Mécanique et électricité analytiques

Leçon 3

Dynamique du solide indéformable

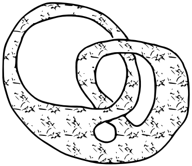
G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

4 octobre 2018

Objectifs de la leçon

- Traiter la question de la dynamique du solide indéformable de forme quelconque, par exemple (emblématique) un bretzel



- Le solide peut être soumis à un système de forces quelconques hors dissipation et liaisons non holonomes [1]

- Attention, la présentation n'est pas autonome ; elle est lié à la leçon compagne `https://gerard.vinsard.fr/Cours/MEAN/Nombre_quelconques_de_ddls.pdf` qui contient les exercices. De plus, et même si c'est esquissé, on n'a pas poussé l'analyse comme elle le serait en mécanique vectorielle newtonienne puisque que le solide indéformable n'enest qu'un exemple d'application.

1. ce que ça signifie sera expliqué dans les leçons ultérieures.

Angle d'Euler

- La rotation du solide autour de son centre de masse peut se faire en utilisant les angles d'Euler. Si le repère (orthonormé) est $\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$ 3 rotations successives sont considérées :
  1. Précession : d'angle $\psi \in [0, 2\pi[$ directe autour de l'axe $\vec{k}_z$ passant par l'origine ; les images de $\vec{k}_x$ et $\vec{k}_y$ par cette rotation sont $\vec{k}'_x$ et $\vec{k}'_y$; pour des raisons d'homogénéité de notation on pose $\vec{k}'_z = \vec{k}_z$;
  2. Nutation : d'angle $\theta \in [0, \pi[$ directe autour de l'axe $\vec{k}'_x$ passant par l'origine ; les images de $\vec{k}'_y$ et $\vec{k}'_z$ par cette rotation sont $\vec{k}''_y$ et $\vec{k}''_z$; on pose $\vec{k}''_x = \vec{k}'_x$;
  3. Rotation propre : d'angle $\phi \in [0, 2\pi[$ directe autour de l'axe $\vec{k}''_z$ passant par l'origine ; les images de $\vec{k}''_y$ et $\vec{k}''_z$ par cette rotation sont $\vec{K}_y$ et $\vec{K}_z$; on pose $\vec{K}_x = \vec{k}''_x$;

- Faire des dessins.

Calculs des coordonnées dans une rotation

- Les vecteurs se transforment comme

$$\vec{k}'_x = \cos\psi\ \vec{k}_x + \sin\psi\ \vec{k}_y \quad ; \quad \vec{k}'_y = -\sin\psi\ \vec{k}_x + \cos\psi\ \vec{k}_y \quad ; \quad \vec{k}'_z = \vec{k}_z$$

$$\vec{k}''_y = \cos\theta\ \vec{k}'_y + \sin\theta\ \vec{k}'_z \quad ; \quad \vec{k}''_z = -\sin\theta\ \vec{k}'_y + \cos\theta\ \vec{k}'_z \quad ; \quad \vec{k}''_x = \vec{k}'_x$$

$$\vec{K}_x = \cos\phi\ \vec{k}''_x + \sin\phi\ \vec{k}''_y \quad ; \quad \vec{K}_y = -\sin\phi\ \vec{k}''_x + \cos\phi\ \vec{k}''_y \quad ; \quad \vec{K}_z = \vec{k}''_z$$

- Une position $\vec{x}$ se retrouve en $\vec{X}$ suivant la correspondance

$$\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y + z\ \vec{k}_z \longrightarrow \vec{X} = x\ \vec{K}_x + y\ \vec{K}_y + z\ \vec{K}_z$$

(les coordonnées restent inchangées alors que les vecteurs de base sont transformés)

- Les expressions de $(\vec{K}_x, \vec{K}_y, \vec{K}_z)$ en fonction de $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$ et vice-versa sont lourdes mais les calculs peuvent (et dans la vraie vie doivent) être délégués à un logiciel de calcul symbolique

