

Informations : Documents autorisés – 1h30 – barème indicatif : Les items 'a'... 't' rapportent chacun 1 point. Le soin de la rédaction est pris en compte.

Exercice 1

$\times C$
 P

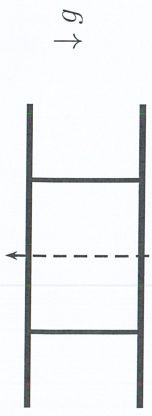


Une tige solide à section circulaire de rayon R_i est insérée dans un tube également à section circulaire de rayon intérieur R_x et de longueur totale L . La longueur de la tige dans le tube est αL .

La partie du tube non atteinte par la tige a une longueur L . Un fluide remplit le tube et les pressions sont en amont P en aval 0.

- a) Faire un dessin du domaine fluide et y porter les noms des frontières de ce domaine.
- b) Écrire les équations du mouvement du fluide en régime stationnaire en précisant les conditions aux limites et en n'utilisant que l'opérateur $\vec{\nabla}$, la vitesse $\vec{v}$ et la pression p .
- c) Exploiter la symétrie axisymétrique pour réécrire ces équations en composantes.
- d) Montrer que loin du point C , du côté où il n'y a pas la tige, il existe une solution laminaire de la forme $\vec{v} = v(r) \vec{k}_z$.
- e) Calculer cette solution en fonction de la différence de pression entre amont et aval.
- f) et g) Mêmes questions que d) et e) mais du côté de la tige.
- h) Dans quelles conditions l'écoulement calculé en e) correspond-il à l'écoulement réel?
- i) On suppose que la perte de charge en C est de la forme 'pression amont - pression aval' = R_c 'débit'. Utiliser les calculs précédents pour donner le débit dans le tube en fonction de P .

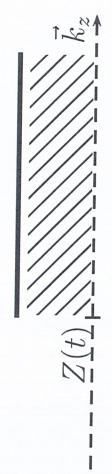
Exercice 2 Un cylindre à section circulaire (rayon R longueur axiale L) fait d'un matériau élastique de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν est placé entre deux plans rigides (en traits gras sur le dessin).



On néglige la masse du matériau élastique et on place une masse M sur le plan supérieur.

- j) Faire un dessin où sont indiqués les noms des frontières du domaine.
- k) Écrire les équations permettant de calculer la déformation du solide en utilisant un champ de déplacement abstrait $\vec{u}$ (conditions aux limites à inclure)
- l) Suggérer une forme possible pour ce champ de déplacement.
- m) Calculer alors le champ de déplacement.
- n) Donner la diminution de longueur obtenue en fonction de E , ν , R , L , M .
- o) Le volume du cylindre varie-t'il dans la déformation? Si oui quelle est cette variation?

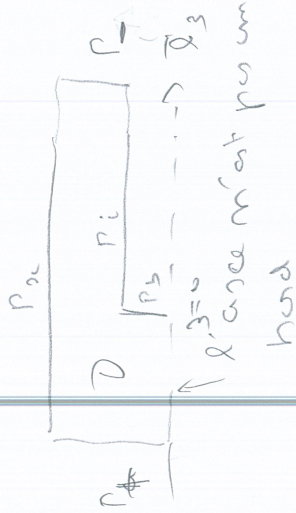
Exercice 3 : La tige de l'exercice 1 est un bâton de sel placé dans un tube en acier. Seul le sel de la base est en contact avec le fluide qui est de l'eau pure.



- p) Dans le cas où l'eau est immobile, écrire les équations (conditions initiale et aux limites incluses) permettant de calculer la concentration de sel dans l'eau.
- q) Donner l'expression de la quantité de sel qui passe dans l'eau au cours du temps et en déduire un équation permettant de trouver $Z(t)$ la position du la frontière entre le sel et l'eau (en supposant que cette frontière reste plane)
- r) et s) Mêmes questions que p) et q) dans le cas où le fluide est en mouvement avec le champ de vitesse de c)
- t) Quand une certaine quantité de sel a été dissous, $Z(t)$ est bien plus à droite que le bord du tube : décrire cette situation.

Exercice 1

a)



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} p = \eta \Delta \vec{v} \quad \text{dans } \Omega$$

avec $\vec{v} = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\vec{v} = 0$ sur $\partial\Omega$

Pour P_+ et P_- c'est difficile

on anticipe sur la question

d) on s'attend à ce que P_+ et P_-

sont suffisamment éloignées

de l'obstacle ($z=0$)

c'est $\vec{v} \times \vec{n} = 0$ sur P_+ et P_-

$P_+ = P_-$ après

$P_+ = 0$ sur P_-

$$\vec{v} = \mu(r, z) \vec{e}_r + w(r, z) \vec{e}_z$$

on se concentre sur $\vec{e}_z$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial}{\partial x} p \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} p \vec{e}_y - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \vec{e}_z$$

$$\left\{ \begin{aligned} P &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ P &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (w w) + \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{dans } \Omega$$

