Équations macroscopiques de la physique classique

Transfert de chaleur

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

20 septembre 2018

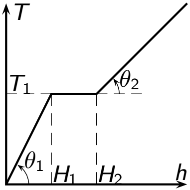
Objectifs

- Introduire l'équation de la chaleur avec terme advectif et en milieu opaque au rayonnement ;
- l'enthalpie est utilisée le plus longtemps possible dans l'exposé dans le but d'appuyer que l'équation de la chaleur n'est rien d'autre qu'un bilan local d'énergie.
- Introduire les conditions aux limites approximant les échanges de chaleur usuels : convectifs et rayonnants.
- Présenter quelques éléments de vocabulaire pour décrire les approximations utiles pour les calculs effectifs.

Rappels sur l'enthalpie et la température

► Le ≪ système ≫ au sens de la thermodynamique est une partie de matière isolée par la pensée de son mileu extérieur avec lequel il échange de l'énergie. Cette énergie peut prendre la forme : d'énergie mécanique, électromagnétique et chaleur.

► Lorsque seule est considérée la chaleur, il est commode de décrire l'énergie du système par son enthalpie h qui ne dépend que de la température T, typiquement



ce qui traduit un changement d'état du matériau à la température T_1 correspondant à une chaleur latente $L = H_2 - H_1$; les tangentes des deux angles sont les chaleurs spécifiques à pression constante des deux états par

$$C_{p1} = 1/\tan\theta_1 \; ; \; C_{p2} = 1/\tan\theta_2$$

Bilan local d'énergie

► Un domaine D est supposé composé de volumes élémentaires $\delta\vec{x}^3$ qui sont autant de systèmes thermodynamiques ; la masse du volume élémentaire est $\rho\,\delta\vec{x}^3$ et la valeur d'enthalpie $\rho\,H\,\delta\vec{x}^3$ où

$$\begin{array}{rcccl} H & : & \mathbb{R}\times D & \longrightarrow & \mathbb{R}(J/kg) \\ & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & H(t,\vec{x}) \end{array}$$

est la fonction d'enthalpie massique du matériau en $(t,\vec{x})$;

► Les températures atteintes par ces volumes élémentaires sont décrites par le champ de températures

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbb{R}\times D & \longrightarrow & \mathbb{R}(K) \\ & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & T(t,\vec{x}) \end{array}$$

et, dans le cas où seule la chaleur est considérée, il y a une dépendance entre H et T de la forme

$$H = f(T)$$

où $f \;:\; \mathbb{R}(K) \longrightarrow \mathbb{R}(J/kg)$ est une fonction donnée qui peut prendre une forme simple $f(T) = C_p\,T$ ou plus compliquée.

Variation temporelle de l'enthalpie

- À chaque instant, l'enthalpie peut varier sous l'effet d'un apport de chaleur $\delta t \; \delta \tilde{P}$ depuis l'extérieur du système et pendant l'intervalle δt, soit

$$\delta \vec{x}^3 \; \delta H = \delta t \; \delta \tilde{P} \Longrightarrow \delta \vec{x}^3 \; \frac{\partial H}{\partial t} = \delta \tilde{P}$$

$\delta \tilde{P}$ est la chaleur qui est apportée par unité de temps, soit la puissance apportée.

- L'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local correspond alors à affirmer que l'enthalpie reste liée à la température (par $H = f(T)$ à chaque instant.

- et rétroactivement c'est cette hypothèse qui donne un sens aux champs d'enthalpie et de température qui dépendent du temps.

Variation temporelle de l'enthalpie massique et volumique

- Le fait d'avoir négligé l'effet d'un éventuel travail mécanique (et électromagnétique) entraîne l'hypothèse *a priori* que le milieu est incompressible.

- Et donc le bilan de puissance

$$\delta\vec{x}^3 \, \frac{\partial H}{\partial t} = \delta\tilde{P}$$

se réécrit

$$\rho \, \delta\vec{x}^3 \, \frac{\partial H}{\partial t} = \delta P$$

où $\delta P = \rho \, \delta\tilde{P}$ est la puissance est apportée au volume $\delta\vec{x}^3$, ce qui permet d'utiliser l'enthalpie volumique $\rho \, H$ (en J/m^3).

Densité de puissance

- Cette puissance δP apportée au volume $\delta \vec{x}^3$ contribue à augmenter H si elle est positive et à le diminuer si elle est négative.