Le vecteur de rotation instantané

► Les angles d'Euler ψ, θ, ϕ sont des variables dépendantes du temps ; et donc les vecteurs $(\vec{K}_x, \vec{K}_y, \vec{K}_z)$ également, un calcul direct amène à

$$
\begin{array}{rcl}
\dot{\vec{K}}_x & = & (\dot{\psi}\ \cos(\theta) + \dot{\phi})\ \vec{K}_y + (\sin(\phi)\ \dot{\theta} - \cos(\phi)\ \sin(\theta)\ \dot{\psi})\ \vec{K}_z \\
\dot{\vec{K}}_y & = & -(\dot{\psi}\ \cos(\theta) + \dot{\phi})\ \vec{K}_x + (\cos(\phi)\ \dot{\theta} + \sin(\phi)\ \sin(\theta)\ \dot{\psi})\ \vec{K}_z \\
\dot{\vec{K}}_z & = & (\cos(\phi)\ \sin(\theta)\ \dot{\psi} - \sin(\phi)\ \dot{\theta})\ \vec{K}_x \\
 & & -(\sin(\phi)\ \sin(\theta)\ \dot{\psi} + \cos(\phi)\ \dot{\theta})\ \vec{K}_y
\end{array}
$$

Soit encore

$$\dot{\vec{K}}_x = \vec{\Omega} \times \vec{K}_x \quad ; \quad \dot{\vec{K}}_y = \vec{\Omega} \times \vec{K}_y \quad ; \quad \dot{\vec{K}}_z = \vec{\Omega} \times \vec{K}_z$$

où $\vec{\Omega} = \Omega_x\ \vec{K}_x + \Omega_y\ \vec{K}_y + \Omega_z\ \vec{K}_z$ est le vecteur de rotation instantané avec

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\Omega_x & = & \cos(\phi)\ \dot{\theta} + \sin(\phi)\ \sin(\theta)\ \dot{\psi} \\
\Omega_y & = & \cos(\phi)\ \sin(\theta)\ \dot{\psi} - \sin(\phi)\ \dot{\theta} \\
\Omega_z & = & \dot{\psi}\ \cos(\theta) + \dot{\phi}
\end{array}
\right.
$$

La vitesse instantanée, l'énergie cinétique

- Une position $\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y\ + z\ \vec{k}_z$
  - se retrouve en $\vec{X} = x\ \vec{K}_x + y\ \vec{K}_y\ + z\ \vec{K}_z$
  - et sa vitesse de déplacement est $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{X}$

- Si le solide est composé de N masses ponctuelles m_n aux positions $\vec{x}_n$ qui se déplacent selon ces rotations, son énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}_n\right)^2$$

c'est une variable dépendante des angles d'Euler ψ, θ et ϕ et de leur dérivées temporelles ;
secondairement c'est une variable dépendant des masses m_n et des positions $\vec{X}_n$ qui dépendent du temps ainsi que $\vec{\Omega}$.

Autre expression de l'énergie cinétique

- Le vecteur de rotation instantané $\vec{\Omega}$ est l'image par les trois rotations du vecteur

$$\vec{\omega} = \Omega_x \ \vec{k}_x + \Omega_y \ \vec{k}_y + \Omega_z \ \vec{k}_z$$

qui les mêmes composantes que $\vec{\Omega}$ mais associées à la base $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$ que les rotations transforment en $(\vec{K}_x, \vec{K}_y, \vec{K}_z)$

- Et donc l'énergie cinétique s'écrit encore

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{\omega} \times \vec{x}_n\right)^2$$

puisque qu'une rotation appliquée à un produit vectoriel de deux vecteurs est le produit vectoriel des images de rotations appliquées à ces deux vecteurs (c'est évident géométriquement).

Dépendances de l'énergie cinétique

- L'expression
$$T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{\omega}\times\vec{x}_n\right)^2$$
montre que l'énergie cinétique dépend des positions de masses ponctuelles d'une façon qui ne change pas lors du mouvement. Donc si la forme du solide est fixée cette dépendance reste invariable.

- Puisque $(\vec{\omega}\times\vec{x}_n)^2 + (\vec{\omega}\cdot\vec{x}_n)^2 + = \vec{\omega}^{\,2}\ \vec{x}_n^{\,2}$, T peut se réécrire comme

$$T_n = \frac{1}{2}\left(\Omega_x \Omega_y \Omega_z\right)\left(\sum_{n=1}^{N} m_n \begin{pmatrix} y_n^2 + z_n^2 & -x_n\, y_n & -x_n\, z_n \\ -x_n\, y_n & z_n^2 + x_n^2 & -y_n\, z_n \\ -x_n\, z_n & -y_n\, z_n & x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z\end{pmatrix}$$

