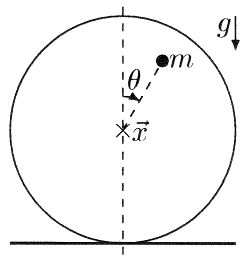
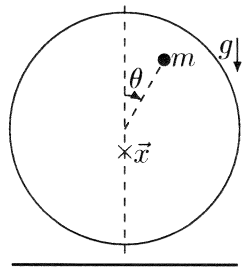
1 point par sous-question numérotées $a, \ldots, t$.

On considère une boule de rayon R et de masse M dans laquelle est enchassée une masse ponctuelle à la distance $\alpha\ R$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ du centre de la boule et un plan horizontal en dessous de laquelle la boule ne peut pas aller : si $\vec{x} = z\,\vec{k}_z + y\,\vec{k}_y + x\,\vec{k}_x$ est le centre de la boule : $z > R$



a) boule posée



b) boule qui décolle

Pour simplifier : on prend $M = 0$ mais on considère quand même que le centre de gravité est en $\vec{x}$.

A- On étudie la configuration où la boule est posée sur le plan et où son centre ne se déplace que dans une direction, $\vec{x} = x\,\vec{k}_x + R\,\vec{k}_z$, la masse ponctuelle étant dans le plan $\left(\vec{k}_x, \vec{k}_z\right)$ (a sur le dessin). Et de plus la boule roule sans glisser sur le plan horizontal, ce qui se traduit par la relation $\dot{x} = R\,\dot{\vartheta}$.

a) Montrer que les énergies cinétique et potentielle s'écrivent :

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\,R\,\alpha\,\dot{\vartheta}\,\dot{x}\,\cos\vartheta + R^2\,\alpha^2\,\dot{\vartheta}^2\right)\ ;\ V = m\,g\,\alpha\,R\,\cos\vartheta$$

1- b) Éliminer le ddl x dans ces expressions et écrire le lagrangien, puis l'équation d'Euler Lagrange portant sur θ.

c) Introduire le hamiltonien et écrire les équations de Hamilton dans le cas de b).

d) Donner l'expression du temps pour que θ passe de $\pi/2$ à π lorsque $\dot{\vartheta} = 0$ quand $\theta = \pi/2$.

2- On n'élimine plus le ddl x mais on considère la liaison $\dot{x} = R\,\dot{\vartheta}$.

e) Écrire le lagrangien, puis les équations d'Euler Lagrange portant sur θ et x ainsi qu'un multiplicateur de Lagrange noté λ (utiliser la version Ferrers de la méthode).

B- On reprend les conditions de A à ceci près que la boule peut glisser librement sur le plan (et donc on n'a plus la liaison $\dot{x} = R\,\dot{\vartheta}$).

f) Écrire le lagrangien, puis les équations d'Euler Lagrange portant sur θ et x.

g) Introduire le hamiltonien et écrire les équations de Hamilton dans le cas de f).

C- On reprend les conditions de B mais cette fois le glissement est soumis à la loi d'Amontons-Coulomb de coefficient de frottement statique et dynamique k.

h) Faire un schéma de mécanique newtonienne faisant apparaître les forces et couples qui s'exercent sur la boule.

i) Donner une condition sur α pour que le roulement sans glissement soit toujours possible.

D- Cette fois, la boule n'est plus nécessairement posée sur le plan. Elle peut en décoller et donc on considère le ddl z en plus de x et θ

j) Montrer que cette prise en compte revient à ajouter à T le terme $\dfrac{m\,\dot{z}^2}{2} - R\,\alpha\,m\,\dot{\vartheta}\,\dot{z}\,\sin\vartheta$ et à V le terme $g\,m\,z$.

k) Pour simplifier, On suppose que la liaison $\dot{x} = R\,\dot{\vartheta}$ a toujours lieu (que la boule soit sur le plan ou qu'elle en décolle cf. fig. cas b) de manière à ne conserver que les ddls θ et z, écrire le lagrangien en prenant en compte la liaison $z = R$, le multiplicateur sera noté μ.

l) Écrire les équations d'Euler Lagrange.