- Le volume $\delta \vec{x}^3$ est supposé pour l'instant intérieur au domaine D et la puissance peut comprendre des contributions de différentes natures.

- Il y a la puissance générée directement dans le volume par une cause particulière (radioactivité, réaction chimique, effet Joule de courants électriques) qui est représentée par une densité de puissance

$$\begin{array}{cccll} \dot{q} & : & \mathbb{R} \times D & \longrightarrow & \mathbb{R}(W/m^3) \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \dot{q}(t, \vec{x}) \end{array}$$

de manière que

$$\delta P_q = \delta \vec{x}^3 \ \dot{q}$$

si elle est seule en présence on obtient alors $\dfrac{\partial H}{\partial t} = \dot{q}$

Loi de Fourier

- Il y a également la puissance apportée par le flux de chaleur de conduction : ce flux s'écrit (loi de Fourier)

$$-\lambda\,\vec{\nabla}T$$

où λ est la conductivité thermique du milieu (en $W/m\ K$) et T est le champ de température

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbb{R}\times D & \longrightarrow & \mathbb{R}(J/kg) \\ & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & T(t,\vec{x}) \end{array}$$

et le bilan entre les 6 facettes du parallélépipède que forme $\delta\vec{x}^3$ fournit

$$\delta P_f = \delta\vec{x}^3\ \vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\,\vec{\nabla}T\right)$$

Avec cette seule contribution

$$\rho\,\frac{\partial H}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\left(\lambda\,\vec{\nabla}T\right)$$

Si $H = C_p\ T$, c'est une équation de diffusion, de diffusivité $\alpha = \lambda/C_p$ (en m^2/s)

Advection

- Le milieu contenu dans D est en mouvement avec un champ de vitesse $\vec{v} \; : \; \mathbb{R}(s) \times D \longrightarrow E_3(m/s)$ connu avec l'hypothèse que le transport par ce champ de vitesse laisse globalement invariant le domaine D.

- L'enthalpie du volume de matière contenu par $\delta\vec{x}^3$ (centré sur une position $\vec{x}$ n'est pas la même d'un instant à l'autre) est advectée avec le flux advectif

$$\rho \, H \, \vec{v}$$

de manière que (pour $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ et ρ uniforme, ce qu'on suppose)

$$\rho \, \frac{\partial H}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \, H \, \vec{v}) = \rho \, \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} H \right) = 0$$

ce qui peut être interprété comme

$$\delta P_a = -\delta\vec{x}^3 \, \vec{\nabla} \cdot (\rho \, H \, \vec{v})$$

Hypothèse de milieu opaque

- δP pourrait encore comprendre un terme prenant en compte des échanges d'énergie par rayonnement électromagnétique ;

- Cette situation complexe est évitée en restreignant l'étude aux « milieux opaques au rayonnement. »

- Les milieux opaques sont en gros ceux qui le sont dans le visible.

Synthèse : l'équation de la chaleur

- Dans un domaine solide D conducteur (isotrope) de la chaleur et opaque au rayonnement l'équation d'évolution de la température est

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda\, \vec{\nabla} T\right) - \rho \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} H\right) + \dot{q} = 0 \text{ avec } H = f(T)$$

où

- $T \;:\; \mathbb{R}(s) \times D \;\longrightarrow\; \mathbb{R}(K)$ est le champ de température ; si $\vec{x}$ et t sont les position et temps considérés, $T(t, \vec{x})$ est la température en $(t, \vec{x})$;
- $H \;:\; D \times \mathbb{R}(K) \;\longrightarrow\; \mathbb{R}(J/kg)$ est l'enthalpie massique du matériau en $(t, \vec{x})$ (typiquement $H = C_p\, T$) ;
- $\lambda \;:\; D \times \mathbb{R}(K) \;\longrightarrow\; \mathbb{R}(W/m\, K)$ est le coefficient de conductivité thermique (en $W/(m\, K)$) du matériau en $(t, \vec{x})$
- $\rho \;:\; D \times \mathbb{R}(K) \;\longrightarrow\; \mathbb{R}(kg/m^3)$ est la masse volumique ;
- $\dot{q} \;:\; \mathbb{R}(s) \times D \;\longrightarrow\; \mathbb{R}(W/m^3)$ est une densité de puissance appportée (si $\dot{q} > 0$) ou soustraite (si $\dot{q} < 0$) en $(t, \vec{x})$. Typiquement c'est une densité de puissance Joule.