Les moments d'inertie

- D'une façon générale on appelle
  - Moment quadratique les : $\mathfrak{I}_{xx} = \sum_{n=1}^{N} m_n\, x_n^2, \mathfrak{I}_{xy} = \sum_{n=1}^{N} m_n\, x_n\, y_n\;\; etc$
  - Moments d'inertie les : $A = \mathfrak{I}_{zz} + \mathfrak{I}_{yy},\; B = \mathfrak{I}_{xx} + \mathfrak{I}_{zz}$ et $C = \mathfrak{I}_{yy} + \mathfrak{I}_{xx}$
  - Matrice d'inertie

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} A & -\mathfrak{I}_{xy} & -\mathfrak{I}_{xz} \\ -\mathfrak{I}_{xy} & B & -\mathfrak{I}_{yz} \\ -\mathfrak{I}_{xz} & -\mathfrak{I}_{yz} & C \end{pmatrix}$$

- La matrice d'inertie est symétrique, définie et positive et donc il existe un choix d'orientation des axes $(\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$ (les axes principaux d'inertie) tel que les moments quadratiques croisés ($\mathfrak{I}_{xy}$, $\mathfrak{I}_{yz}$ et $\mathfrak{I}_{zx}$) soient nuls[2].

---

2. les éléments diagonaux A, B, C sont les valeurs propres de la matrice et les directions principales ses vecteurs propres.

Forme finale de l'énergie cinétique

- Avec des axes $\vec{k}_x$, $\vec{k}_y$, $\vec{k}_z$ quelconques, l'énergie cinétique s'écrit alors

$$T = \frac{1}{2}\ {}^t\underline{\omega}\ \mathfrak{I}\ \underline{\omega} \text{ avec } \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos(\phi)\ \dot{\theta} + \sin(\phi)\ \sin(\theta)\ \dot{\psi}) \\ (\cos(\phi)\ \sin(\theta)\ \dot{\psi} - \sin(\phi)\ \dot{\theta}) \\ (\dot{\psi}\ \cos(\theta) + \dot{\phi}) \end{pmatrix}$$

- Et si ces vecteurs sont les directions principales d'inertie, elle se réduit à

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}(A\ (\underbrace{\cos\phi\ \dot{\theta} + \sin\phi\ \sin\theta\ \dot{\psi}}_{=\Omega_x})^2 + B\ (\underbrace{-\sin\phi\ \dot{\theta} + \cos\phi\ \sin\theta\ \dot{\psi}}_{=\Omega_y})^2 \\ &\quad + C\ (\underbrace{\cos\theta\ \dot{\psi} + \dot{\phi}}_{=\Omega_z})^2) \end{aligned}$$

Le moment cinétique – 1° forme

► Une première façon d'introduire le moment cinétique consiste à revenir à l'expression

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}_n\right)^2$$

d'où vient que la variation δT de T dans une variation $\delta\vec{\Omega}$ de $\vec{\Omega}$ s'écrit

$$\delta T = \left(\sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{X}_n \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}_n\right)\right)\right) \cdot \delta\vec{\Omega}$$

Le moment cinétique est le vecteur qui spécifie la forme linéaire δT en $\delta\vec{\Omega}$

$$\vec{\sigma} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{X}_n \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}_n\right)\right)$$

ce qui est cohérent avec les définitions connues puisque la vitesse de la masse m_n est bien $\vec{\Omega} \times \vec{X}_n$ et donc son impulsion $m_n\, \vec{\Omega} \times \vec{X}_n$.

Le moment cinétique – 2° forme

► Une seconde façon d'introduire le moment cinétique consiste à partir des composantes ; dans les axes principaux d'inertie, si

$$T = \frac{1}{2}\left(A\,\Omega_x^2 + B\,\Omega_y^2 + C\,\Omega_z^2\right)$$

la variation δT de T dans une variation $\delta\Omega$ de Ω s'écrit

$$\delta T = \delta\vec{\Omega}\cdot\left(A\,\Omega_x\,\vec{K}_x + B\,\Omega_y\,\vec{K}_y + C\,\Omega_z\,\vec{K}_z\right)$$

le moment cinétique est alors

$$\vec{\sigma} = A\,\Omega_x\,\vec{K}_x + B\,\Omega_y\,\vec{K}_y + C\,\Omega_z\,\vec{K}_z$$

ce qui est cohérent avec l'expression précédente compte tenu de l'expression des moments d'inertie A, B et C.