m) Exprimer la force de réaction normale au plan à partir du multiplicateur de Lagrange.

n) La condition pour que la boule décolle est

$$\left(g\ (\alpha\ \cos\vartheta + 1) - R\,\alpha\ (\cos\vartheta + \alpha)\ \dot{\vartheta}^2\right)\ (\alpha\ \cos\vartheta + 1)\ <\ 0$$

Expliquer (sans faire les calculs) comment elle est obtenue.

o) Réécrire cette condition en fonction de $\dot{x}$ plutôt que $\dot{\vartheta}$ et donner la vitesse limite à partir de laquelle la boule décolle en supposant qu'elle décolle à $\theta = 0$.

E- La boule a décollé lorsqu'elle est aux vitesses $\dot{x}_0 = R\,\dot{\vartheta}_0$, $\dot{z}_0 = 0$ et que $\theta_0 = 0$, ces valeurs étant compatibles avec la condition de n).

p) Donner les équations permettant d'obtenir x, θ et z au cours du vol.

q) Donner une équation permettant d'obtenir le temps de vol.

F- À l'issue de ce temps de vol, la boule retombe sur le plan et il y a choc. On suppose que juste avant le choc les vitesses sont $\dot{x}_1$, $\dot{\vartheta}_0$ et $\dot{z}_1 < 0$. Et on souhaite traiter le problème de choc en considérant que la boule est homogène de masse m.

r) Quelles sont les vitesses juste après choc sans considérer le frottement lors du choc ?

s) Expliquer comment ce frottement de choc peut être pris en compte.

G- On reprend les conditions de A où la boule roule sans glisser sur le plan (sans décoller). Et on veut ajouter le frottement visqueux. Pour cela on donne une fonction de dissipation de Rayleigh sous la forme $R_a = \frac{1}{2}\,k\,\dot{x}^2$.

s) Modifier ce qu'il faut modifier pour prendre en compte cette dissipation.

a) position de la masse m

$$\vec{X} = (x + \alpha R \sin\theta)\,\vec{e}_x + (z + \alpha R \cos\theta)\,\vec{e}_3$$

$$\rightarrow \dot{\vec{X}} = (\dot{x} + \alpha R \cos\theta\,\dot{\theta})\,\vec{e}_x + (\dot{z} - \alpha R \sin\theta\,\dot{\theta})\,\vec{e}_3$$

$$\rightarrow \dot{\vec{X}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \alpha^2 R^2 \dot{\theta}^2 + 2\alpha R \dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta - \dot{z}\sin\theta)$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \alpha^2 R^2 \dot{\theta}^2 + 2\alpha R \dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)$$

$$\left(+ \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 - 2\alpha R\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta)\right)$$

$$V = mg\,\vec{X}\cdot\vec{e}_3$$

$$= mg\alpha R\cos\theta \quad (+ mgz)$$

b) $\dot{x} = R\dot{\theta} \rightarrow$

$$T = \frac{1}{2}mR^2(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos\theta)\dot{\theta}^2$$

$$V = mg\alpha R\cos\theta$$

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\left(mR^2(1+\alpha^2+2\alpha R\cos\theta)\dot{\theta}\right) =$$

$$-2mR^2\alpha\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + mg\alpha R\sin\theta$$

c) $p_\theta = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mR^2(1+\alpha^2+2\alpha\cos\theta)\dot{\theta}$

$$T = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2(1+\alpha^2+2\alpha\cos\theta)}$$

$$H = T + V$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp_\theta}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{p_\theta^2}{mR^2}\dfrac{2\alpha\sin\theta}{(1+\alpha^2+2\alpha\cos\theta)^2} + mg\alpha R\sin\theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{p_\theta}{mR^2(1+\alpha^2+2\alpha\cos\theta)} \end{cases}$$

d) l'invariant en θ, $\dot{\theta}$ est

$$\frac{1}{2}mR^2(1+\alpha^2+2\alpha\cos\theta)\dot{\theta}^2 + mg\alpha R\cos\theta = 0$$

$$\rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{-\alpha g\cos\theta}{R(1+\alpha^2+2\alpha\cos\theta)}}$$ de $\frac{\pi}{2}$ à π, $\cos\theta < 0$