Forme courante de l'équation de la chaleur

- S'il n'y a pas de changement d'état notable, l'équation de la chaleur se met sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda\, \vec{\nabla} T\right) - \rho\, C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T\right) + \dot{q} = 0$$

- Si le domaine n'est composé que d'un seul matériau dont les propriétés thermophysiques (λ, ρ et C_p) ne dépendent pas de la température

$$\alpha\, \Delta T - \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T\right) + \frac{\dot{q}}{\rho\, C_p} = 0$$

où α (en m^2/s) s'appelle la diffusivité thermique.
Cette forme est tout à fait celle d'une équation d'advection diffusion ; la quantité dont il s'agit serait alors de l'énergie et donc il faudrait plutôt l'écrire à partir de sa densité $\rho\, H$ comme

$$\alpha\, \Delta(\rho\, H) - \left(\frac{\partial \rho\, H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho\, H)\right) + \dot{q} = 0$$

Transfert d'énergie aux interfaces : principe

- L'équation de la chaleur a été obtenue à partir de bilan de puissance sur les volumes élémentaires $\delta\vec{x}^3$ intérieurs au domaine D ; cette fois il sont supposés avoir une partie commune $\delta\partial D$ avec le bord ∂D de D

- La puissance ajoutée ou soustraite depuis l'extérieur de D est décrite par le flux de chaleur ϕ (en W/m^2) passant par $\delta\partial D$, s'il était le seul à agir le bilan d'énergie s'écrirait

$$\delta\vec{x}^3 \, \frac{\partial H}{\partial t} = \delta\vec{x}^2 \, \phi$$

et donc H aurait une croissance temporelle d'autant plus grande que $\delta\vec{x}$ serait petit.
Ce serait évidemment incohérent et donc en fait la puissance apportée $\delta\vec{x}^2 \, \phi$ ne porte que sur les termes de même ordre de petitesse que lui ; notamment $\delta\vec{x}^3 \, \frac{\partial H}{\partial t}$ étant d'un ordre supérieur il est négligé.

Seul le flux conductif est impacté

- Pour la même raison que précédemment le flux advectif n'est pas à prendre en compte et donc il ne reste que le flux conductif pour équilibrer le flux de chaleur ϕ ;

- De plus les composantes du flux conductifs parallèles à ∂D s'équilibrent dans les deux directions pour former encore des termes en $\delta\vec{x}^{,3}$, il ne reste alors que la composante normale. Si $\vec{n}$ est la normale sortante à D

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}$$

est le flux conductif entrant dans D

- Ce flux est donc seul à être équilibré par le flux de chaleur ϕ, soit

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \phi$$

et il reste à énumérer les composantes possibles de ϕ

Flux imposé et flux convectif

- Tout d'abord il est possible que la puissance apportée par l'extérieur au milieu composant le domaine D par une partie Γ_i de son bord ∂D soit connue, alors

$$\phi = \phi_i \Longrightarrow -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \phi_i \text{ sur } \Gamma_i$$

- Ce flux imposé peut être une 1° application d'un échange plus compliqué : par exemple la puissance envoyée sous forme de rayonnement (cf. plus loin) par le soleil est de 1360 W/m^2 (au total le soleil émet pour 200 10^{12} W et la distance terre soleil est 149.6 10^9 m) ; compte tenu de la présence de l'atmosphère (un milieu semi transparent) le flux effectif arrivant au sol est 342 W (le jour et en moyenne) ; l'utilisation de cette valeur de flux est suffisante pour estimer ce que qu'on peut attendre d'un panneau solaire.

Flux convectif

- Ensuite ce flux peut être convectif, c'est à dire dû aux échanges de chaleur entre le corps (solide) dont on cherche à calculer la répartition de température et le milieu fluide (de l'air par exemple) dans lequel il est immergé.

- En tout rigueur il faudrait calculer la température dans le fluide et pour cela connaitre le champ de vitesse qui le met en mouvement, lequel peut dépendre des différences de densité dans le fluide dues à ces différences de températures (convection naturelle) et/ou être d'une autre cause (convection forcée).

- Mais c'est un problème compliqué. Comme il a une importance pratique, il a été « résolu » pour des standards auxquel on se réfère dans les cas pratiques (un peu comme quand on cherche un objet dans un catalogue).