Mouvement libre : conservation du moment cinétique (1/2)

► Le moment cinétique se conserve dans un mouvement libre (sans couple appliqué) comme on peut le montrer avec la 1° forme (en utilisant les lois de Newton) ; soit

$$\dot{\vec{\sigma}} = \vec{0}$$

► Appliquée à la 2° forme, cette équation conduit à

$$A\,\dot{\Omega}_x\,\vec{K}_x + B\,\dot{\Omega}_y\,\vec{K}_y + C\,\dot{\Omega}_z\,\vec{K}_z + A\,\Omega_x\,\vec{\Omega}\times\vec{K}_x + B\,\Omega_y\,\vec{\Omega}\times\vec{K}_y + C\,\Omega_z\,\vec{\Omega}\times\vec{K}_z = 0$$

qui forme les équations d'Euler

$$\left\{\begin{array}{l} A\,\dot{\Omega}_x = (B-C)\,\Omega_y\,\Omega_z \\ B\,\dot{\Omega}_y = (C-A)\,\Omega_z\,\Omega_x \\ C\,\dot{\Omega}_z = (A-B)\,\Omega_x\,\Omega_y \end{array}\right.$$

lesquelles permettent de calculer l'évolution du vecteur de rotation instantané d'un solide en rotation.

Mouvement libre : système dynamique (2/2)

- C'est l'association des équations d'Euler aux équations d'évolution des directions principales

$$\left\{\begin{array}{l} A\,\dot{\Omega}_x = (B-C)\,\Omega_y\,\Omega_z \\ B\,\dot{\Omega}_y = (C-A)\,\Omega_z\,\Omega_x \\ C\,\dot{\Omega}_z = (A-B)\,\Omega_x\,\Omega_y \end{array}\right. \quad ; \left\{\begin{array}{lcl} \dot{\vec{K}}_x & = & \vec{\Omega}\times\vec{K}_x \\ \dot{\vec{K}}_y & = & \vec{\Omega}\times\vec{K}_y \\ \dot{\vec{K}}_y & = & \vec{\Omega}\times\vec{K}_y \end{array}\right.$$

- Si on connaît les valeurs initiales de Ω_x, Ω_y, Ω_z, $\vec{K}_x$, $\vec{K}_y$, $\vec{K}_z$ on peut, par intégration des EDOs précédente connaître leurs valeurs à tout temps.

- On peut noter que si $A = B = C$ alors $\dot{\Omega}_x = \dot{\Omega}_y = \dot{\Omega}_z = 0$ et donc les vecteur instantané de rotation est constant ; la rotation du solide se fait autour de l'axe dont il est le support.

- Mais ce n'est plus vrai sans cette condition.

Le solide en mouvement (1/4)

- Jusqu'ici seules les rotations autour de l'origine ont été décrites.

- Si on suppose maintenant que cette origine est en fait une position $\vec{\mathscr{x}}$ dépendant du temps mais cela indépendamment des rotations, il vient qu'une position initialement en

$$\vec{x} = x\,\vec{k}_x + y\,\vec{k}_y + z\,\vec{k}_z + \vec{\mathscr{x}}(t=0)$$

se retrouve en

$$\vec{X} = x\,\vec{K}_x + y\,\vec{K}_y + z\,\vec{K}_z + \vec{\mathscr{x}}(t)$$

- La vitesse associée à cette position en est alors

$$\dot{\vec{X}} = \vec{\Omega} \times (\vec{X} - \vec{\mathscr{x}}) + \dot{\vec{\mathscr{x}}}$$

Le solide en mouvement (2/4)

- La description du solide à partir de masses ponctuelles m_m étant reprise, les vitesses $\dot{\vec{X}}_n$ de ces masses sont

$$\dot{\vec{X}}_n = \vec{\Omega} \times (\vec{X}_n - \vec{x}) + \dot{\vec{x}}$$

- L'énergie cinétique des masses en mouvement est alors

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_n\, \dot{\vec{X}}_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n\, (\vec{\Omega} \times (\vec{X}_n - \vec{x}))^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n\, \dot{\vec{x}}^2 \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{N} m_n\, (\vec{\Omega} \times (\vec{X}_n - \vec{x})) \cdot \dot{\vec{x}} \end{aligned}$$

- La masse totale est $M = \sum_{n=1}^{N} m_n$ d'où

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n\, (\vec{\Omega} \times (\vec{X}_n - \vec{x}))^2 + \frac{1}{2}\, M\, \dot{\vec{x}}^2 + \vec{\Omega} \times \left(\left(\sum_{n=1}^{N} m_n\, \vec{X}_n - M\, \vec{x} \right) \cdot \dot{\vec{x}} \right)$$

