

Mécanique et électricité analytiques



Leçon 10



Chocs

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

8 décembre 2019

Objectif de la leçon

- Examiner quelques modèles de choc

Attention, c'est un premier jet dont je ne suis pas satisfait. Sa valeur (pour autant qu'il en ait une) tient à ce que le problème des chocs est introduit.

Aporie et conciliation dans la considération de chocs de solides indéformables

► Prenons un pendule de Newton : la boule qui vient frapper la chaîne de boules immobiles communique son énergie cinétique à la première boule et s'immobilise ; cette première boule la transmet à la seconde tout en restant immobile ; et ainsi de suite jusqu'à la dernière qui se met en mouvement.

Comment est-il possible que des boules indéformables transmettent de l'énergie cinétique sans bouger ?

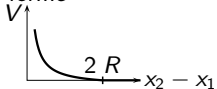
► Si on abandonne la conception selon laquelle elles sont indéformables, alors chaque boule devient (en 1^o approximation) un milieu élastique. Dans ce cas l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle le long de la chaîne et reconvertie pour la dernière boule en énergie cinétique.

Il y a une piste ! Comment la formaliser ?

► L'idée consiste à accepter que les boules s'interpénètrent (elles ne sont donc plus déformables) et à assortir cet interpénétration d'une énergie potentielle d'autant plus grande que l'interpénétration est grande. Cette énergie potentielle étant nulle en l'absence d'interpénétration.

Choc frontal (élastique) de deux boules (1/3)

- Les centres de boules sont en $x_1 \vec{k}_x$, $x_2 \vec{k}_x$ avec $x_1 < x_2$; elle ont pour masse m , rayon R ; le potentiel V est de la forme



- Le lagrangien du problème est alors $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - V(x_2 - x_1)$ et donc les équations du mouvement sont

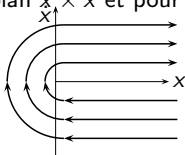
$$m \ddot{x}_1 = V'(x_2 - x_1); \quad m \ddot{x}_2 = -V'(x_2 - x_1); \quad \text{avec } V' \text{ la dérivée de } V$$

D'où, en posant $x + 2R = x_2 - x_1$, $m \ddot{x} = -2 V'(x)$. Une intégrale 1° de cette équation est

$$H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + 2 V(x)$$

Choc frontal (élastique) de deux boules (2/3)

- Le tracé de $H = \text{Cste}$ dans le plan $\dot{x} \times x$ et pour un potentiel $V = 1/2 k x^2$ est



On voit que si on part d'une condition initiale $x(0) = \ell$, $\dot{x}(0) = -v$ (avec $V > 0$), on arrive à $x(-2\ell/v + \tau) = \ell$ avec $\dot{x}(-2\ell/v + \tau) = v$ avec $\tau = \pi \sqrt{m/k}$. Ce temps τ est le temps de parcours de la masse dans la zone $x < 0$ où le potentiel V n'est pas nul. Alors que le temps ℓ/v est le temps de parcours de chacune des branches $\dot{x} > 0$ et $\dot{x} < 0$ de la trajectoire. On peut appeler τ le temps de choc. Si $k \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$ et le choc se fait donc en un temps nul.

- En collectant ces résultats, on arrive à l'inférence selon laquelle : 1/ le choc se fait en un temps nul ; 2/ il a pour conséquence de modifier instantanément les vitesses avant chocs ; 3/ il conserve l'énergie cinétique.

► L'approche phénoménologique consiste à supposer que cette inférence est valable en toute circonstance. Bien entendu, même si on a utilisé un calcul pour la présenter, cette approche correspond à peu près aux expériences qu'on peut mener.

Choc frontal (élastique) de deux boules (3/3)

► La reprise du problème du choc frontal en utilisant directement la règle 1/ le choc se fait en un temps nul ; 2/ il conserve l'énergie cinétique conduit à

$$|x_2 - x_1| > 2R \rightarrow (m \ddot{x}_1 = 0 ; m \ddot{x}_2 = 0)$$

et si, à $t = t_0 - \epsilon$ ($\epsilon > 0$ et $\epsilon \rightarrow 0$)

$$x_2(t_0 - \epsilon) - x_1(t_0 - \epsilon) = 2R, \dot{x}_2(t_0 - \epsilon) < \dot{x}_1(t_0 - \epsilon)$$

alors, instantanément, soit à $t = t_0 + \epsilon$

$$x_1(t_0 + \epsilon) = x_1(t_0 - \epsilon) ; x_2(t_0 + \epsilon) = x_2(t_0 - \epsilon)$$