Flux convectif

- Si un fluide de température T_∞ est en contact avec une partie Γ_c de ∂D, on écrira (sous la forme standardisée) ce flux (appelé flux convectif)

$$\phi = h\,(T - T_\infty) \Longrightarrow -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial n} = h\,(T - T_\infty) \text{ sur } \Gamma_c$$

où h (en $W/(m^2\ K)$) s'appelle le coefficient d'échange thermique et se détermine par la géométrie et les conditions déterminant le mouvement du fluide.

- La recherche des valeurs du coefficient d'échange à choisir demande plus d'explication sur la physique des cas standards. Mais en gros la valeur moyenne à prendre par défaut dans le cas de la convection naturelle est 4 $W/(m^2\ K)$; dans le cas de la convection forcée cela dépend de l'estimation de la vitesse dans le fluide.

Flux de rayonnement

- Même si le milieu contenu par le domaine D est opaque, son extérieur ne l'est pas nécessairement (typiquement l'air ne l'est pas).

- On forme l'hypothèse que les corps opaques sont des corps noirs, c'est à dire qu'ils absorbent intégralement l'énergie des rayonnements qui leur sont incidents (quoique que puisse être le rayonnement...) ; simultanément les corps noirs émettent un rayonnement qui ne dépend que de leur température T.

- Ce rayonnement est réparti en longueur d'onde λ (en m) suivant la loi de Plank : la luminance est

$$L_\lambda = \frac{2\ h\ c^2}{\lambda^5}\ \frac{1}{exp^{\frac{h\ c}{k\ T\ \lambda}} - 1} \text{ en } W/m^3$$

où $h = 6.62\ 10^{-34}\ J\ s$ est la constante de Planck et $k = 1.38\ 10^{-23} J/K$ est la contante de Boltzmann.

Flux de rayonnement

- La puissance émise dans la fourchette $[\lambda, \lambda + \delta\lambda]$ par la surface δS de ∂D est

$$L_\lambda \; \delta\lambda \; \delta S \text{ en } W$$

- Cette puissance se répartit elle-même de façon isotrope si le corps noir est lisse sur le demi-hémisphère extérieur à la surface δS, ce qui fait que la puissance émise dans une direction est

$$L_\lambda \; \delta\lambda \; \delta S/(2\pi) \;\; \text{en } W/\text{stéradiants}$$

- L'analyse d'un problème de transfert de chaleur par rayonnement entre plusieurs corps noirs de formes éventuellement complexe peut devenir assez compliqué ;

- et cela d'autant plus que les corps ne sont jamais vraiment noirs, c'est à dire qu'ils absorbent et réfléchissent le rayonnement de façon différentiée suivant la longueur d'onde.

Flux de rayonnement

- Une façon d'obtenir une approximation pour prendre en compte le rayonnement consiste déjà à intégrer sur toutes les longueurs d'ondes possible (de 0 à l'∞) de la luminance pour obtenir la loi de Stefan

$$\phi_e = \sigma \; T^4 \;\text{ en } W/m^2$$

où $\sigma = 5.47\;10^{-8}\; W/(m^2\; K^4)$ est la constante de Stefan.

- ϕ_e est le flux de chaleur émis par le corps noir par unité de surface ; mais il y a également à prendre en compte le flux de chaleur absorbé par la surface. Pour cela on suppose que le corps est placé dans une enceinte faite d'un corps noir porté à une température T_∞ ; une analyse de cette situation montre que chaque partie de la surface du corps est soumise au flux de chaleur

$$\phi_a = \sigma \; T_\infty^4 \;\text{ en } W/m^2$$

le flux net est alors

$$\phi_e - \phi_a = \sigma \; (T^4 - T_\infty^4)$$

Flux de rayonnement

- La (trop brève) exposition précédente s'étend par l'affirmation que même si chaque position sur la surface $\Gamma_r \subset \partial D$ sujette au rayonnement (émettant et recevant) a une température différente des autres, le flux rayonnant est à peu près le même que celui d'un corps noir pour écrire la condition

$$\phi_r = \epsilon\, \sigma\, \left(T^4 - T_\infty^4\right) \text{ sur } \Gamma_r$$

où s'introduit un coefficient ϵ sans dimension appelé l'émissivité de la surface.

