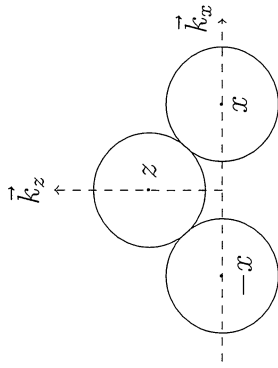


Informations : Tous documents et calculatrices autorisés – 1h00 – 4 points par question (approximativement). La question 6 n'est pas à traiter.

Cylindres empilés sans rotation

On considère trois cylindres identiques à base circulaire de rayon R et de masse m . Les deux cylindres du bas peuvent se déplacer symétriquement en translation suivant $\vec{k}_x$: les coordonnées de leurs centres sont $-x$ et x . Le cylindre du dessus peut se déplacer en translation suivant $\vec{k}_z$ la coordonnée de son centre est z .



Initialement, les cylindres sont immobiles et placés de manière que

$$z = \sqrt{3} R ; x = R$$

On suppose qu'ils peuvent glisser sans frottement les uns sur les autres et donc leur mouvement de translation n'entraîne aucune rotation. Au début du mouvement il y a contact entre le cylindre du haut et les deux du bas mais ce contact cesse lors du mouvement ; après quoi le cylindre du haut chute librement et les deux cylindres du bas se déplacent en translation uniforme.

Question 1 – Lorsqu'il y a contact, il n'y a qu'un seul degré de liberté au problème : en utilisant ϕ tel que

$$x = 2 R \cos(\phi) ; z = 2 R \sin \phi$$

écrire : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, le lagrangien, les équations d'Euler-Lagrange, le hamiltonien et les équations de Hamilton.

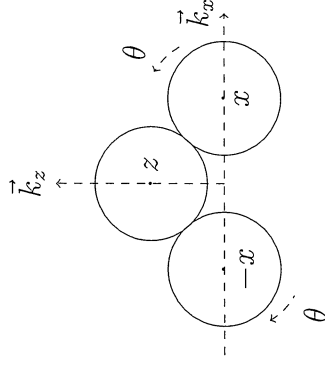
Question 2 – On s'intéresse maintenant à la question de déterminer la position des cylindres à l'instant où le contact cesse. On doit pour cela conserver les deux ddls x et z liés par la liaison holonome

$$x^2 + z^2 = 4 R^2$$

Écrire le lagrangien modifié par cette liaison puis les équations d'Euler-Lagrange. Calculer l'expression du multiplicateur de Lagrange en fonction de $\dot{x}$, $\dot{z}$, z .

Question 3 – faire le changement de variables $x = 2 R \cos(\phi)$; $z = 2 R \sin \phi$ et, au moyen de l'expression du hamiltonien, éliminer ϕ de l'expression du multiplicateur qui ne contient donc plus que l'angle ϕ . Donner une équation (sans chercher à la résoudre) de l'angle ϕ auquel le contact cesse.

Cylindres empilés avec rotation



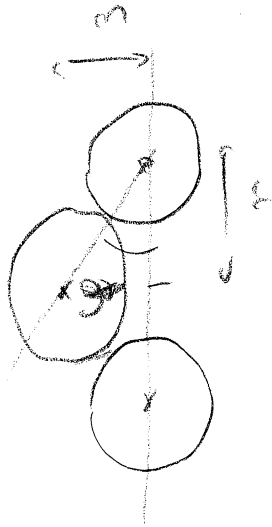
Cette fois les deux cylindres du bas peuvent tourner. Et, tant qu'il y a contact, il y a un mouvement de roulement sans glissement entre chacun de ces cylindres et le cylindre du haut (qui lui ne tourne pas).

Question 4 – Écrire la condition de roulement sans glissement.

Question 5 – Écrire le lagrangien du problème dans le cas où il y a contact en utilisant le ddl ϕ (pas x et z). Et écrire les équations d'Euler-Lagrange en prenant en compte la condition de roulement sans glissement (qui est purement non-holonome).

