

Mécanique et électricité analytiques



Leçon 4



Circuits électriques linéaires

G. Vinsard

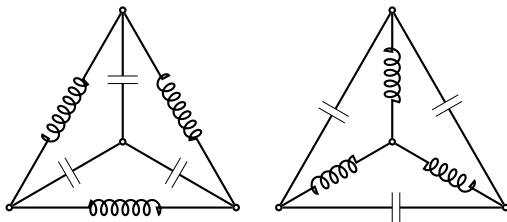
Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

21 octobre 2018

Objectifs de la leçon

- ▶ Les méthodes de la mécanique analytiques sont utilisées au delà du domaine propre de la mécanique ;
- ▶ L'extention du domaine est celle des circuits électriques ; leur structure de graphe est évoquée mais l'étude du graphe en lui même n'est pas faite (on se borne à indiquer que la loi aux nœuds conduit à une paramétrisation séparant les flux de l'arbre et du coarbre sans préciser davantage la notion) ;
- ▶ Les circuits se prêtant bien à cela, une discussion sur le service que les équations d'Euler-Lagrange peuvent rendre pour identifier un jeu de variables pertinentes pour un problème donné est initiée (avec un exemple mécanique supplémentaire).

Exemple emblématique

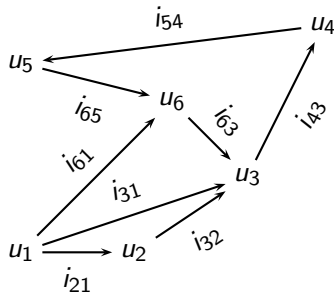


Les inductances et capacités sont toutes identiques.

La structure est donc celle d'une charge triphasée équilibrée mais aucune notion relevant de cette particularisation électrotechnique n'est exploitée.

Le circuit électrique est un graphe

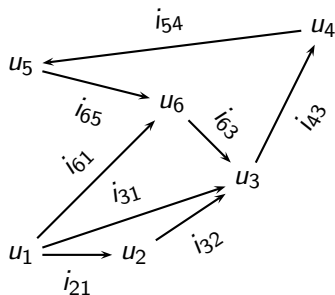
- La structure du circuit électrique est celle d'un graphe¹ aux nœuds duquel sont attachés des valeurs de potentiel électrique et dont les arêtes sont parcourues par des courants électriques.



les nœuds sont numérotés de 1 à 6 ; les valeurs de potentiels u_n sont nommés par le symbole u indicé par les numéros de nœuds ; les valeurs de courant sont nommés par le symbole i double indicé par, dans l'ordre, le numéro de nœud vers lequel est dirigé le courant et le numéro de nœud d'où provient ce courant.

1. La notion sera précisée dans le cours *ad hoc*.

Le circuit électrique est un graphe



► Les **courants incidents à un nœud donné** sont les courants dirigés vers ce nœud mais aussi ceux dont il est la provenance, dans ce dernier cas leur valeur est comptée négativement. Par exemple les courants incidents au nœud No 3 sont : i_{32} , i_{31} , i_{63} et $-i_{43}$.

► La **tension entre bornes** ou **différence de potentiels** est

$$V_{nm} = u_n - u_m$$

Lois de Kirchhoff

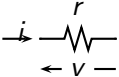
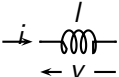
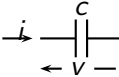
- ▶ La somme des courants incidents à un noeud du circuit électrique est nulle (loi aux nœuds) ;
- ▶ la somme des tensions aux bornes des arêtes le long d'un parcours fermé sur le circuit (une maille) est nulle (loi aux mailles).

La considération des potentiels aux nœud plutôt que celle des différences de potentiels permet de satisfaire automatiquement la 2^e loi de Kirchhoff. Les relations tensions vs courants apparaissent entre différence de potentiels et courant d'arêtes.

Mais la loi aux nœud reste à satisfaire.

- ▶ Un chapitre de la théorie des graphes a pour utilité de fournir des méthodes automatiques de paramétrisation des courants pour satisfaire la loi aux nœuds. On ne traitera pas de cette question ici.