- L'émissivité prend ses valeurs entre 0 à 1 et se détermine soit par une expérimentation *ad hoc* soit en cherchant des ≪ valeurs raisonnables ≫ dans la littérature. Souvent l'émissivité est donnée pour une plage de longueurs d'ondes λ ; le choix peut être fait en utilisant la longueur d'onde pour laquelle la luminance est maximale pour une température donnée qui est founie par la loi de Wien

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2.898\ 10^{-3}}{T}$$

Synthèse : Transfert de chaleur aux interfaces

► Les conditions aux limites à l'équation de la chaleur dans le domaine D spécifient le transfert sur la frontière ∂D de D. Ces conditions peuvent approximativement être synthétisées par

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h\,(T - T_\infty) + \epsilon\,\sigma\,(T^4 - T_\infty^4) + \Phi_i$$

►les symboles h, ϵ, T_∞ et Φ dénotent des variables qui dépendent du point considéré sur ∂D. i.e. il peut y avoir $h = 0$, sur une portion de ∂D et par sur une autre.

► h (en $W/(m^2\ K)$) est le coefficient d'échange entre le domaine D et le fluide (air, eau, ...) dans lequel il baigne supposé être à la température uniforme T_∞ ; c'est le terme d'échange de chaleur avec D par convection dans ce fluide ;

► $\sigma = 5.67\ 10^{-8}$ (en $W/(m^2\ K^4)$) est la constante de Stefan, ϵ (entre 0 et 1) est l'émissivité de la surface, et T_∞ est la température de l'environnement ; c'est le terme d'échange par rayonnement entre D et son ambiante supposée être à température uniforme.

► Φ_i (en W/m^2) est une densité surfacique de puissance un peu comme $\dot{q}$ qui était une densité volumique de puissance. Typiquement un flux de chaleur apporté par laser.

Condition initiale et problème entier

▶ Il manque encore une condition pour pouvoir déterminer le champ de température, c'est la donnée du champ de température à un instant (disons $t = 0$)

$$T(t = 0, \vec{x}) = T_0(\vec{x})$$

▶ Ainsi le problème complet (sous réserve des hypothèses faites) de transfert de chaleur dans un solide opaque est de trouver T tel que

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda\, \vec{\nabla} T\right) - \rho \left(\dfrac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} H\right) + \dot{q} = 0 & \text{dans} \quad D \\ -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n} = h\,(T - T_\infty) + \epsilon\, \sigma\, (T^4 - T_\infty^4) + \Phi & \text{sur} \quad \partial D \\ T(t = 0, \vec{x}) = T_0(\vec{x}) & \text{dans} \quad D \end{cases}$$

▶ Lorsque $\vec{v}$ n'est pas trop grand, ce type de problème peut être résolu sans grande difficulté par les moyens de calcul modernes.

Neumann, Dirichlet et Robin

Les conditions aux limites habituelles de problèmes de ce type sont, sur des portions de la surface ∂D, les condition de

- Neumann $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \Phi$ (Neumann homogène quand $\Phi = 0$)
- Dirichlet $T = T_p$ Température imposée
- Robin $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h \left(T - T_\infty \right)$

- On remarque qu'il y a un type de condition supplémentaire

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \epsilon \, \sigma \, \left(T^4 - T_\infty^4 \right)$$

Celui-ci revient à une condition de Robin après avoir posé

$$h_r = \epsilon \, \sigma \, \left(T^3 + T^2 \; T_\infty + T \; T_\infty^2 + T_\infty^3 \right)$$

et au prix d'accepter des faire des itérations lors de la résolution.

- La condition de Dirichlet semble manquer, mais elle est présente parce que lorsque h est très grand alors

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h \left(T - T_\infty \right) \Longleftrightarrow T = T_\infty$$

Approximations classiques : le régime stationnaire

- Si $\dot{q}$ et Φ ne dépendent pas du temps, le régime stationnaire est obtenu en supposant que T ne dépend pas du temps, soit donc $T = T_s$ solution de

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \, \vec{\nabla} T_s \right) - \rho \left(\dfrac{\partial H_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} H \right) + \dot{q} = 0 & \text{dans} \quad D \\[2ex] -\lambda \dfrac{\partial T_s}{\partial n} = h \, (T_s - T_\infty) + \epsilon \, \sigma \, (T_s^4 - T_\infty^4) + \Phi & \text{sur} \quad \partial D \end{cases}$$

- La différence $\Theta = T - T_s$ est donc solution de

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \, \vec{\nabla} \Theta \right) - \rho \left(\frac{\partial (H - H_s)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(H - H_s) \right) = 0 & \text{dans} \quad D \\[2ex] -\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial n} = h \, (\Theta) + \epsilon \, \sigma \, ((T_s + \Theta)^4 - T_s^4) & \text{sur} \quad \partial D \\[2ex] \Theta(t = 0, \vec{x}) = T_0(\vec{x}) - T_s(\vec{x}) & \text{dans} \quad D \end{cases}$$

dans le cas $H = C_p \, T$, $H_s = C_p \, T_s$ et $\epsilon = 0$, il n'est pas difficile de montrer que $\lim_{t \longrightarrow \infty} \Theta = 0$ et le resultat demeure même sans ces hypothèses.