Le solide en mouvement (3/4)

- Et on a encore (ω et $\vec{x}_n - \vec{\mathfrak{x}}(t=0)$ ont pour images $\vec{\Omega}$ et $\vec{X}_n - \vec{\mathfrak{x}}(t)$ par les rotations)

$$(\vec{\Omega} \times (\vec{X}_n - \vec{\mathfrak{x}}))^2 = (\vec{\omega} \times (\vec{x}_n - \vec{\mathfrak{x}}(t=0)))^2$$

D'où vient que le 1° terme de l'énergie cinétique, appelé énergie cinétique de rotation, s'écrit (cf. planche 10)

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n \, (\vec{\Omega} \times (\vec{X}_n - \vec{\mathfrak{x}}))^2 + \frac{1}{2} \, M \, \dot{\vec{\mathfrak{x}}}^2 = \frac{1}{2} \, {}^t\underline{\omega} \, \mathfrak{I} \, \underline{\omega} \text{ avec } {}^t\underline{\omega} = (\Omega_x \; \Omega_y \; \Omega_z)$$

- Le second terme est l'énergie cinétique de translation

$$T_t = \frac{1}{2} \, M \, \dot{\vec{\mathfrak{x}}}^2$$

- Et le dernier terme l'énergie cinétique d'interaction entre rotation et translation,

$$T_i = \vec{\Omega} \times \left(\left(\sum_{n=1} m_n \, \vec{X}_n - M \, \vec{\mathfrak{x}} \right) \cdot \dot{\vec{\mathfrak{x}}} \right)$$

Le solide en mouvement (4/4)

- Lorsque $\vec{\mathfrak{x}}(t=0) = \vec{\mathfrak{x}}_m(t=0)$ est initialement le centre de masse du solide

$$\vec{\mathfrak{x}}_m(t=0) = \frac{1}{M}\sum_{n=1} m_n\,\vec{x}_n$$

il le reste

$$\vec{\mathfrak{x}}_m = \frac{1}{M}\sum_{n=1} m_n\,\vec{X}_n$$

En effet

$$\dot{\vec{\mathfrak{x}}}_m - \frac{1}{M}\sum_{n=1} m_n\,\dot{\vec{X}}_n = \dot{\vec{\mathfrak{x}}}_m - \frac{1}{M}\sum_{n=1} m_n\,\left(\Omega\times\left(\vec{X}_n - \vec{\mathfrak{x}}_m\right) + \dot{\vec{\mathfrak{x}}}_m\right) = \vec{0}$$

- Dans ce cas, l'énergie cinétique d'interaction entre rotation et translation disparaît

$$T_i = 0 \Rightarrow T = T_r + T_t = \frac{1}{2}\,{}^t\underline{\omega}\,\mathfrak{I}\,\underline{\omega} + \frac{1}{2}\,M\,\dot{\vec{\mathfrak{x}}}^2$$

Il y a découplage entre la rotation autour du centre de masse et le mouvement de ce centre.

Les forces appliquées aux masses

► Chacune des masses m_n est maintenant le lieu où s'appliquent des forces $\vec{F}_n$: celles-ci se décomposent *a priori* entre

- forces intérieures qui maintiennent les distances relatives entre les masses invariables ;
- et forces extérieures, i.e. appliquées au solide par des éléments extérieurs à lui.

et elles forment donc un ensemble impressionnant.

► Mais les forces intérieures s'éliminent dans la description du mouvement du solide : puisque les postions relatives des masses sont invariables ces forces ne fournissent aucun travail (ni en translation ni en rotation). Et donc seules les sommations des forces extérieurs qui forment les force et couple globaux sont à considérer.

► On considère déjà ces forces $\vec{F}_n$ abstraitement ; jusqu'au moment où on pourra préciser leur contenu.