$$m \dot{x}_1(t_0 + \epsilon) = m \dot{x}_1(t_0 - \epsilon) + p ; m \dot{x}_2(t_0 + \epsilon) = m \dot{x}_2(t_0 - \epsilon) - p$$

où p , qui s'appelle une percussion (et est homogène à une qqté de mvt) est tel que l'énergie cinétique des deux boules se conservent. Elle est donc solution de

$$\frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1(t_0 - \epsilon) + \frac{p}{m} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_2(t_0 - \epsilon) - \frac{p}{m} \right)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1(t_0 - \epsilon)^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2(t_0 - \epsilon)^2$$

on trouve comme solutions

$$p = 0 \text{ et } p = m (\dot{x}_2(t_0 - \epsilon) - \dot{x}_1(t_0 - \epsilon))$$

$p = 0$ fournit l'état avant choc, $p = m (\dot{x}_2(t_0 - \epsilon) - \dot{x}_1(t_0 - \epsilon))$ l'état après choc.

Retour sur le pendule de Newton

- ▶ La boule 0 qui percute la chaîne de boules immobiles à vitesse v commence par percuter la première boule (boule 1) de la chaîne ; le résultat est que la boule 0 passe instantanément à vitesse nulle alors que la boule 1 est à la vitesse v
- ▶ La boule 1 percute la boule 2, elle passe donc à vitesse nulle alors que la boule 2 passe à la vitesse v ; et ainsi de suite ;
- ▶ jusqu'à la dernière qui n'a plus de boules à percuter et qui donc reste à la vitesse v ...

- ▶ Bien évidemment, on manipule le temps un peu légèrement : en un temps nul chacune des boules intérieures à la chaîne, passe de la vitesse nulle à la vitesse v puis revient à la vitesse nulle !

- ▶ Mais ça a le mérite de rendre compte de ce qu'on observe...

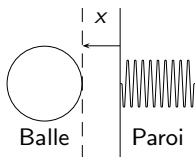
- ▶ Du moins pendant quelques cycles. Après on observe que le mouvement s'atténue et donc qu'il y a de la dissipation à l'œuvre.

La dissipation dans le choc

- ▶ Il y a deux causes de dissipation lors d'un choc. La **dissipation de percussion** qui fait que le mouvement du pendule de Newton s'atténue et la **dissipation de frottement** qui a lieu lorsque les vitesses des deux corps qui s'entrechoquent n'ont pas la même composante dans le plan normal Π à la direction selon laquelle se produit le choc.
- ▶ Phénoménologiquement la dissipation de percussion se traite en introduisant un **coefficient de restitution** : on calcule les vitesses après choc avec le critère de l'énergie cinétique qui doit être conservée ; on modifie ces vitesses en les multipliant par ce coefficient de restitution.
- ▶ Non moins phénoménologiquement, la dissipation de frottement se traite en introduisant une composante de normale au plan Π à la percussion, cette composante étant reliée à la percussion normale par la loi d'Amontons-Coulomb.

Coefficient de restitution 1/2

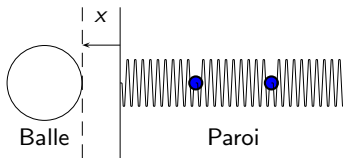
- Pour en comprendre l'origine, on peut examiner le rebond d'une boule (masse m) sur une paroi. Avec un modèle où la paroi est remplacée par un seul ressort de raideur k



L'équation du mouvement de la balle est

si $x > 0$: $\Rightarrow M \ddot{x} = 0$; si $x < 0$; $m \ddot{x} = -k x$ Et elle correspond à un rebond de coefficient de restitution 1 (c'est le cas déjà étudié).

- Avec maintenant un modèle où la paroi est remplacé par un système comportant des ressorts identiques (raideur k) et des masses identiques m (en bleue)



on introduit des ddls internes à la paroi.

Coefficient de restitution 2/2

► Pour N masses (et $N + 1$ ressorts), il y a $N + 1$ ddls : x et $x_1 \dots x_n$; les énergie cinétique et potentielle du système sont

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \sum_{n=1}^N \dot{x}_n^2 ; \quad V = \frac{1}{2} k \sum_{n=1}^N (x_{n+1} - x_n)^2 + \frac{1}{2} k \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ (x_1 - x)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et c'est assez pour écrire le lagrangien, les équations d'Euler-Lagrange et pour utiliser ces dernières à des fins de simulation.

