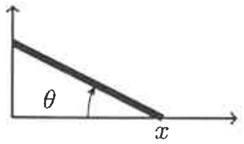
Interrogation : Mécanique et électricité analytiques

ISN 1A

17 nov. 2023

L'adéquation des réponses aux questions posées, le soin et la qualité de la rédaction seront pris en compte.

On étudie le mouvement d'une poutre (en trait gras) de longueur l et de masse m qui s'appuie sur le sol et aussi sur un mur vertical (en traits fins)



Questions A et B

Question C

A- Les expressions des énergies cinétique et potentiel de cette poutre sont

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{m\,l^2}{3}\,\dot{\vartheta}^2,\ V = m\,g\,\frac{l}{2}\,\sin\vartheta$$

1)[2pt] Écrire l'équation d'Euler-Lagrange ;

2)[2pt] Écrire le hamiltonien ;

3)[2pt] Écrire les équations de Hamilton ;

4)[2pt] Donner l'expression du temps que met la poutre pour tomber de la position initiale d'angle $\theta = \theta_0$ à la position horizontale $\theta = 0$.

B- On souhaite connaître la force de réaction qu'exerce le mur vertical sur la poutre. Pour cela on introduit la position horizontale x du bout de la poutre comme degré de liberté supplémentaire, l'énergie cinétique est modifiée comme

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\left(\dot{x}^2 + l\,\dot{\vartheta}\,\dot{x}\,\sin\vartheta + \frac{l^2\,\dot{\vartheta}^2}{3}\right)$$

et V reste le même que dans la question précédente. La liaison qui assure le contact de la poutre avec le mur vertical est

$$x = l\,\cos\vartheta$$

Avec ces éléments,

1)[2pt] Écrire le lagrangien modifié par la présence de la liaison ;

2)[2pt] Écrire les équations d'Euler-Lagrange correspondantes ;

3)[2pt] Expliquer alors comment on peut obtenir la force de réaction (sans nécessairement faire le calcul qui est un peu long).

C- La poutre, toujours de longueur l et de masse m, s'appuie sur la paroi d'un cylindre à section circulaire de rayon R (avec $l < 2\,R$) comme sur le dessin ci-dessus.

1)[2pt] Donner une paramétrisation du mouvement de la poutre dans le cas où il y a toujours contact entre ses extrémités et le cylindre ;

2)[2pt] Écrire l'énergie cinétique à partir de cette paramétrisation ;

3)[2pt] Écrire l'énergie potentielle.

A- 1- $\frac{ml^2}{3}\frac{d}{dt}\dot\theta = -mg\frac{l}{2}\sin\theta$

2- $T = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\frac{ml^2}{3}}$ avec $p = \frac{ml^2}{3}\dot\theta$

$H = T + V$

3- $\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -mg\frac{l}{2}\sin\theta \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{p}{\frac{ml^2}{3}} \end{cases}$

4- $H = mg\frac{l}{2}\sin\theta_0 \rightarrow \frac{1}{2}\frac{p^2}{\frac{ml^2}{3}} + m\frac{gl}{2}\sin\theta = mg\frac{l}{2}\sin\theta_0$

en $\dot\theta$ $\quad \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{mgl}{2}\sin\theta = m\frac{gl}{2}\sin\theta_0$

$\rightarrow \dot\theta^2 = 3\frac{g}{l}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$ (>0 car $\theta \searrow$ depuis θ_0)

$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{l}}\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta} \rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} = -\sqrt{\frac{3g}{l}}\,dt$

$\rightarrow -\sqrt{\frac{3g}{l}}\int_0^T dt = \int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} \rightarrow T = \sqrt{\frac{l}{3g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}}$

($\theta = \theta_0 - \varepsilon \rightarrow \sin\theta = \sin\theta_0\cos\varepsilon - \cos\theta_0\sin\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \sin\theta_0 - \cos\theta_0\,\varepsilon$

et $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ est intégrable)

