les principes (1/2)

- ▶ Le principe d'Hamilton (*parmi tous les mouvements tels que $X(t_0) = X_0$ et $X(t_1) = X_1$ où X_0, X_1, t_0 et t_1 sont des données, le mouvement réel stationnarise la fonctionnelle d'action*) est la finalisation d'une série de principes qui y mènent ; il y a les principes de
 - ▶ Maupertuis – *les lois de la nature minimisent une quantité qu'on peut appeler l'action.* (dans le prolongement des idées de Leibnitz).
 - ▶ Euler-Lagrange – (*parmi tous les mouvements tels que $X(t_0) = X_0$ et $X(t_1) = X_1$ où X_0, X_1, t_0 sont des données et où l'énergie est une donnée, le mouvement réel stationnarise la fonctionnelle d'action limitée au terme d'énergie cinétique (la demi force vive) en faisant également varier le temps t_1 .*
 - ▶ Jacobi – *c'est l'interprétation du principe d'Euler-Lagrange comme un problème de recherche de géodésique dans un espace de Riemann.*

Les principes (2/2)

- ▶ Inversement à partir du principe de d'Alembert (*l'ajout de la force d'inertie \mathcal{I} aux forces prescrite F permet d'écrire le principe des travaux virtuels en dynamique : $\forall \delta X : (F + \mathcal{I}) \cdot \delta X = 0$), Gauss a établi son principe éponyme $(F + \mathcal{I})^2$ est minimum que Hertz a géométrisé.*
- ▶ Il y a beaucoup de principes, mais en fait il s'agit surtout de variantes d'un seul et même concept¹⁰, celui du principe de moindre action qui est le mieux présenté par Hamilton.

10. Il est intéressant de lire ce qu'en dit Feynmann, "Électromagnétisme 1" , InterEdition, 1979, Paris, pp. 326–347

Exercice 1 : Principe de Fermat

- L'indice optique est

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu_0}{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{v} \quad \text{où } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} ; v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}}$$

c et v sont les vitesses de la lumière dans le vide et dans le milieu de permittivité diélectrique ϵ . Cet indice dépend donc de la position \vec{x} selon les milieux qui sont disposés dans l'espace.

- Le principe de Fermat est que le rayon lumineux issu d'une position \vec{x}_0 qui passe par la position \vec{x}_1 suit le trajet qui minimise la fonctionnelle

$$\mathcal{A}(\vec{x}(\cdot)) = \int_0^1 n(\vec{x}(s)) |\vec{x}'(s)| ds$$

où \vec{x} est une fonction de s telle que $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ et $\vec{x}(1) = \vec{x}_1$.

- Trouver le chemin parcouru par un rayon lumineux passant par deux points quelconques lorsque

$$n(\vec{x} = x \vec{k}_x + y \vec{k}_y + z \vec{k}_z) = \begin{cases} \eta > 1 & \text{si } -L/2 < x < L/2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Quel est le temps mis par ce parcours ?

- Le problème change-t-il s'il s'agit du parcours en temps minimal d'un animal marchant à la vitesse c sur terre et nageant à la vitesse v dans l'eau ?

Exercice 2 : L'action d'un oscillateur harmonique

La fonctionnelle d'action d'un oscillateur harmonique, par exemple une masse m oscillant à l'extrémité d'un ressort de raideur k , est de la forme

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^\tau \frac{1}{2} (m \dot{x}^2 - k x^2) dt$$

Les conditions d'extrémité sont $x(0) = 0$ et $x(\tau) = X$.

► Si δx est une fonction telle que $\delta x(0) = \delta x(\tau) = 0$

$$\mathcal{A}(x + \delta x) = \mathcal{A}(x) + (\text{terme en } \delta x) + (\text{terme en } \delta x^2)$$

calculer ces termes.

► Montrer qu'il est possible de trouver ω pour que $\forall \delta x$ tel que $\delta x(0) = \delta x(\tau) = 0$, $x = X \sin(\omega t) / \sin(\omega \tau)$ annule le (terme en δx).

► Montrer que si $\tau > \pi/\omega$ le (terme en δx^2) peut devenir négatif et donc que la stationnarisation de la fonctionnelle n'est pas toujours une minimisation ¹¹.

11. on notera la connexion avec l'inégalité de Poincaré : exercice 17.4, MI1

Exercice 3 :

Écrire la fonctionnelle d'action pour les exercices de la leçon 4.