Question 6 – (pas à traiter) Réécrire maintenant le lagrangien en utilisant les ddls x et z puis les équations d'Euler-Lagrange. Donner les expressions des multiplicateurs. Et en déduire qualitativement les modifications que cette situation apporte par rapport au cas du glissement pur de la question 2.

Question 1



$$\begin{aligned} z &= 2R \sin \varphi \\ x &= 2R \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2R \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{z} = 2R \cos \varphi \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m 4R^2 (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$V = m g z = 2R m g \sin \varphi$$

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{d}{dt} (4 m R^2 (1 + \sin^2 \varphi) \dot{\varphi})$$

$$= -2R m g \cos \varphi + 4 m R^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2$$

$$\overline{T} = P_{\varphi} \dot{\varphi} - T$$

$$\text{avec } P_{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 4 m R^2 (1 + \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}$$

$$\rightarrow \overline{T} = \frac{1}{2} \frac{P_{\varphi}^2}{4 m R^2 (1 + \sin^2 \varphi)}$$

$$\text{or } H = \overline{T} + V$$

$$\frac{dP_{\varphi}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{dP_{\varphi}}{dt} = - \frac{P_{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi}{4 m R^2 (1 + \sin^2 \varphi)^2} - 2 R m g \cos \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_{\varphi}} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{P_{\varphi}}{4 m R^2 (1 + \sin^2 \varphi)}$$

Question 2

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{z}^2 + 2\dot{r}^2) - mgz + \lambda (r^2 + z^2 - 4r^2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow 2m \ddot{r} = 2\lambda z$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \Rightarrow m \ddot{z} = -mg + 2\lambda z$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Rightarrow 0 = r^2 + z^2 - 4r^2$$

$$r^2 + z^2 = 4r^2 \Rightarrow r \ddot{r} + 3 \dot{r}^2 = 0$$

$$\Rightarrow r \ddot{r} + 3 \dot{r}^2 = r^2 + \dot{z}^2 = 0$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} mg, \quad \ddot{z} = -g + \frac{2\lambda z}{m}$$

donc

$$\frac{\lambda}{m} (r^2 + 2z^2) - gz + \dot{r}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\lambda}{m} = \frac{gz - (\dot{r}^2 + \dot{z}^2)}{r^2 + 4z^2}$$

Question 3

Le Hamiltonien de la question 1 est

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{4mr^2(1+\sin^2\varphi)} + 12mg \sin\varphi$$

Il est constant donc on peut écrire

$4mr^2(1+\sin^2\varphi)$ on a

$$\frac{1}{2} 4mr^2(1+\sin^2\varphi) \dot{\varphi}^2 + 12mg \sin\varphi = \text{cte}$$

La constante est donnée par la condition initiale

$$\dot{\varphi} = \dot{z} = 0 \quad (\text{cylindre immobile}) \quad \text{et} \quad z = \sqrt{3}r, \quad r = R$$

$$0 \dot{\varphi} \dot{\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

donc

$$\frac{1}{2} 4mr^2(1+\sin^2\varphi) \dot{\varphi}^2 + 12mg \sin\varphi = 12mg \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow (1+\sin^2\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{9}{r} \sin\varphi = \frac{9}{r} \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{9}{r^2} \dot{\varphi}^2 = 4r^2 \dot{\varphi}^2 = 4r^2 \frac{9}{r^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\varphi \right) / (1+\sin^2\varphi)$$

$$3 = 2r \sin\varphi$$

$$\rightarrow \frac{1}{m} = \frac{2rg \sin\varphi - 4rg(\sqrt{3} - \sin\varphi)/(1+\sin^2\varphi)}{4r^2(1+\sin^2\varphi)}$$

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{2Rg}{4R^2} \frac{10\varphi(1 + \dot{\lambda}^2\varphi) - 2(\sqrt{3}/2 - \dot{\lambda}\varphi)}{(14 \dot{\lambda}^2\varphi)^2}$$