Idéographie des composants électriques passifs

composant	coefficient	Unité	symbole	relation
résistance	résistance	Ω (Ohm)		$v = r i$
autoinductance	inductance	H (Henry)		$v = \frac{d\varphi}{dt}$ avec $\varphi = L i$
condensateur	capacité	F (Farad)		$i = \frac{dq}{dt}$ avec $q = C v$

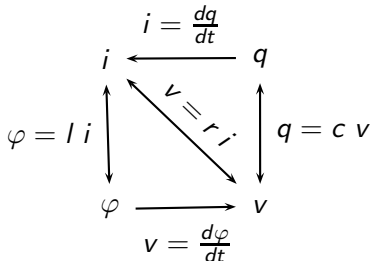
Deux quantités intermédiaires ont été introduites :

- ▶ le **flux magnétique** φ dont l'unité est le **Weber (Wb)**
- ▶ la **charge électrique** q dont l'unité est le **Coulomb (Cb)**.

L'unité de la « différence de potentiels » (ou « tension ») v est le Volt (V) et celle du courant électrique l'Ampère (A)

Diagramme de Chua²

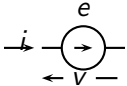
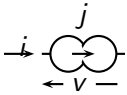
- Les relations linéaires (incluant l'opération de dérivation par rapport au temps) entre le courant et la tension sont figurées par les relations correspondant aux composants passifs.
- Il est intéressant de voir ces relations sous la forme du diagramme



où seul manque une relation directe entre charge électrique q et flux magnétique φ ; cette liaison correspond à un composant imaginé par Chua et créé récemment, appelé memristor et dont l'étude va au delà des objectifs de la leçon.

2. On peut l'appeler ainsi en l'honneur de Chua ; voir Hasler

Idéographie des composants électriques actifs

composant	coefficient	symbole	relation
générateur de tension	tension source		$v = -e$ où e est une donnée
générateur de courant	courant source		$i = j$ où j est une donnée

La **tension source** est aussi appelée la **force électromotrice** : on remarquera que le choix fait pour la relation entre le sens du courant et de la ddp, c'est la **convention récepteur** (par opposition à la convention générateur) comme pour les composants passifs.

Ces composants actifs sont une idéalisation de circuits électriques³ qui assurent la fonction globale ; l'étude des circuits réalisant la fonction dépasse les objectifs de la leçon.

3. Sauf pour les batteries qui sont des convertisseurs électrochimiques.

Restrictions et extention

- ▶ Les résistances seront pris en compte leçon 9 (aspects dissipatifs) ;
- ▶ Les générateurs de courants seront pris en compte leçon 8 (comme contrainte) ;
- ▶ Les inductances couplées seront introduites leçon 5 (pour des raisons d'équilibre de l'exposé) ;
- ▶ Et cette leçon No 5 introduira également la relation non-linéaire entre flux magnétique et courant électrique (importante dans la pratique).

Une inductance, une capacité et une tension source en série : Faire le dessin du schéma électrique

- La loi aux nœud affirme qu'il y a un seul courant i parcourant les 3 composants ;
- La loi aux mailles affirme que la somme des différences de potentiels aux bornes des trois composants est nulle soit

$$\frac{d\varphi}{dt} + v = e$$

où $\varphi = L i$ et $q = C v$ d'autre part la relation entre charge q et courant i est

$$\frac{dq}{dt} = i$$

- Si q était une position, i serait une vitesse (le taux de variation de la position par rapport au temps) ; si L était une masse, φ pourrait être interprétée comme une impulsion, $-v = -q/C$ comme la force de rappel d'un ressort de raideur $1/C$ et e une force prescrite. Faire le dessin du schéma mécanique

Coénergie magnétique et énergie électrique

► Avec l'interprétation mécanique des équations de circuits électriques, viennent les équivalents suivantes :

► l'énergie cinétique devient la coénergie magnétique⁴

$$\overline{W} = \frac{1}{2} L i^2$$

► l'énergie potentielle devient la somme de l'énergie électrique dans le condensateur

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

et du « travail » de la force électromotrice e

$$U_e = -e q$$

qui dépend du temps si $e : t \longrightarrow e(t)$, soit

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} - e q$$

4. Le préfixe «co-» et la notation $\overline{W}$ seront expliqués Leçon 5

Le lagrangien électromagnétique

- Le lagrangien électromagnétique est alors

$$L = \overline{W} - U = \frac{1}{2} L i^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{c} + q e$$

c'est une variable dépendante de la charge (position) q , du courant i (vitesse) et du temps (si e est elle même une variable dépendante du temps).

- Et l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\frac{d}{dt} \partial_i L = \partial_q L \implies \frac{d(L i)}{dt} = -\frac{q}{c} + e$$

qui, associée à la liaison essentielle entre courant-vitesse et charge-position $dq/dt = i$, donne bien le système d'équation de ce circuit électrique.

