Mécanique et électricité analytiques

Leçon 2

Problèmes mécaniques à deux degrés de liberté

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

30 septembre 2013

Objectifs de la leçon

- Généraliser les méthodes d'Euler-Lagrange et de Hamilton dans le cas où le système mécanique est doté de deux degrés de liberté ;

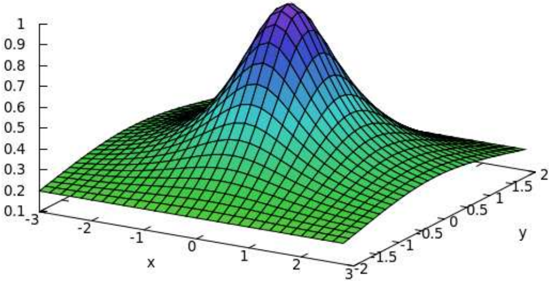
- introduire les notions d'espace de configuration et d'espace de phases ;

- introduire la notion de variable ignorable et les propriétés associées ;

- introduire la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Exemple emblématique

Une masse ponctuelle assujettie à se déplacer sur une surface et soumise à la force de gravité.



Les éléments de l'exemple

- La position de la masse ponctuelle est

$$\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y + h(x,y)\ \vec{k}_z$$

- Les deux ddls x et y sont des variables dépendantes du temps t, la vitesse de la masse est

$$\dot{\vec{x}} = \dot{x}\ \vec{k}_x + \dot{y}\ \vec{k}_y + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\ \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial y}\ \dot{y}\right)\ \vec{k}_z$$

- L'énergie cinétique correspondant est

$$T = \frac{1}{2}\ m\ \left(\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\ \dot{x}^2 + \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)\dot{y}^2 + 2\ \frac{\partial h}{\partial x}\ \frac{\partial h}{\partial y}\ \dot{x}\ \dot{y}\right)$$

- L'énergie potentielle est

$$V = m\ g\ h(x,y)$$

Le lagrangien et les équations d'Euler-Lagrange

- Le lagrangien est

$$L = T - V$$

c'est une variable dépendante de x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$.

- Si y et $\dot{y}$ étaient des fonctions du temps donné, ce lagrangien serait une variable dépendante de x, $\dot{x}$ et t et le problème mécanique correspondant entrerait dans le cadre de la leçon 1.

- On postule que pour le jeu de variable x et $\dot{x}$, y et $\dot{y}$ sont des fonctions du temps données et vice-versa ;

- Les équations d'Euler-Lagrange sont alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{array} \right.$$

Les impulsions dans le cas de 2 variables

- L'énergie cinétique T est une variable dépendante de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ et de x et y, les impulsions p_x et p_y associées à $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \text{ et } p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}$$

- soit

$$p_x = m\left(\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\dot{x}+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\dot{y}\right)$$

$$p_y = m\left(\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)\dot{y}+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\dot{x}\right)$$

et inversement

$$\dot{x} = \frac{1}{m\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)}\left(\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)p_x-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}p_y\right)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{m\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)}\left(\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)p_y-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}p_x\right)$$

La transformation de Legendre dans le cas de 2 variables

- La transformée de Legendre de T est

$$\overline{T} = p_x\,\dot{x} + p_y\,\dot{y} - T \text{ où } \dot{x} \text{ et } \dot{y} \text{ sont sol. de } \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = p_x, \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = p_y$$

$\overline{T}$ est une variable dépendante de p_x et p_y et de x et y, on a

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial p_x} = \dot{x}\;;\;\frac{\partial \overline{T}}{\partial p_y} = \dot{y}$$

- ici

$$\overline{T} = \frac{\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)\,p_x^2 + \left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\,p_y^2 - 2\,\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\,p_x\,p_y}{2\,m\,\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)}$$

Le hamiltonien et les équations de Hamilton

- Le hamiltonien est

$$H = \overline{T} + V$$

et les équations de Hamilton

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} \\ \dfrac{dp_x}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} \\ \dfrac{dp_y}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \end{array}\right.$$

- Ces équations sont celles du mouvement avec le même argument que pour les équations d'Euler-Lagrange.
Les expressions sont un peu lourdes à écrire, voir le script `Maxima`

`Demonstations_No2.wxm`

où les calculs de l'exemple emblématique sont menés automatiquement.