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{g}{2R} \frac{\dot{\lambda}^2\varphi + 3\dot{\lambda}\varphi - \sqrt{3}}{(14 \dot{\lambda}^2\varphi)^2}$$

initialement $\varphi = \pi/3$ et

$$\frac{\lambda}{m} = \frac{g}{2R} \left(\frac{3/4 + 3\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}}{(1 + 3\dot{\lambda}^2)^2} \right)$$

$$= \frac{g}{2R} \frac{(3/4 + \sqrt{3})}{(1 + 3\dot{\lambda}^2)^2} > 0$$

$$\dot{\lambda}\varphi = 0 \quad \frac{\lambda}{m} = \frac{g}{2R} \frac{-\sqrt{3}}{1} < 0$$

$3Rg$ et donc une racine φ_D

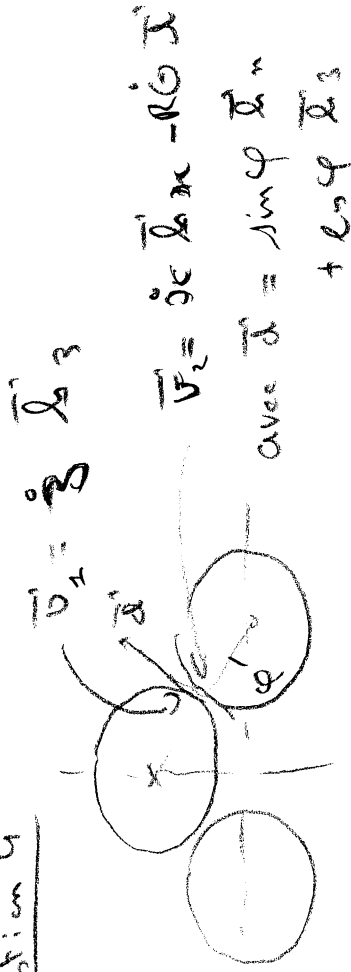
$$t_g \quad \dot{\lambda}^2\varphi_D + 3\dot{\lambda}\varphi_D - \sqrt{3} = 0$$

et c'est là que ton

change de signe

(le contact avec)

Question 4



$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2$$

$$10\dot{\lambda}^2 \cos \varphi = \dot{\lambda}^2 \dot{\lambda}^2 \varphi - R\dot{\theta}^2$$

$$\text{or } 3 = \dot{\lambda}^2 \varphi, \quad n = 2n\varphi$$

$$= 2\dot{\lambda}^2 n = 2\dot{\lambda}^2 3 - R^2 \dot{\theta}^2$$

$$3n - \dot{\lambda}^2 3 + \frac{R^2}{L} \dot{\theta}^2 = 0$$

Question 5

$$L = \frac{1}{2} m 4R^2 (1 + \dot{\lambda}^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 - 2Rmg \dot{\lambda} \varphi + 2R \left(\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \right) \leftarrow \text{énergie cinétique du cylindre de base}$$

le li cisme

$$\ddot{z} + \ddot{r}_3 + \frac{R^2}{r} \ddot{\theta} = 0$$

se résout avec

$$z = 2R \sin \varphi, \quad r = 2R \cos \varphi$$

comme

$$4R^2 \dot{\varphi} + \frac{R^2}{r} \dot{\theta} = 0$$

$$\text{soit } \dot{\varphi} + \frac{\dot{\theta}}{8} = 0$$

Elle n'est pas possible non-
l'obus !

mais on fait comme si :

$$\left| \frac{d}{dt} (m_1 v_1 (1 + 2\varphi) \dot{\varphi}) = m_1 R^2 \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - 2R m_1 \dot{\varphi} + R \right|$$

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 R^2}{4} \dot{\theta} \right) = \frac{R}{8} \right|$$

$$\text{soit } 0 = \dot{\varphi} + \frac{\dot{\theta}}{8}$$