Le hamiltonien électromagnétique

- La transformée de Legendre du lagrangien est

$$H = \varphi i - L \text{ où } i \text{ est solution de } \partial_i L = \varphi$$

soit

$$H = \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{L} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} - q e$$

c'est une variable dépendante de la charge q , du flux magnétique (impulsion) φ et du temps (par e).

- Les équations de Hamilton

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\partial_q H ; \quad \frac{dq}{dt} = \partial_\varphi H$$

sont

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{q}{C} + e ; \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\varphi}{L}$$

et donc bien les équations du circuit électrique.

Méthode lagrangienne pour le circuit électrique

- Les résultats de l'exemple du circuit générateur/inductance/capacité en séries peuvent être étendus pour un circuit électrique ne comportant que des inductances, capacités et générateurs de tension et à ceci près quelconque.
- Le circuit est considéré comme un **graphe orienté** ; c'est à dire que les bornes des composants sont les nœuds (un nœud connecte plusieurs composants) et les composants eux-mêmes sont les arêtes du graphe dont l'orientation est celle du sens du courant.

Cette idéalisation du circuit peut être appelé le **squelette du circuit**. (ou, pour faire prétentieux, sa topologie).

Considérons qu'il y a N nœuds numérotés de 1 à N et A arêtes numérotés de 1 à A .

Méthode lagrangienne pour le circuit électrique

► Les courants parcourant les arêtes du squelette sont indicés par le numéro de l'arête correspondante : soit $i_1, \dots, i_A$.

Il faut trouver parmi ces A courants $A - N + 1$ courants⁵ à partir desquels les $N - 1$ autres s'expriment par une relation du type

$$\begin{pmatrix} i_{A-N+2} \\ \vdots \\ i_A \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{A-N+1} \end{pmatrix}$$

où K est une matrice $(N - 1)$ lignes et $(A - N + 1)$ colonnes composée d'entiers relatifs.

5. C'est la théorie des graphes qui permet d'affirmer que si le graphe est connexe il y a exactement $A - N + 1$ courants permettant cela.

Méthode lagrangienne pour le circuit électrique

- Il faut associer à chacun des courants $i_1, \dots, i_A$ des charges électriques $q_1, \dots, q_A$ et ces charges sont reliées aux charges $q_1, \dots, q_{A-N}$ par la même relation que celle qui porte sur les courants

$$\begin{pmatrix} q_{A-N+2} \\ \vdots \\ q_A \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{A-N+1} \end{pmatrix}$$

- La coénergie magnétique est construite en réassociant les composants aux arêtes correspondantes et par l'algorithme

$\overline{W} \leftarrow 0$

pour $a \leftarrow 1$ **to** A **faire**

si *il y a une inductance l_a sur l'arête a* **alors**
 | i_a est exprimée à partir des $i_1, \dots, i_{A-N+1}$
 | $\overline{W} \leftarrow \overline{W} + \frac{1}{2} l_a i_a^2$

Méthode lagrangienne pour le circuit électrique

- L'énergie électrique est construite par l'algorithme

$U \leftarrow 0$

pour $a \leftarrow 1$ **to** A **faire**

q_a est exprimée à partir des $q_1, \dots, q_{A-N+1}$

si *il y a une capacité c_a sur l'arête a* **alors**

$U \leftarrow U + \frac{1}{2} \frac{q_a^2}{c_a}$

sinon si *il y a une tension source e_a sur l'arête a* **alors**

$U \leftarrow U - q_a e_a$

- Le lagrangien est

$$L = \overline{W} - U$$

c'est une variable dépendante des charges $q_1, \dots, q_{A-N+1}$ et courants $i_1, \dots, i_{A-N}$ qui peuvent être globalisées par des vecteurs

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{A-N+1} \end{pmatrix} ; I = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{A-N} \end{pmatrix}$$

et du temps (par les forces électromotrices e_a).

Méthode lagrangienne pour le circuit électrique

- Les équations de circuits sont données par les équations d'Euler-Lagrange⁶

$$\frac{d}{dt} \nabla_I L = \nabla_Q L \text{ avec } \frac{dQ}{dt} = I$$

- La transformation de Legendre du lagrangien par rapport aux courants est

$$H = {}^t I \Phi - L \text{ où le vecteur } I \text{ est solution de } \nabla_I L = \Phi$$

- les équations de Hamilton sont

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\nabla_Q H ; \quad \frac{dQ}{dt} = \nabla_\Phi H$$

prêtes à l'emploi pour être injectées à un code d'EDO.