Espace de configuration et espace de phase

- L'espace de configuration est l'espace des variables dont la donnée des valeurs spécifie exactement la position du système ; ici le système est le point matériel et l'espace de configuration est celui dans lequel sont x et y, c'est un plan ;

- L'espace de phase est l'espace des variables dont la donnée des valeurs est suffisante pour prédire l'évolution du système ; ici, en prenant comme équations d'évolution les équations
  - de Hamilton, c'est l'espace dans lequel sont x, y, p_x, p_y ;
  - d'Euler-Lagrange, c'est l'espace dans lequel sont x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Dans les deux cas c'est un espace de dimension 4.

Sous-variété de l'espace de phase

- Le hamiltonien de l'exemple emblématique est constant ; en effet pour un hamiltonien quelconque

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

et celui de l'exemple emblématique ne dépend pas explicitement du temps.

- Les variables x, y, p_x, p_y sont donc liées par la relation

$$\frac{\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)\ p_x^2 + \left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\ p_y^2 - 2\ \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\ p_x\ p_y}{2m\ \left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)} + m\ g\ h = E$$

où E la constante est appelée l'energie.

- Géométriquement cette relation définit un lieu de point dans l'espace de phase de dimension 4 ; un tel lieu est appelé une hypersurface ou encore une sous-variété de l'espace de phase.

Exemple emblématique de la leçon 1 $\subset$ celui de cette leçon

- Si $\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$ alors

$$H = \underbrace{\frac{p_x^2}{2m\ \left(1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)} + m\ g\ h}_{= H_{\text{leçon No 1}}} + \frac{p_y^2}{2\ m}$$

- La partie des équations de Hamilton portant sur les variables y et p_y s'écrit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{m} \quad ; \quad \frac{dp_y}{dt} = 0$$

Et cela parce que H ne dépend pas explicitement de y. Lorsqu'une variable de position n'apparaît pas dans le hamiltonien, elle est dite ignorable [1] et la propriété qui lui est associée est

$$p_y = \text{Constante}$$

1. (Whittaker) ou cyclique (Helmholtz) ou cinosthenique (J.J. Thomson)

Autre exemple de variable ignorable (1/3)

- Si
$$h(x, y) = \tilde{h}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Le plus simple est d'utiliser d'emblée les coordonnées cylindriques (cf. Leçon 1).

- le vecteur position est
$$\vec{x} = r\ \vec{k}_r + \tilde{h}(r)\ \vec{k}_z$$

- la vitesse est
$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\ \vec{k}_r + r\ \dot{\phi}\ \vec{k}_\phi + \tilde{h}'\ \dot{r}\ \vec{k}_z$$

- l'énergie cinétique est
$$T = \frac{1}{2}\ m\left(\left(1 + \tilde{h}'^2\right)\ \dot{r}^2 + r^2\ \dot{\phi}^2\right)$$

- les impulsions sont
$$p_r = m\ \left(1 + \tilde{h}'^2\right)\ \dot{r} \quad ; \quad p_\phi = m\ r^2\ \dot{\phi}$$

p_ϕ s'appelle le moment cinétique.

Autre exemple de variable ignorable (2/3)

- La transformée de Legendre de l'énergie cinétique est

$$\overline{T} = \frac{p_r^2}{2\ m\ \left(1+\tilde{h}'^2\right)} + \frac{p_\phi^2}{2\ m\ r^2}$$

- le hamiltonien est

$$H = \frac{p_r^2}{2\ m\ \left(1+\tilde{h}'^2\right)} + \frac{p_\phi^2}{2\ m\ r^2} + m\ g\ \ \tilde{h}$$