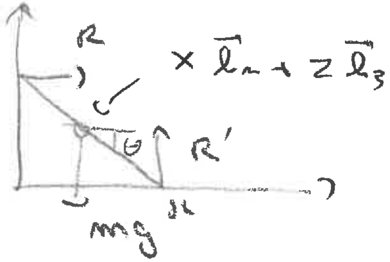
B- 1- $L = T - V + \lambda(x - \ell \cos\theta)$

2- $\frac{d}{dt} m\left(\dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right) = \lambda$

$\frac{d}{dt} m\ell\left(\frac{\dot{x}}{2}\sin\theta + \frac{\ell\dot{\theta}}{3}\right) = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + \lambda \ell \sin\theta$

$0 = (x - \ell\cos\theta)$

3- En mécanique newtonienne



$m\ddot{X} = R$

$m\ddot{Z} = R' - mg$

$\frac{m\ell^2}{12}\ddot{\theta} = \frac{\ell}{2}(R'\cos\theta - R\sin\theta)$

et $X = x - \frac{\ell}{2}\cos\theta$

$\rightarrow m\frac{d}{dt}\left(\dot{x} + \frac{\ell}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\right) = R$

d'où $\lambda = R$

Les eq d'E-L en x et θ s'écrivent $\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell}{2}\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{2} & \frac{\ell}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\lambda/m \\ -\frac{g}{2}\cos\theta + \frac{\lambda}{m}\sin\theta\end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{2}\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{2} & \frac{\ell}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x} \\ \ddot{\theta}\end{pmatrix} + \dot{\theta}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ \frac{\cos\theta}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda/m \\ -\frac{g}{2}\cos\theta + \frac{\lambda}{m}\sin\theta\end{bmatrix}$

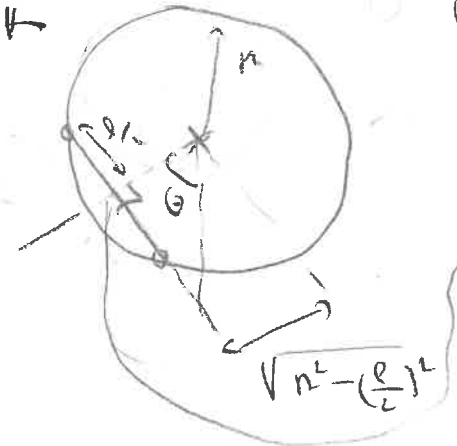
$\rightarrow \begin{pmatrix}\ddot{x} \\ \ddot{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{2}\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{2} & \frac{\ell}{3}\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}\lambda/m \\ -\frac{g}{2}\cos\theta + \frac{\lambda}{m}\sin\theta\end{pmatrix} - \dot{\theta}\begin{bmatrix}\frac{\ell}{2}\cos\theta \\ \frac{\cos\theta}{2}\dot{x}\end{bmatrix}\right]$ (α)

la liaison : $x - l \sin\theta = 0 \Rightarrow \dot{x} + l \cos\theta\, \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + l \cos\theta\, \ddot{\theta} + l \sin\theta\, \dot{\theta}^2 = 0$

soit $\begin{pmatrix} 1 & l \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = - l \sin\theta\, \dot{\theta}^2 \quad (\beta)$

En éliminant $\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}$ entre (α) et (β) on obtient une éq. lin. en λ qui dépend de $\dot{x}, \dot{\theta}, \theta$ $\Rightarrow \lambda$ ne dépend que des variables de phases

C − 1



Θ est suffisant pour décrire la position de la perche (dans le cas du contact)

$+ \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} \left(- \cos\theta\, \vec{e}_3 - \sin\theta\, \vec{e}_y \right)$

2 − $T = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{m l^2}{13} \dot{\Theta}^2}_{\text{rotation}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}\ \dot{\Theta}^2}_{\text{translation}}$

3 − $V = - m g \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} \cos\theta$