Le mouvement du centre de gravité ne dépend que de la somme des forces

- L'expression de la 2° loi de Newton pour chacune des masses est

$$m_n\,\ddot{\vec{X}}_n = \vec{F}_n$$

- D'autre part de $\dot{\vec{X}}_n = \vec{\Omega}\times(\vec{X}_n - \vec{x}) + \dot{\vec{x}}$ on retire que

$$\ddot{\vec{X}}_n - \ddot{\vec{x}} = \dot{\vec{\Omega}}\times(\vec{X}_n - \vec{x}) + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times(\vec{X}_n - \vec{x})\right)$$

- Il vient alors

$$\sum_{n=1}^{N} m_n\,\ddot{\vec{X}}_n = M\;\left(\ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{\Omega}}\times(\vec{x}_c - \vec{x}) + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times(\vec{x}_c - \vec{x})\right)\right)$$

et donc

$$M\,\ddot{\vec{x}} + M\;\left(\ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{\Omega}}\times(\vec{x}_c - \vec{x}) + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times(\vec{x}_c - \vec{x})\right)\right) = \sum_{n=1}^{N}\vec{F}_n = \vec{F}$$

Soit, si $\vec{x}_c = \vec{x}$: $M\,\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$

Le moment cinétique ne dépend que de la somme des couples

- De $m_n \,\ddot{\vec{X}}_n = \vec{F}_n$ et $M\,\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$ on obtient aussi

$$\sum_{n=1}^{N} m_n(\vec{X}_n - \vec{x}) \times (\ddot{\vec{X}}_n - \ddot{\vec{x}}) = \sum_{n=1}^{N} (\vec{X}_n - \vec{x}) \times \vec{F}_n + (\vec{x} - \vec{x}_c) \times \vec{F} = \vec{\Gamma}$$

Γ est le couple qui s'exerce en $\vec{x}$.

- D'autre part, compte tenu que

$$\frac{d}{dt}\left((\vec{X}_n - \vec{x}) \times (\dot{\vec{X}}_n - \dot{\vec{x}})\right) = (\vec{X}_n - \vec{x}) \times (\ddot{\vec{X}}_n - \ddot{\vec{x}})$$

on arrive à

$$\dot{\vec{\sigma}} = \vec{\Gamma}$$

où $\vec{\sigma}$ est le moment cinétique

$$\vec{\sigma} = \sum_{n=1}^{N} m_n\,(\vec{X}_n - \vec{x}) \times (\dot{\vec{X}}_n - \dot{\vec{x}}) = \sum_{n=1}^{N} m_n\,(\vec{X}_n - \vec{x}) \times \left(\vec{\Omega} \times (\vec{X}_n - \vec{x})\right)$$

Cas du milieu continu (1/3)

- Le solide a été décrit comme un ensemble de masses ponctuelles situées les unes par rapport aux autres à des distances invariables ; c'est une approche de milieu discret.
- Si maintenant ces masses ponctuelles sont supposées être infiniment petites et en nombre infini de manière que les quantités masses et moment d'inertie restent finis l'approche devient celle des milieux continus.
- Dans cette approche une quantité de densité de masse

$$\rho(x, y, z)$$

est introduite de manière que la masse ponctuelle à la position (x, y, z) soit $\rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z$ où $\delta x, \delta y, \delta z$ sont des quantités infiniment petites et

  - l'analyse faite dans le cas discret est refaite sans rien changer ;
  - puis vient un passage à la limite $\delta x, \delta y, \delta z \longrightarrow 0$ en transformant les sommes discrètes en intégrales dont l'élément de volume est $dx\,dy\,dz$.

Cas du milieu continu (2/3)

- Les résultats restent donc les mêmes à ceci près que la masse du solide devient

$$M = \int_{E_3} \rho(x, y, z) \; dz \; dy \; dz$$

et les moments quadratiques

$$I_{xx} = \int_{E_3} \rho(x, y, z) \; x^2 \; dx \; dy \; dz \; ; \; I_{xy} = \int_{E_3} \rho(x, y, z) \; x \; y \; dx \; dy \; dz$$

etc

- Les sommes sont écrites sur tout l'espace E_3 mais ρ est nul en dehors du domaine D borné occupé par les masses et donc elles pourraient tout aussi bien porter sur D.

Cas du milieu continu (3/3)

- De même si une densité de force $\vec{f}(t,x,y,z) = f_x(t,x,y,x)\ \vec{K}_x + f_y(t,x,y,z)\ \vec{K}_y + f_z(t,x,y,x)\ \vec{K}_z$ est donnée, alors et

$$\vec{F} = \int_{E_3} \vec{f}(t,x,y,x)\ dx\ dy\ dz$$

où l'intégrale du vecteur est le vecteur des intégrales de ses composantes.

- Le couple est

$$\vec{\Gamma} = \int_{E_3} \vec{x} \times \vec{f}(t,x,y,z)\ dx\ dy\ dz$$