- ϕ est une variable ignorable. Il vient donc

$$p_\phi = \text{Moment cinétique constant } \mathcal{M}$$

- les équations de Hamilton portant sur r et p_r sont alors

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m\ \left(1+\tilde{h}'^2\right)} \quad ; \quad \frac{dp_r}{dt} = -m\ g\ \tilde{h}' + \frac{p_r^2\ \tilde{h}'\ \tilde{h}''}{m\ \left(1+\tilde{h}'^2\right)^2} + \frac{\mathcal{M}^2}{m\ r^3}$$

Autre exemple de variable ignorable (3/3)

- L'espace de configuration est celui des variables de position r et ϕ, soit $[0, \infty[\times[0, 2\pi[$;

- L'espace de phase est celui de r, p_r, ϕ, p_ϕ. Le mouvement dans cet espace est tel que

$$\frac{p_r^2}{2\ m\ \left(1 + \tilde{h}'^2\right)} + \frac{p_\phi^2}{2\ m\ r^2} + m\ g\ \ \tilde{h} = \text{Énergie constante } E$$

et

$$p_\phi = \mathcal{M}$$

- Il est possible d'obtenir une solution par quadrature, ce qui conduit à une étude très connexe[2] à celle du cas des forces centrales.

2. la différence porte sur le terme $1 + \tilde{h}'^2$ au dénominateur de p_r

Multiplicateur de Lagrange : motivation

- Le traitement fait à la leçon No 1 de son exemple emblématique présente
  - un défaut de genéralité dans la mesure où il suppose que z est toujours une fonction de x ; ce qui n'est pas le cas si, par exemple, ces deux coordonnées sont liées par une relation implicite comme
  $$x^2 + z^2 = r^2$$
  - l'inconvénient que la considération de la force de réaction est entièrement évitée et donc qu'on ne la calcule pas.
- Il est donc intéressant de reprendre cet exemple en gardant les deux degrés de liberté liés sous forme implicite générale

$$F(x, z) = 0$$

Le traitement de ce genre de problème se fait par la méthode du multiplicateur de Lagrange.

Exemple emblématique No 1 étendu : principe (1/2)

- Les énergies cinétique et potentielle sont celles d'une masse ponctuelle m libre de mouvement et soumise à l'action de la pesanteur

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) \text{ et } V = m\, g\, z$$

- D'autre part x et z sont liées par une relation

$$F(x, z) = 0$$

appelée une contrainte.

- On forme alors le lagrangien comme une variable L dépendante de x, z, $\dot{x}$, $\dot{z}$ et d'une nouvelle variable λ appelée *"multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $F = 0$"* qui s'écrit

$$L = T - V - \lambda\, F$$

λ est considérée comme une variable de position à laquelle ne correspond pas de terme d'inertie (c'est un peu le symétrique d'une variable ignorable).

Exemple emblématique No 1 étendu : principe (2/2)

- Les équations d'Euler-Lagrange par rapport à x, z et λ sont alors exprimées comme

$$m\,\frac{d\dot{x}}{dt} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial x} \quad ; \quad m\,\frac{d\dot{z}}{dt} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial z} - m\,g \quad ; \quad 0 = -F$$

- les x, z et λ solutions sont tels que :
  1. x et z sont assujettis à rester sur la courbe $F(x,z) = 0$;
  2. les termes $-\lambda\frac{\partial F}{\partial x}$ et $-\lambda\frac{\partial F}{\partial z}$ s'interprètent comme les composantes suivant $\vec{k}_x$ et $\vec{k}_z$ de la force de réaction $\vec{R}$ qui maintient la masse sur cette courbe.

- C'est la méthode du multiplicateur de Lagrange.