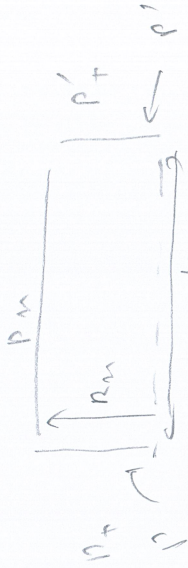
$$u = w = 0 \quad \text{sur } P_+, P_-, P_0$$

$$u = 0 \quad \text{sur } P_+, P_-$$

$$P = P_+ = P_-$$

$$P = 0 \quad \text{sur } P_-$$

d) l'axe des points ($z=0$) le géométrique



l'écart entre les points $\vec{v} = \vec{v}(x) \vec{e}_z$ satisfait une eq. de

de c) à condition que P varie linéairement avec z

$$\text{on écrit } - \frac{P - P_0}{L} = \eta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)$$

$$\text{avec } P_0 = 0 \quad \text{sur } P_+ \quad \vec{v}(P_+) = 0$$

e) la solution est

$$v = -\frac{P-P_1}{4\eta L} \frac{R^2}{4} + \alpha + \beta \ln r$$

en $r=0$ $v=0$ fini $\Rightarrow \beta=0$

en $r=R$ $v=0 \Rightarrow \alpha = -\frac{P-P_1}{4\eta L} R^2$

d'où $v = \frac{P-P_1}{4\eta L} (R^2 - r^2)$

f) lin du P^0 C la géométrie est

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{r_{oi}}{r_{oi}} \frac{r_{oi}}{r_{oi}} \frac{r_{oi}}{r_{oi}}$$

Comme en a) $\bar{v} = v(r) \bar{x}_3$ satisfait

avec éq. de D de a) c condition

que $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_1 - P_2}{L}$

avec la C.L. $v(R/2)=0$ - $v(r_1)=0$

g) la R.S. est T_j

$$v = -\left(\frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\right) \frac{R^2}{4} + \alpha + \beta \ln r$$

mais il y a un calcul à faire pour la C.L.

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln R_i \\ 1 & \ln R_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\frac{P_1}{4\eta L} \begin{pmatrix} R_i^2 \\ R_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\frac{P_1}{4\eta L} \frac{1}{\ln \frac{R_n}{R_i}} \begin{pmatrix} \ln R_n - \ln R_i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_i^2 \\ R_n^2 \end{pmatrix}$$

d'où v

h) Ce n'est pas parce qu'on peut trouver des solutions dimensionnelles que celle-ci sont celles qui décrivent l'écoulement réel, Il faut encore que le n° de Reynolds soit plus petit que 2000

$Re = \frac{\rho R_n v}{\eta}$ (en $R_n - r_i$ par g)

valen max de v | $q_{ext} = 1$

$Re < 2000$

i) le débit par e) est $Q = 2\pi \int_0^{R_i} r dr v(r)$

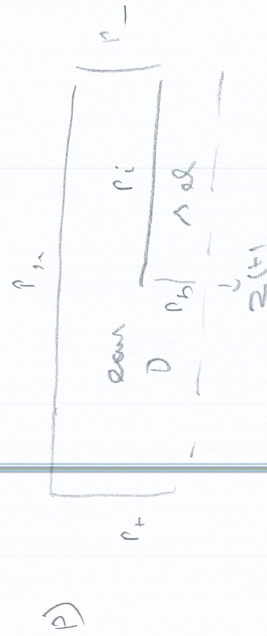
par g $Q = 2\pi \int_{R_n}^{R_i} r dr v(r)$

de ce fait la $\ln$ prend un signe donc devient P_1 et P_2 entre elles

e) ρ, ρ_{conc} $\frac{\Delta V}{V} = -v \frac{\Delta \rho}{\rho}$

de conc $\frac{\Delta \rho}{\rho} < 0$ c'est un argument de volume

Exercice 3



c) de concentration

$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \alpha \Delta \rho = 0$ de D

$-\alpha \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0$ sur $\rho_+, \rho_-, \rho_m, \rho_i$

$C = C_{\text{conc}}$ sur ρ_+

q) ρ_{conc} de ρ_{conc} (g/m^3)

$\phi = -\alpha \frac{\partial \rho}{\partial n}$ sur ρ_+

sur le ϕ de ρ_{conc} qui pose des problèmes

$Q = \int_{\rho_+} \phi \, dS$ en g/s

Cela fait avec l'interface ρ_{conc} en g/m^3

$\rho \frac{\partial S}{\partial t} = Q$

n) il y a un champ de vitesse $\vec{v}$ de ρ_{conc} (solution de e)

dure $\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla (C \vec{v}) = -\Delta C = 0$ de D

avec $\vec{v}$

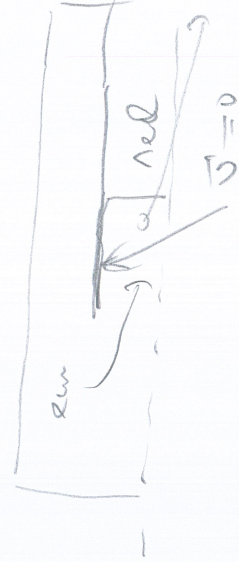
$-\alpha \frac{\partial C}{\partial n} = 0$ sur $\rho_+, \rho_-, \rho_m, \rho_i$

$C = C_{\text{conc}}$ sur ρ_+

($\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\rho_+, \rho_-, \rho_m, \rho_i, \rho_h$)

d) en chose que q) si on considère que la particule mobile ne change pas de densité de l'échantillon

e) c'est



cette zone d'eau que la viscosité diminue, on peut s'attendre à ce que $\vec{v} = 0$ des