- La question est d'estimer le temps τ nécessaire pour obtenir le régime stationnaire, Si L est une dimension caractéristique du domaine, c'est quand (Fo = nombre de Fourier)

$$Fo = \frac{\lambda}{\rho C_P} \, \frac{\tau}{L^2} = \frac{\alpha \tau}{L^2} >> \text{quelques unités}$$

Adimensionnement du problème stationnaire

► En régime stationnaire, en linéarisant un flux de rayonnement éventuel, ainsi que la relation entre enthalpie et température, le problème de transfert de chaleur

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \, \vec{\nabla} T \right) - \rho \, C_p \, \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T + \dot{q} = 0 & \text{dans} \quad D \\ -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n} = h \, (T - T_\infty) + \Phi & \text{sur} \quad \partial D \end{cases}$$

s'ecrit encore

$$\begin{cases} L^2 \, \Delta T - \frac{\rho \, C_p \, L \, |\vec{v}|}{\lambda} \left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot (L \, \vec{\nabla} T) \right) + \frac{L^2 \, \dot{q}}{\lambda} = 0 & \text{dans} \quad D \\ -L \dfrac{\partial T}{\partial n} = \dfrac{L \, h}{\lambda} \, (T - T_\infty) + \dfrac{L \, \Phi}{\lambda} & \text{sur} \quad \partial D \end{cases}$$

où L est une dimension caractéristique du domaine fluide D.

► L'intérêt de cet adimensionnement est de permettre d'estimer l'importance relative des termes dans les équations du problème et de justifier ainsi des approximations lorsqu'il y a lieu.

Comparaison des termes de conduction et advection

- le rapport des termes d'advection et de conduction est le nombre de Péclet

$$Pe = \frac{\rho\ C_p\ L\ |\vec{v}|}{\lambda}$$

- S'il est petit alors l'advection n'apporte qu'une correction par rapport au régime de tranfert de chaleur qui aurait été obtenu avec la conduction seule.

- Dans le cas contraire, il est nécessaire de prendre en compte ce terme spécifiquement [1] mais surtout le régime est dominé par la convection : i.e. le transfert de chaleur est dû au transport par le champ de vitesse des particules du fluide.

---

1. Cela pose un problème de calcul numérique assez sérieux *dû au fait que la limite où le terme de conduction est négligé ne corrspond pas à un problème mathématiquement bien posé puisque qu'il s'agit d'une équation au dérivées partielle du 1º ordre dont la variable dépendante doit satisfaire à des conditions aux limites sur le domaine.*

Le petit corps

- Le rapport des termes d'échange par convection et conduction dans la condition aux limites est le nombre de Biot

$$B_i = \frac{L\,h}{\lambda}$$

- S'il est petit, la température sera pratiquement uniforme dans le domaine D et l'équation de diffusion devient une simple équation différentielle ordinaire d'ordre 1.

- Le point délicat est cependant d'incorporer les termes volumique et surfaciques dans cette équation. Pour cela :

- Dans tous les cas

$$\int_D \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda\, \vec{\nabla}\, T\right) d\vec{x}^3 = \int_{\partial D} \left(\lambda\, \vec{\nabla}\, T\right) \cdot \vec{n}\, d\vec{x}^2 = \int_{\partial D} \frac{\partial T}{\partial n}\, d\vec{x}^2$$

d'où, dans le cas $\vec{v} = \vec{0}$,

$$\int_{\partial D} \left(h\,(T - T_\infty) + \epsilon\,\sigma\,(T^4 - T_\infty^4) + \Phi\right)\, d\vec{x}^2 + \frac{d}{dt}\int_D \rho\, H\, d\vec{x}^3 = \int_D \dot{q}\, d\vec{x}^3$$