Exemple emblématique No 1 restreint : vérification (1/4)

- Pour $F(x,z) = z - h(x)$
les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$m\,\frac{d\dot{x}}{dt} = \lambda\; h'(x) \quad ; \quad m\,\frac{d\dot{z}}{dt} = -\lambda - m\,g \quad ; \quad z = h(x)$$

- En dérivant par rapport au temps $z = h(x)$ on obtient

$$\dot{z} = h'\;\dot{x} \text{ et } \ddot{z} = h''\;\dot{x}^2 + h'\;\ddot{x}$$

- d'où

$$m\;\ddot{x} = \lambda\; h'(x) \quad ; \quad m\;(h''\;\dot{x}^2 + h'\;\ddot{x}) = -\lambda - m\,g$$

- l'élimination de λ conduit à

$$m\;(h'\;h''\;\dot{x}^2 + (1 + h'^2)\;\ddot{x}) = -m\,g\;h'$$

qui est exactement l'équation du mouvement obtenue Leçon No 1.

Exemple emblématique No 1 restreint : vérification (2/4)

- D'autre part il est possible d'obtenir une expression du multiplicateur de lagrange λ comme fonction des variables de phase x, $\dot{x}$, z, $\dot{z}$; l'élimination de $\ddot{x}$ dans

$$m\,\ddot{x} = \lambda\,h' \quad ; \quad m\,(h''\,\dot{x}^2 + h'\,\ddot{x}) = -\lambda - m\,g$$

fournit

$$\lambda = -m\,\frac{h''\,\dot{x}^2 + g}{1 + h'^2}$$

et donc la prise en compte de cette relation dans les équations d'Euler-Lagrange s'écrit

$$m\,\frac{d\dot{x}}{dt} = -m\,\frac{h''\,\dot{x}^2 + g}{1 + h'^2}\,h' \quad ; \quad m\,\frac{d\dot{z}}{dt} = +m\,\frac{h''\,\dot{x}^2 + g}{1 + h'^2} - m\,g$$

- La force de réaction est ainsi

$$\vec{R} = m\,\frac{h''\,\dot{x}^2 + g}{1 + h'^2}\left(-h'\,\vec{k}_x + \vec{k}_z\right) = R\,\vec{n}$$

où R est la composante dirigée suivant la normale à la courbe de la force de réaction (cf. Leçon No 1).

Exemple emblématique No 1 restreint : vérification (3/4)

- Le calcul de la position de la masse ponctuelle se fait par

$$
\begin{array}{lcl}
m \, \dfrac{d\dot{x}}{dt} = -m \, \dfrac{h'' \, \dot{x}^2 + g}{1 + h'^2} \, h' & ; & m \, \dfrac{d\dot{z}}{dt} = +m \, \dfrac{h'' \, \dot{x}^2 + g}{1 + h'^2} - m \, g \\
\dfrac{dx}{dt} = \dot{x} & ; & \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}
\end{array}
$$

- avec les conditions initiales

$$
x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad ; \quad z(0) = z_0 \quad ; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0
$$

qui ne sont pas libres, elles doivent satisfaire à

$$
z_0 = h(x_0) \quad \text{et} \quad \dot{z}_0 = h'(x_0) \, \dot{x}_0
$$

- et dans ces conditions la solution x, z satisfera à

$$
z = h(x)
$$

qui est donc une intégrale première du système différentiel.

Exemple emblématique No 1 restreint : vérification (4/4)

- En effet par élimination il vient

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(z - h(x)\right) = 0$$

et donc

$$z - h(x) = \alpha + \beta\ t$$

les conditions initiales

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad ; \quad z(0) = h(x_0) \quad ; \quad \dot{z}(0) = h'(x_0)\ \dot{x}_0$$

entraînent

$$\alpha = 0 \text{ et } \beta = 0$$

- De plus on peut vérifier que l'énergie

$$\frac{1}{2}\ m\ \left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) + m\ g\ z$$

est une autre intégrale première du système.

Mouvement contraint d'une masse ponctuelle (1/4)

- Les éléments précédents peuvent maintenant être repris dans un cadre général auquel appartient l'exemple emblématique de cette leçon.
- Une masse ponctuelle m de position $\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y + z\ \vec{k}_z$ appartient à la surface définie par

$$F(x, y, z) = 0$$

- elle est soumise à une force potentielle

$$\vec{f} = -\partial_x V\ \vec{k}_x - \partial_y V\ \vec{k}_y - \partial_z V\ \vec{k}_z$$

La question est de déterminer sa loi de mouvement.