► Le résultat de ces simulations (faites en séance en direct) montre que si la balle a une vitesse d'impact de v , alors sa vitesse d'éjection est $-\epsilon v$ avec ϵ qui dépend des paramètres N , k et m du modèle par lequel la paroi est représentée. L'énergie cinétique ainsi perdue par la boule est capturée par le système de masses/ressort de la paroi et s'assimile à de l'énergie dissipée sous forme de chaleur.

► On peut d'ailleurs décrire d'autres aspects du phénomène de choc avec le genre de modèle avec lequel la paroi a été représentée. Par exemple on peut également remplacer la boule par un système de ressorts/masses comme pour la paroi et ainsi cette boule « embarquera une partie de la chaleur générée par le choc.

Utilisation du coefficient de restitution

- Il n'est (heureusement) pas nécessaire de passer par le modèle précédent pour obtenir le coefficient de restitution. Une simple expérimentation sur le rebond d'une balle sur le sol permet de l'identifier : par exemple

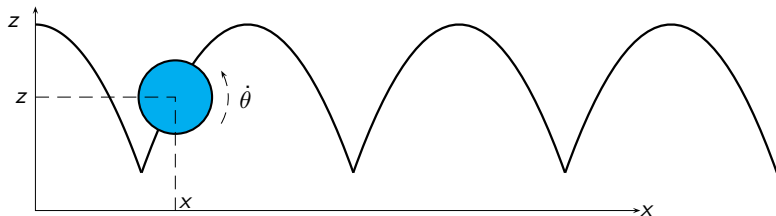
Si la balle de rayon R part à vitesse nulle avec son centre en z_0 , elle arrive au contact du sol $z = R$ au temps $\tau_0 = \sqrt{2(z_0 - R)/g}$ avec la vitesse $-g \tau_0$; son rebond lui procure la vitesse $+ \epsilon g \tau_0$ qui la fait monter puis redescendre pour arriver au point de contact $z = R$ à $\tau_1 = \tau_0 + 2 \epsilon \tau_0$; il suffit alors de mesurer τ_0 et τ_1 (avec le son du choc par exemple) pour obtenir ϵ .

- La valeur de ϵ ayant été obtenue d'une façon ou d'une autre, toujours pour une balle qui rebondit sur le sol, son utilisation peut être de modifier la vitesse après choc en la multipliant par ϵ ou encore d'écrire que l'énergie cinétique après choc s'équilibre avec le produit de l'énergie cinétique avant choc et d'un coefficient $1 - \epsilon^2$, ce qui donne le même résultat.

- Pour des chocs entre objets plus complexes (par exemple un bâton en caoutchouc qui tombe sur le sol), l'introduction du coefficient de restitution et son utilisation peut cependant s'avérer plus problématique. Le mieux est encore de traiter les cas qui se produisent au cas à cas.

Dissipation de frottement : balle qui rebondit (1/5)

► Prenons l'exemple d'une balle qui rebondit avec un coefficient de restitution de 1



Initialement son centre est en $x = x_0$, $z = z_0$, la vitesse de ce centre est $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{z} = 0$, et la boule tourne autour de l'axe normal au plan du dessin à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$.

Le temps du premier choc est $\tau_0 = \sqrt{2(z_0 - R)/g}$; les vitesses horizontale et angulaire n'ont pas varié; la vitesse verticale est $-g \tau_0$; la boule subit une percussion p dirigée suivant $\vec{k}_z$ et qui conserve l'énergie cinétique. En appelant

$$\dot{z}_1^- = -g \tau_0 ; \dot{x}_1^- = \dot{x}_0 \quad \dot{\theta}_1^- = \dot{\theta}_0$$

les vitesses après choc sont telles que

$$m \dot{z}_1^+ = m \dot{z}_1^- + p ; m \dot{x}_1^+ = m \dot{x}_1^- ; \frac{2}{5} m R^2 \dot{\theta}_1^+ = \frac{2}{5} m R^2 \dot{\theta}_1^-$$

Dissipation de frottement : balle qui rebondit (2/5)

Ces vitesses sont déterminées dès que p est connu et p est déterminé en le prenant comme solution non nulle de

$$\frac{1}{2} m \left((\dot{z}_1^+)^2 + (\dot{x}_1^+)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m R^2 \left(\dot{\theta}_1^+ \right)^2 = \frac{1}{2} m \left((\dot{z}_1^-)^2 + (\dot{x}_1^-)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m R^2 \left(\dot{\theta}_1^- \right)^2$$

Le résultat est bien sûr $p = -2 m \dot{z}_1^-$ et les vitesses tangentielles $\dot{x}_1^-$ et angulaire $\dot{\theta}_1^-$ semblent ne jouer aucun rôle.