6. sur le sens de ∇ voir Leçon 3

Analyse de la méthode

► La loi aux mailles n'a pas été utilisée explicitement ; elle est en fait automatiquement satisfaite par la paramétrisation des courants d'une part et par l'emploi des équations de Lagrange : Si V est le vecteur des tensions d'arêtes, celles-ci sous tendent que

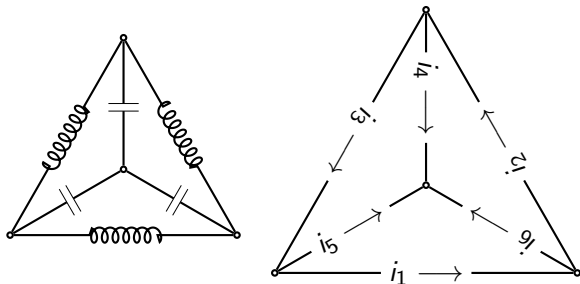
$${}^tQ V = 0$$

c'est à dire que la somme des énergies associées aux composants (avec la convention récepteur pour les inductances et capacités et générateur pour les sources de tension) est nulle. Et dans ce cas si les courants respectent la loi aux nœuds alors les tensions d'arêtes respectent nécessairement la loi aux mailles⁷.

► Il y a un point faible à la méthode qui est que certains circuits ne permettent pas d'associer un flux à chaque courant (c'est illustré dans le traitement des exemples emblématiques).

7. C'est une variante du théorème de Tellegen

Exemple emblématique avec inductances en triangle (1/4)



Il y a $A = 6$ arêtes et $N = 4$ nœuds; les $A - N + 1 = 3$ courants à sélectionner pour exprimer les N autres de manière que la loi au nœuds soit respectée sont i_1, i_2, i_3 donc

$$\begin{pmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

Exemple emblématique avec inductances en triangle (2/4)

les charges q_1, q_2, q_3 sont telles que $\frac{dq_i}{dt} = i_i$ et de la même façon que pour les courants

$$\begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi la coénergie magnétique est

$$\overline{W} = \frac{1}{2} L (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2)$$

et l'énergie électrique

$$U = \frac{1}{2C} ((q_3 - q_2)^2 + (q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_1)^2)$$

Exemple emblématique avec inductances en triangle (3/4)

Le lagrangien est

$$L = \overline{W} - U$$

c'est une variable dépendante de q_1, q_2, q_3 et i_1, i_2, i_3 . Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$l \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

auxquelles on adjoint

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

de manière à obtenir un jeu complet d'équations permettant le calcul de l'évolution des charges et courants dans le circuit à partir de la donnée de conditions initiales.

Exemple emblématique avec inductances en triangle (4/4)

Les flux magnétiques sont

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

L'énergie magnétique

$$W = \frac{1}{2l} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2)$$

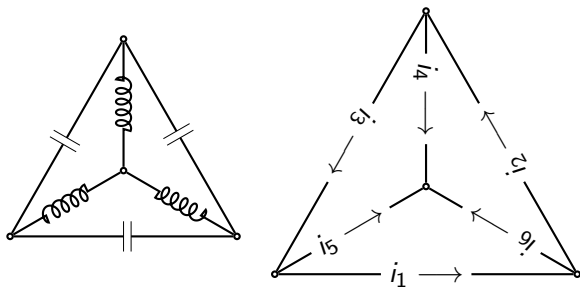
Le hamiltonien

$$H = W + U$$

c'est une variable dépendante de q_1, q_2, q_3 et ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Les équations de Hamilton sont

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} ; \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

Exemple emblématique avec inductances en étoiles



Rien ne change dans la façon dont les courants peuvent être paramétré pour que la loi aux noeuds soit respectée et on leur associe toujours des charges q_n telles que $\frac{dq_n}{dt} = i_n$:

$$\begin{pmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Exemple emblématique avec inductances en triangle (2/4)

La coénergie magnétique est maintenant

$$\overline{W} = \frac{1}{2} I \left((i_3 - i_2)^2 + (i_1 - i_3)^2 + (i_2 - i_1)^2 \right)$$

et l'énergie électrique

$$U = \frac{1}{2c} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

Le lagrangien est

$$L = \overline{W} - U$$

et les équations d'Euler-Lagrange

$$\underbrace{I \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=K} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Exemple emblématique avec inductances en triangle (2/4)

Les équations d'Euler-Lagrange ne permettent pas l'expression explicite des dérivées des courants parce que la matrice K n'est pas inversible. En fait on obtient en sommant les trois équations

$$\frac{q_1}{c} + \frac{q_2}{c} + \frac{q_3}{c} = 0$$

qui n'est rien d'autre que la loi aux maille exprimée sur la maille formée par le triangle. C'est une relation algébrique qui impose que

$$\frac{d}{dt}(q_1 + q_2 + q_3) = i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

La somme des trois courants est encore nulle. Il est donc possible de poser

$$q_3 = -q_1 - q_2 \quad ; \quad i_3 = -i_1 - i_2$$

et de condenser les équations d'Euler-Lagrange comme

$$I \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} q_1 \\ -q_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

qui ne pose plus de problème particulier.