- Les énergies cinétique et potentielle sont

$$T = \frac{1}{2}\ m\ \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)\ \text{ et }\ V$$

- Le lagrangien qui prend en compte la contrainte est L variable dépendante de x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$, z, $\dot{z}$ et le multiplicateur de Lagrange λ d'expression

$$L = T - V - \lambda\ F$$

Mouvement contraint d'une masse ponctuelle (2/4)

- Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$m\,\frac{d\dot{x}}{dt} = -\lambda\,\partial_x F - \partial_x V \quad ; \quad m\,\frac{d\dot{y}}{dt} = -\lambda\,\partial_y F - \partial_y V$$

$$m\,\frac{d\dot{z}}{dt} = -\lambda\,\partial_z F - \partial_z V \quad ; \quad 0 = -F$$

- Par dérivation temporelle de la relation de contrainte il vient

$$\partial_x F\;\dot{x} + \partial_y F\;\dot{y} + \partial_z F\;\dot{z} = 0$$

- puis la dérivation seconde fournit

$$\begin{array}{rcl} \partial_x F\;\ddot{x} + \partial_y F\;\ddot{y} + \partial_z F\;\ddot{z} & & \\ +\partial^2_{xx} F\;\dot{x}^2 + \partial^2_{yy} F\;\dot{y}^2 + \partial^2_{zz} F\;\dot{z}^2 + 2\;\left(\partial^2_{xy} F\;\dot{x}\;\dot{y} + \partial^2_{yz} F\;\dot{y}\;\dot{z} + \partial^2_{zx} F\;\dot{z}\;\dot{x}\right) & = & 0 \end{array}$$

- Combinée avec les 3 premières équations, cette dernière relation permet le calcul du multiplicateur de Lagrange comme

$$\lambda = \; m\,\frac{\partial^2_{xx} F\;\dot{x}^2 + \partial^2_{yy} F\;\dot{y}^2 + \partial^2_{zz} F\;\dot{z}^2 + 2\left(\partial^2_{xy} F\;\dot{x}\;\dot{y} + \partial^2_{yz} F\;\dot{y}\;\dot{z} + \partial^2_{zx} F\;\dot{z}\;\dot{x}\right)}{\partial_x F^2 + \partial_y F^2 + \partial_z F^2}$$

$$-\frac{\partial_x V\;\partial_x F + \partial_y V\;\partial_y F + \partial_z V\;\partial_z F}{\partial F_x^2 + \partial F_y^2 + \partial F_z^2}$$

Mouvement contraint d'une masse ponctuelle (3/4)

- Le système différentiel complet est donc

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\lambda\ \partial_x F + \partial_x V}{m} \quad ; \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\lambda\ \partial_y F + \partial_y V}{m} \quad ; \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\lambda\ \partial_z F - \partial_z V}{m}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

$$\lambda = \quad m\ \frac{\partial^2_{xx} F\ \dot{x}^2 + \partial^2_{yy} F\ \dot{y}^2 + \partial^2_{zz} F\ \dot{z}^2 + 2\left(\partial^2_{xy} F\ \dot{x}\ \dot{y} + \partial^2_{yz} F\ \dot{y}\ \dot{z} + \partial^2_{zx} F\ \dot{z}\ \dot{x}\right)}{\partial_x F^2 + \partial_y F^2 + \partial_z F^2} - \frac{\partial_x V\ \partial_x F + \partial_y V\ \partial_y F + \partial_z V\ \partial_z F}{\partial F_x^2 + \partial F_y^2 + \partial F_z^2}$$

- auquel sont adjointes des conditions initiales

$$x(0) = x_0\ ;\ y(0) = y_0\ ;\ z(0) = z_0\ ;\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0\ ;\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0\ ;\ \dot{z}(0) = \dot{z}_0$$

qui satisfont à

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0\ ;\ \partial_x F(x_0, y_0, z_0)\ \dot{x}_0 + \partial_y F(x_0, y_0, z_0)\ \dot{y}_0 + \partial_z F(x_0, y_0, z_0)\ \dot{z}_0 = 0$$

de manière que la solution x, y, z soit telle que

$$F(x, y, z) = 0$$

- La force de réaction maintenant la masse sur la surface $F = 0$ est

$$\vec{R} = -\lambda\left(\partial_x F\ \vec{k}_x + \partial_y F\ \vec{k}_y + \partial_z F\ \vec{k}_z\right)$$