► Cependant il suffit de laisser tomber ($\dot{x}_0 = 0$) une balle en lui ayant communiqué une vitesse angulaire initiale ($\dot{\theta}_0$) non nulle pour constater que cette vitesse angulaire influe sur le mouvement ultérieur au choc de la balle.

► Il est donc nécessaire de corriger le modèle de choc.

► La correction consiste à introduire une percussion q dans la direction de $\vec{k}_x$. Les relations entre vitesses avant et après choc deviennent alors

$$m \dot{z}_1^+ = m \dot{z}_1^- + p ; m \dot{x}_1^+ = m \dot{x}_1^- + q ; \frac{2}{5} m R^2 \dot{\theta}_1^+ = \frac{2}{5} m R^2 \dot{\theta}_1^- + R q$$

Et ces vitesses après choc sont déterminées dès lors que p et q sont connues.

Dissipation de frottement : balle qui rebondit (3/5)

► La percussion normale p est déterminé comme précédemment comme solution non nulle de l'équation d'équilibre entre énergie cinétique avant et après choc **en donnant à q la valeur $q = 0$** ; soit donc $p = -2 m \dot{z}_1^-$

► En 1° approximation la percussion tangentielle est choisie de la même façon que la force de frottement de la loi d'Amontons-Coulomb : La vitesse de glissement à l'instant du premier choc étant

$$v_1^- = \dot{z}_1^- + R \dot{\theta}_1^-$$

et le coefficient de frottement solide dynamique étant f , si $v_1^- \neq 0$ on écrit

$$q = -\text{sgn}(v_1^-) f |p|$$

► On obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} m \dot{z}_1^+ = m \dot{z}_1^- - 2 m \dot{z}_1^- \\ m \dot{x}_1^+ = m \dot{x}_1^- - \text{sgn}(v_1^-) f |2 m \dot{z}_1^-| \\ \frac{2}{5} m R^2 \dot{\theta}_1^+ = \frac{2}{5} m R^2 \dot{\theta}_1^- - R \text{sgn}(v_1^-) f |2 m \dot{z}_1^-| \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1^+ = -\dot{z}_1^- \\ \dot{x}_1^+ = \dot{x}_1^- + 2 f \text{sgn}(v_1^-) \dot{z}_1^- \\ R \dot{\theta}_1^+ = R \dot{\theta}_1^- + 5 f \text{sgn}(v_1^-) \dot{z}_1^- \end{array} \right.$$

Et la vitesse de glissement après choc est

$$v_1^+ = \dot{x}_1^+ + R \dot{\theta}_1^+ = v_1^- + 7 f \text{sgn}(v_1^-) \dot{z}_1^- = v_1^- - 7 f \text{sgn}(v_1^-) |\dot{z}_1^-|$$

Dissipation de frottement : balle qui rebondit (4/5)

- Cette expression de la vitesse de glissement après choc

$v_1^+ = v_1^- + 7 f \operatorname{sgn}(v_1^-) \dot{z}_1^-$ peut devenir problématique.

- Si $v_1^- > 0$ alors

$$v_1^+ = v_1^- - 7 f |\dot{z}_1^-|$$

Tant que $f |\dot{z}_1^-| < v_1^-$ on trouve que $v_1^+ > 0$ et donc la force de frottement n'introduit pas de changement de signe de la vitesse de glissement. C'est satisfaisant.

Par contre, si $f |\dot{z}_1^-| > v_1^-$ alors $v_1^+ < 0$ et la force de frottement introduirait un changement de signe de la vitesse de glissement ; ce qui est inacceptable (en changeant de signe, la vitesse de glissement passe par la valeur 0 et à cette valeur la loi qui détermine l'impulsion de frottement comme $q = -\operatorname{sgn}(v_1^-) f |p|$ n'est plus valable).

- Et on retrouve le même résultat pour le cas $v_1^- < 0$. Pour éviter cette incohérence, on modifie la loi $q = -\operatorname{sgn}(v_1^-) f |p|$ comme

$$q = -\operatorname{sgn}(v_1^-) \min \left(f |p|, \frac{2}{7} m |v_1^-| \right)$$

de manière que la diminution maximale de la vitesse de glissement l'annule plutôt que de la faire changer de signe.