$\oplus \cos\theta \nearrow$

$$\rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\frac{1+\alpha^2+2\alpha\cos\theta}{-\cos\theta}}\,d\theta = \sqrt{\frac{\alpha g}{R}} \times \text{temps}$$

(en $\frac{\pi}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{2}+\varepsilon$ $\cos\theta = -\varepsilon$ et $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ est sommable)

e) $L = T - V$ et $\dot{x} - R\dot{\theta} = 0$

$$\left|\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + \alpha R\dot{\theta}\cos\theta\right) = \cancel{\lambda} \\ &\frac{d}{dt}\left(\alpha^2 R^2\dot{\theta} + \alpha R\dot{x}\cos\theta\right) = -\lambda R \end{aligned}\right.$$

f) $L = T - V$

$$\left|\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + \alpha R\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\alpha^2 R^2\dot{\theta} + \alpha R\dot{x}\cos\theta\right) = -\lambda R \end{aligned}\right.$$

g) $T = \frac{1}{2}m\,(\dot{x}\ \ \dot{\theta})\begin{pmatrix} 1 & \alpha R\cos\theta \\ \alpha R\cos\theta & \alpha^2R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}$

$\rightarrow T = \dfrac{\frac{1}{2m}(p_x\ p_\theta)\begin{pmatrix} \alpha^2R^2 & -\alpha R\cos\theta \\ -\alpha R\cos\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_x\\ p_\theta\end{pmatrix}}{\alpha^2R^2(1-\cos^2\theta)}$

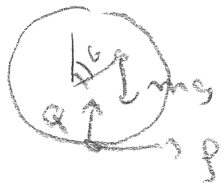
$= \dfrac{1}{2m\alpha^2R^2\sin^2\theta}(p_x\ p_\theta)\begin{pmatrix} \alpha^2R^2 & -\alpha R\cos\theta \\ -\alpha R\cos\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_x\\ p_\theta\end{pmatrix}$

(avec $\begin{pmatrix}p_x\\ p_\theta\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 & \alpha R\cos\theta \\ \alpha R\cos\theta & \alpha^2R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}$)

$H = T + V$

$$\left|\begin{aligned} &\frac{dp_x}{dt} = 0 \qquad (x \text{ ignorable}) \\ &\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{-(p_x\ p_\theta)}{2m\alpha^2R^2}\left[\frac{2\cos\theta}{\sin^3\theta}\begin{pmatrix} \alpha^2R^2 & -\alpha R\cos\theta \\ -\alpha R\cos\theta & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 0 & \alpha R\sin\theta \\ \alpha R\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}p_x\\ p_\theta\end{pmatrix} \\ &\qquad + mg\alpha R\sin\theta \end{aligned}\right.$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ \theta\end{pmatrix} = \frac{1}{2m\alpha^2R^2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} \alpha^2R^2 & -\alpha R\cos\theta \\ -\alpha R\cos\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_x\\ p_\theta\end{pmatrix}$$

h) 

Q la réaction, f le frottement

le couple est

$\Gamma = mgR\alpha\sin\theta - fR$

(hyp. cdg en R)

i) $m\ddot{x} = f$

$m\alpha^2R^2\ddot{\theta} = mgR\alpha\sin\theta - fR$

s'il y a roulement sans glissement $\dot{x} = R\dot{\theta}$

$\rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta} \rightarrow \frac{f}{m} = g\frac{\sin\theta}{\alpha} - \frac{f}{m\alpha^2}$

soit $f = mg\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\sin\theta$

et c'est possible si $|f| < kQ = mgk$

soit $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\sin\theta < k$

c'est tj possible si $\frac{\alpha}{1+\alpha^2} < k$

j) cf. a)

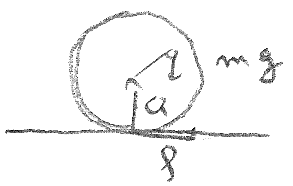
k) $L = \frac{1}{2} m R^2 (1+\alpha^2 + 2\alpha \cos\theta)\dot\theta^2 + \frac{1}{2} m \dot z^2 - \alpha R m \sin\theta \dot\theta \dot z - mg\alpha R\cos\theta - mgz + \mu(z - R)$

l) $\frac{d}{dt}\left(m R^2 (1+\alpha^2+2\alpha\cos\theta)\dot\theta - \alpha R m \sin\theta \dot z\right)$