Le petit corps

- Si la température (et donc l'enthalpie) peuvent être considérées comme presque uniformes dans D soit donc

$$T = \overline{T} = \frac{\int_D T \, d\vec{x}^3}{D = \int_D d\vec{x}^3} \; ; \; H = \overline{H} = \frac{1 \int_D H \, d\vec{x}^3}{D}$$

l'équation de la chaleur s'approxime alors comme

$$\left(\int_{\partial D} h \, d\vec{x}^2 \right) (\overline{T} - T_\infty) + \left(\int_{\partial D} \epsilon \, d\vec{x}^2 \right) \sigma \, (\overline{T}^4 - T_\infty^4) + \left(\int_D \rho \, d\vec{x}^3 \right) \frac{d\overline{H}}{dt} = \left(\int_D \dot{q} \, d\vec{x}^3 \right)$$

qui n'est plus qu'une EDO du 1° ordre : c'est l'approximation des petits corps.

- En posant

$$s = \int_{\partial D} d\vec{x}^2 \; ; \; s \, \overline{h} = \int_{\partial D} h \, d\vec{x}^2 \; ; \; s \, \overline{\epsilon} = \int_{\partial D} \epsilon \, d\vec{x}^2 \; ; \; m = \int_D \rho \, d\vec{x}^3$$

c'est

$$s \, \overline{h} \, (\overline{T} - T_\infty) + s \, \overline{\epsilon} \, \sigma \, (\overline{T}^4 - T_\infty^4) + m \, \frac{d\overline{H}}{dt} = Q = \left(\int_D \dot{q} \, d\vec{x}^3 \right)$$

Chauffage d'un cylindre de faible section chauffé à l'une de ses extrémités

Le cylindre est un fil de cuivre de longueur est 1 m, de section circulaire de rayon 1 mm, initialement à température ambiant $T_0 = 20 + 273\ K$; dans la gamme de température du chauffage

$$\lambda = 400\ W/(m\ K) \quad \rho = 8960\ kg/m^3 \quad C_p = 380\ J/(kg\ K)$$

et on estime l'émissivité à $\epsilon = 0.1$ et le coefficient d'échange à $h = 20\ W/(m^2\ K)$. La puissance injectée par le chauffage est $P = 10\ W$.

- Vérifier que toutes les données nécessaires sont disponibles pour résoudre l'équation de la chaleur (notamment faire le lien entre P et le terme source de l'équation).

- Faire l'approximation de l'ailette qui consiste à supposer que la température est constante dans la section du fil.

- Calculer alors la solution de régime stationnaire après avoir estimé son temps d'établissement en supposant que l'autre extrémité du fil est maintenue à la température ambiante.

Chauffage d'un cylindre de faible section se déplaçant à vitesse constante par rapport à la source de chauffage.

Le cylindre est un fil de cuivre de longueur infinie, de section circulaire de rayon 1 mm, initialement à température ambiant $T_0 = 20 + 273\ K$ et qui se déplace par rapport à la source de chauffage à la vitesse $v = 1\ mm/s$; dans la gamme de température du chauffage

$$\lambda = 400\ W/(m\ K) \quad \rho = 8960\ kg/m^3 \quad C_p = 380\ J/(kg\ K)$$

et on néglige les pertes latérales ($h = 0, epsilon = 0$). La puissance injectée par le chauffage est $P = 10\ W$.

► Vérifier que toutes les données nécessaires sont disponibles pour résoudre l'équation de la chaleur (notamment faire le lien entre P et le terme source de l'équation).

► Faire l'approximation de l'ailette qui consiste à supposer que la température est constante dans la section du fil.

► Calculer la solution de régime stationnaire en supposant que la source est ponctuelle.

Profondeur de cave

À quelle profondeur faut-il creuser une cave dans un sol de propriétés

$$\lambda = 0.14\ W/(m\ K) \quad \rho = 2000\ kg/m^3 \quad C_p = 837\ J/(kg\ K)$$

pour que l'influence du jour et de la nuit n'y soit pas sensible ?

► Écrire l'équation de la chaleur unidirectionnelle dans un massif semi-infini en supposant que la température de surface due au soleil est de la forme

$$T_s = T_0 + \Theta\ \sin(\omega\ t)$$

► Trouver le résultat demandé en supposant que la profondeur est atteinte lorsque la fluctuation de température du régime quasi-stationnaire est de l'ordre de $\Theta/10$.