Dissipation de frottement : balle qui rebondit (5/5)

- Il reste à ajouter que, puisqu'il n'y a aucune force tangentielle extérieure, si le choc a lieu pour une vitesse de glissement nulle alors $q = 0$.
- Les éléments pour modéliser le comportement de la balle qui rebondit sont en place. En indiquant par n les vitesses avant et après le choc n , les vitesses avant et après choc sont

$$\begin{aligned}\dot{z}_n^+ &= \dot{z}_n^- + p_n/m ; \dot{x}_n^+ = \dot{x}_n^- + q_n/m ; R \dot{\theta}_n^+ = R \dot{\theta}_n^- + \frac{2}{5} q_n/m \\ p_n &= 2 m |\dot{z}_n^-| ; v_n^- = \dot{x}_n^- + R \dot{\theta}_n^- ; q_n = -\text{sgn}(v_n^-) \min \left(f p_n, \frac{2}{7} m |v_n^-| \right)\end{aligned}$$

Et entre les chocs, si on néglige les frottements fluides pendant son vol, la boule est juste soumise à la gravité, soit

$$\ddot{z} = -g ; \ddot{x} = 0 ; \ddot{\theta} = 0$$

- Pour compléter, il est relativement facile d'introduire un coefficient de restitution dans le résultat précédent : $p_n = 2 m |\dot{z}_n^-|$ devient $p_n = (1 + \epsilon) m |\dot{z}_n^-|$.

Toward a general formulation of shocks ?

- ▶ Les éléments précédents et leur organisation peuvent servir de modèles pour le traitement de problème de choc. Mais il faut bien comprendre qu'ils ne représentent en somme qu'un pis aller. L'aporie de départ selon laquelle le choc et le solide indéformable sont incompatibles reste valable.
- ▶ Aussi ne me semble-t'il pas souhaitable d'exposer des généralisations sur cette base.
- ▶ Toutefois le plan qui consiste à
 - ▶ introduire une percussion normale p au point de contact lors du choc et trouver son intensité sous le critère que l'énergie cinétique se conserve ;
 - ▶ corriger la valeur de cette percussion au moyen d'un coefficient de restitution empirique ;
 - ▶ introduire une percussion tangentielle qui suit la loi d'Amantons-Coulomb corrigée (opposée à la vitesse de glissement au point de contact, d'intensité le minimum entre le produit du facteur de frottement f par la valeur de la percussion et la valeur nécessaire pour que la vitesse de glissement change de signe).

a le mérite de la clarté dans ses insuffisances.

Quelques ajouts : percussion vs force (1/2)

► On a introduit directement la notion de percussion (p) en écrivant que les vitesses avant ($\dot{x}^-$) et après ($\dot{x}^+$) choc étaient liées par

$$m \dot{x}^+(t=0) = m \dot{x}^-(t=0) + p$$

mais d'autre part on sait que la relation du PFD est

$$\forall t : m \ddot{x}(t) = F(t)$$

où F est la force qui s'exerce que la masse m à la position $\vec{x}$. Cette force est la force qui rend compte du choc et le but est de l'identifier.

► x est une fonction continue dont la dérivée est continue également sauf en $t = 0$; si on veut la dériver $2 \times$ on peut introduire la distribution régulière T_x dont x est la fonction correspondante. On a alors

$$\dot{T}_x = \dot{T}_x$$

et

$$\ddot{T}_x = T_{(\ddot{x})} + (\dot{x}^+(t=0) - \dot{x}^-(t=0)) \delta$$

où $T_{(\ddot{x})}$ est une distribution régulière associée à la fonction $(\ddot{x})$ qui est la dérivée seconde de x définie partout sauf en 0 et δ est la distribution de Dirac.

Quelques ajouts : percussion vs force (2/2)

- au sens des distributions

$$\forall t : m \ddot{x}(t) = F(t)$$

devient

$$m (T_{(\ddot{x})} + (\dot{x}^+(t=0) - \dot{x}^-(t=0)) \delta) = T$$

où T est la distribution qu'on met pour remplacer la fonction F dans le passage aux distributions.

En dehors du choc, $\dot{x}$ est constant et donc $(\ddot{x}) = 0$, on obtient donc

$$T = m (\dot{x}^+(t=0) - \dot{x}^-(t=0)) \delta$$

T est une distribution singulière : la distribution de Dirac multipliée par le coefficient $m (\dot{x}^+(t=0) - \dot{x}^-(t=0))$ qui est ce qu'on appelle la percussion. Notamment, puisque T n'est pas une distribution régulière, on a eu tort d'écrire au départ $\forall t : m \ddot{x}(t) = F(t)$, il fallait plutôt écrire directement

$$F = p \delta$$

et

$$p \delta = m (\dot{x}^+(t=0) - \dot{x}^-(t=0)) \delta$$

- Le cours de mathématiques sur les distributions éclaircira le contenu de ces deux planches qui ne sont fournies que pour anticiper le lien et peut-être lui apporter une dénotation.