$= - m R^2 \sin\theta \dot\theta^2 - \alpha R m \cos\theta \dot\theta \dot z + mg\alpha R \sin\theta$

$\frac{d}{dt}\left(m \dot z - \alpha R m \sin\theta \dot\theta\right) = \mu - mg$

m) Avec



$m \ddot z = - mg + Q$

(hyp cdg en $\vec x$)

par comparaison avec l)

$\mu = Q$

n) le haut décolle si

$\mu > mg$

Il faut calculer μ

Pour cela on a $z = R \Rightarrow \dot z = 0 \Rightarrow \ddot z = 0$

avec l)

$m R^2 (1+\alpha^2+2\alpha\cos\theta)\ddot\theta = m R^2 \sin\theta \dot\theta^2 + mg\alpha R\sin\theta$

$- \alpha R m \sin\theta \ddot\theta - \alpha R m \cos\theta \dot\theta^2 = \mu - mg$

en éliminant $\ddot\theta$ et on obtient la condition donnée.

o) Cette condition à $\theta = 0$ est $\alpha R \dot\theta^2 > g$

(la force centrifuge compense le poids)

avec $\dot x = R\dot\theta$ c'est $\dot x > \sqrt{\frac{gR}{\alpha}}$

p) si avec l'hyp sur le cdg on a un mouvement libre avec $\dot\theta = \dot\theta_0 \Rightarrow \theta = \dot\theta_0 t$

et $\ddot z = \alpha R \cos(\dot\theta_0 t)\dot\theta_0^2 - g$

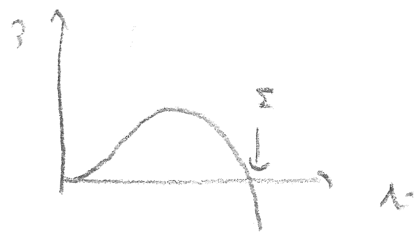
$\Rightarrow \dot z = \alpha R \sin(\dot\theta_0 t)\dot\theta_0 - gt$

$\Rightarrow z = \alpha R(1 - \cos(\dot\theta_0 t)) - \frac{1}{2} g t^2 + R$

q) le temps de vol est $\tau > 0$ tq

$\alpha R(1 - \cos(\dot\theta_0 \tau)) - \frac{1}{2} g \tau^2 + R = R$

(on a



si $\alpha R \dot\theta_0^2 > g$)

2) Le choc est pris en compte avec une percussion $p \vec{e}_3$

$$\rightarrow \begin{cases} m(\dot{z}_1^+ - \dot{z}_1) = p \\ m(\dot{x}_1^+ - \dot{x}_1) = 0 \\ m r^2 (\dot{\theta}_1^+ - \dot{\theta}_1) = 0 \end{cases}$$

La conservation de l'énergie cinétique fournit

$$\frac{1}{2} m \dot{z}_1^{+2} = \frac{1}{2} m \dot{z}_1^{-2}$$

$$\rightarrow \quad \dot{z}_1^+ = - \dot{z}_1$$

$(\dot{z}_1 < 0 \Rightarrow \dot{z}_1^+ > 0)$

3) On introduit une percussion $q \vec{e}_x$ et q est tel que la loi d'A/C instantanée est vérifiée

cf cours

5) Comme la ddl en A est θ, la Pot de dissipation est $R_c = \frac{1}{2} h \dot{x}^2 = \frac{1}{2} h r^2 \dot{\theta}^2$ et donc l'eq d'E/L de 4) devient

$$\frac{d}{dt}\left(m r^2 (1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos\theta)\dot{\theta}\right) = -2 m r^2 \alpha \sin\theta\,\dot{\theta} + m g a \sin\theta - \frac{\partial R_c}{\partial \dot{\theta}}$$

$$\frac{\partial R_c}{\partial \dot{\theta}} = h r^2 \dot{\theta}$$