Mouvement contraint d'une masse ponctuelle (4/4)

- L'analyse précédente amène deux commentaires :
  1. il serait utile de condenser les notations, c'est un des objets de la leçon No 3 ;
  2. il serait intéressant de mieux cerner le problème pour séparer les deux aspects que constituent :
     - le mouvement sur la surface $F = 0$;
     - le non-mouvement (la statique) dans sa direction normale ou au contraire le mouvement dans sa direction si la masse ponctuelle peut décoller de la surface dans le sens $F > 0$.

  C'est un des objets de la leçon No 8. Un autre objet en étant d'introduire la contrainte $F = 0$ plus faiblement un utilisant un potentiel qui devient grand dès qu'elle est violée.

- D'autre part le sujet a été abordé avec l'idée de faciliter la compréhension de la nature du multiplicateur de Lagrange ; l'utilisation du concept à des fins de calcul numérique efficace est un peu différente (et plus simple).

Exercice 1 : Double pendule

Un pendule dont la tige est de longueur l et la masse est m est placé à l'extrémité d'un pendule identique. Les masses se déplacent dans un plan et sont soumise à l'action de la pesanteur (dont la direction est dans le plan) ; les angles que font les tiges 0 et 1 par rapport à la direction de la pesanteur sont notés θ_0 et θ_1.

1. Trouver les équations du mouvement par la méthode d'Euler-Lagrange ;
2. Idem par la méthode de Hamilton ;
3. Vérifier que le hamiltonien H est constant et constater que l'espace de phase étant de dimension 4 il n'est pas possible d'utiliser cette propriété pour déterminer complétement le mouvement ;
4. Calculer numériquement le mouvement (par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 fournie) pour le visualiser dans l'espace de configuration ; visualiser également dynamiquement le mouvement des tiges.

Exercice 2 : Pendule dont la tige est un ressort

Une masse ponctuelle m est reliée à l'extrémité d'une tige assimilable à un ressort rectiligne de raideur k et de longueur à vide l_0 et soumise à l'action de la pesanteur ; sa position est paramétrée par l, la longueur de la tige, θ l'angle de la tige avec la direction de la pesanteur et ϕ celui de la projection de cette tige dans le plan orthogonal à cette direction par rapport à une direction quelconque de ce plan.

1. Montrer que ϕ est une variable ignorable et donc que le problème comporte seulement deux ddls ;
2. Trouver les équations du mouvement par la méthode d'Euler-Lagrange ;
3. Idem par la méthode de Hamilton ;

Exercice 3 : Multiplicateur de Lagrange et potentiel de pénalisation

Une masse ponctuelle m de une position dans un plan horizontal (i.e. pas d'action de la pesanteur) $\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y$ est assujettie à rester sur le cercle $x^2 + y^2 = R^2$.
1) Paramétrer le problème par l'angle θ pour lequel $x = R\ cos(\theta)$, $y = R\ sin\theta$ et trouver le mouvement de la masse. Constater que le cadre de cette paramétrisation ne permet pas (sans ajout extérieur à lui) d'obtenir la force que la masse exerce sur le cercle.

2) Retrouver ce mouvement sans cette paramétrisation en incorporant la contrainte $x^2 + y^2 = R^2$ dans le lagrangien via un multiplicateur de Lagrange. Calculer la force que la masse exerce sur le cercle.

3) Cette masse est maintenant libre (i.e. pas nécessairement sur le cercle) mais soumise au potentiel

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2\epsilon}(|\vec{x}| - R)^2$$

a) Quelles sont les équations de son mouvement ?
b) Que se passe-t'il quand ϵ devient très grand ?