Exemple emblématique avec inductances en triangle (3/4)

- Les équations de Lagrange ont pu être mises sous une forme particulière où l'un des jeux de variables $(q_3, \dot{i}_3)$ était algébriquement lié aux autres variables q_1, q_2 et $\dot{i}_1, \dot{i}_2$ qui elles sont solutions d'un système différentiel.
- Mais les choses se présentent différemment pour les équations de Hamilton parce que l'étape de la recherche de $\dot{i}_1, \dot{i}_2, \dot{i}_3$ telles que

$$\underbrace{I \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

échoue, K n'étant pas inversible.

Il est intéressant d'en identifier la cause.

Exemple emblématique avec inductances en triangle (4/4)

- Les courants i_4 , i_5 , i_6 du triangle ne sont pas indépendants du fait de la loi aux nœuds à leur point de concours qui s'écrit

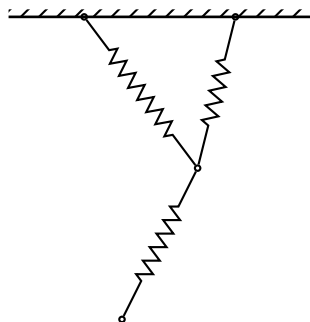
$$i_4 + i_5 + i_6 = 0$$

et donc la coénergie magnétique ne dépend que de 2 courants. Contrairement au cas des inductances disposées en triangles où elle dépendait bien de 3 courants indépendants les uns des autres.

- Le trouble vient donc de l'analyse du nombre de degrés de liberté dans le système : la méthode d'Euler-Lagrange tolère une erreur d'estimation du nombre de degrés de liberté, pas celle d'Hamilton. Et inversement l'échec de la recherche des impulsions correspondants aux vitesses généralisée est le signe d'une telle erreur.

- Ce n'est pas une difficulté propre aux circuits électriques bien qu'elle y soit plus présente dans ce domaine.

Exemple mécanique connexe (1/2)



Les trois ressorts sont identiques (masse propre négligée, raideur k et longueur à vide nulle) ; il n'y a pas de masse au point de concours des trois ressorts de coordonnées (x_1, y_1) ; la masse m est à l'extrémité inférieure du ressort du bas de coordonnée (x_2, y_2) . La pesanteur est dirigée vers le bas.

L'énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2} k (x_1^2 + y_1^2 + (x_1 - l)^2 + y_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) - m g y_2$$

Exemple mécanique connexe (2/2)

Les équations d'Euler-Lagrange correspondant aux jeux de variables $(x_1, \dot{x}_1)$ $(x_2, \dot{x}_2)$ sont

$$0 = -k (x_1 + (x_1 - l) + (x_1 - x_2)) ; 0 = -k (y_1 + y_1 + y_1 - y_2)$$

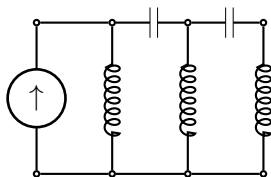
elles permettent d'exprimer x_1 et y_1 en fonction de x_2 et y_2 pour réduire les degrés de liberté du problème à 2, avec les variables de position x_2, y_2 . C'est à dire que

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

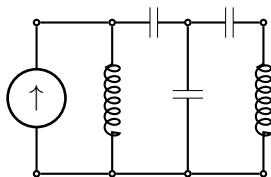
et

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} k \left(\left(\frac{x_2 + l}{3} \right)^2 + \left(\frac{y_2}{3} \right)^2 + \left(\frac{x_2 + l}{3} - l \right)^2 + \left(\frac{y_2}{3} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(x_2 - \frac{x_2 + l}{3} \right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_2}{3} \right)^2 \right) - m g y_2 \end{aligned}$$

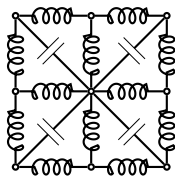
Exercices



La f.e.m. est e , les inductances L et les capacités C ; écrire les équations permettant le calcul des courants dans tous les composants.



même question.



Les inductances sont toutes L et les capacités C ; même question. Qu'arrive-t-il si les inductances et capacités sont permutées ?