Équations macroscopiques de la physique classique

Ondes élastiques et modes propres de vibration

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

20 septembre 2018

Objectifs

- Décrire les ondes élastiques ; notamment la décomposition de Helmholtz conduisant à la définition des ondes longitudinale et transverse.

- Décrire les fréquences et modes propres de vibration essentiellement sur l'exemple de la membrane.

Équation de Lamé et inertie

- En statique, dans l'hypothèse des petites déformations de milieux isotropes, isothermes, et homogènes, le déplacement $\vec{u}$ est solution de l'équation de Navier

$$(\lambda + \mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + \mu\,\vec{\Delta}\vec{u} + \vec{f} = \vec{0}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et $\vec{f}$ la densité de force appliquée.

- La dynamique peut être introduite en choisissant d'ajouter dans cette densité de force appliquée la force d'inertie

$$\vec{f} = -\rho\,\partial^2_{tt}\vec{u}$$

où ρ est la densité de masse et où le terme non-linéaires de l'accélération n'est pas pris en compte du fait de l'hypothèse des petites déformations.

Équation des ondes élastiques

- Le résultat est alors

$$(\lambda + \mu)\, \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + \mu\, \vec{\Delta} \vec{u} - \rho\, \partial^2_{tt} \vec{u} = \vec{0}$$

De part sa forme c'est une équation d'ondes ; on l'appelle l'équation d'ondes élastiques.

- On peut déjà chercher des solutions sous la forme d'ondes planes : c'est à dire telles que les composantes du déplacement ne dépendent que de z (et t) et alors la direction de propagation sera $\vec{k}_z$. Pour

$$\vec{u}(t, x\, \vec{k}_x + y\, \vec{k}_y + z\, \vec{k}_z) = u(t,z)\, \vec{k}_x + v(t,z)\, \vec{k}_y + w(t,z)\, \vec{k}_z$$

les composantes de l'équation d'ondes élastiques sont

$$\begin{cases} \mu\, \partial^2_{zz} u - \rho\, \partial^2_{tt} u = 0 \\ \mu\, \partial^2_{zz} v - \rho\, \partial^2_{tt} v = 0 \\ (\lambda + 2\,\mu)\, \partial^2_{zz} w - \rho\, \partial^2_{tt} w = 0 \end{cases}$$

Ondes plane longitudinale et transverse

- La partie $u\,\vec{k}_x + v\,\vec{k}_y$ de $\vec{u}$ normale à la direction de déplacement de l'onde s'appelle une onde transverse ; sa vitesse de propagation est

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2\,(1+\nu)}}\,\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- La partie $w\,\vec{k}_z$ parallèle à la direction de déplacement de $\vec{u}$ s'appelle une onde plane longitudinale ; sa vitesse de propagation est

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\,\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}}\,\frac{1}{\sqrt{2\,(1+\nu)}}\,\sqrt{\frac{E}{\rho}} > c_t$$

Avec E, ν les module d'Young et coefficient de Poisson :

$$\lambda = \frac{\nu\,E}{(1-2\,\nu)(1+\nu)}\ ;\ \mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \iff E = \frac{\mu\,(3\,\lambda + 2\,\mu)}{\lambda+\mu}\ ;\ \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)}$$

Ondes plane longitudinale et transverse

- La mesure des vitesses de propagation longitudinale et transverse permet d'identifier les caractéristiques d'un matériau : pour ρ connu

$$E = \rho \, \frac{c_t^2 \, (3 \, c_l^2 - 4 \, c_t^2)}{c_l^2 - c_t^2} \; ; \; \nu = \frac{2 \, c_l^2 - ct^2}{2 \, (c_l^2 - c_t^2)}$$

- Cette séparation en deux type d'ondes (longitudinale et transverse) qui se propagent à des vitesses différentes, peut être étendue au delà du cas de l'onde plane [1].

1. qui a quand même l'inconvénient de ne pas exister autrement que comme approximation.

Décomposition de Helmholtz

- Le champ de vecteurs $\vec{u}$ peut être décomposé en ses parties gradiente et rotationnelle (décomposition de Helmholtz)

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}$$

où apparaissent les potentiel scalaire φ et potentiel vecteur $\vec{\Psi}$ du déplacement ; pour que ce dernier soit déterminé de façon unique lorsque $\vec{u}$ est connu, sa divergence peut être prise nulle

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} = 0$$

- Et donc, compte tenu que

$$\vec{\Delta}\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

l'injection de cette décomposion dans l'équation des ondes donne

$$\vec{\nabla}\left((\lambda + 2\,\mu)\,\Delta\varphi - \rho\,\partial^2_{tt}\varphi\right) + \vec{\nabla} \times \left(\mu\,\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} + \rho\,\partial^2_{tt}\vec{\Psi}\right) = \vec{0}$$

Ondes longitudinale et transverse

- Si le domaine dans lequel le déplacement est solution de

$$\vec{\nabla}\left((\lambda + 2\,\mu)\,\Delta\varphi - \rho\,\partial^2_{tt}\varphi\right) + \vec{\nabla}\times\left(\mu\,\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\Psi} + \rho\,\partial^2_{tt}\vec{\Psi}\right) = \vec{0}$$

est suffisamment grand pour être considéré comme infini, les parties gradiente et rotationnelle sont indépendantes l'une de l'autre. Ce qui permet de décomposer les ondes de vibration en deux parties.

- Les ondes longitudinales telles que $\vec{u}_L = \vec{\nabla}\phi$ où

$$(\lambda + 2\,\mu)\,\Delta\varphi - \rho\,\partial^2_{tt}\varphi = 0$$

- Les ondes transverses telles que $\vec{u}_T = \vec{\nabla}\times\vec{\Psi}$ où

$$\mu\,\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\Psi} + \rho\,\partial^2_{tt}\vec{\Psi} = \vec{0}\ \text{ avec }\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\Psi} = 0$$

soit encore

$$\mu\,\vec{\Delta}\vec{\Psi} - \rho\,\partial^2_{tt}\vec{\Psi} = \vec{0}\ \text{ puisque }\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\Psi} = 0$$

Ondes longitudinale et transverse

- Le cas de l'onde plane correspond à des potentiels

$$\varphi(t,z) \text{ et } \vec{\Psi} = \Psi_x(t,z)\ \vec{k}_x + \Psi_y(t,z)\ \vec{k}_y$$

et alors

$$u = -\partial_z\ \Psi_y\ ;\ v = \partial_z\ \Psi_x\ ;\ w = \partial_z \phi$$

qui sont bien solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu\ \partial^2_{zz} u - \rho\ \partial^2_{tt} u = 0 & ;\quad \mu\ \partial^2_{zz} v - \rho\ \partial^2_{tt} v = 0 \\ (\lambda + 2\ \mu)\ \partial^2_{zz} w - \rho\ \partial^2_{tt} w = 0 & \end{array} \right.$$

- La définition des ondes longitudinale et transverse à l'aide des potentiels de la décomposition d'Helmholtz coïncide avec celle faite à partir des ondes planes et elle est plus générale.

Dilatation et rotation

- Les dilatation D et rotation $\vec{\Omega}$ sont les champs divergences et rotationnel du déplacement

$$D = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \; ; \; \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

Les noms se justifient par le fait que $D = 0$ traduit le cas où le volume se conserve et $\vec{\Omega} = \vec{0}$ celui où il n'y a aucun mouvement de rotation.

- En prenant la divergence et le rotationnel de l'équation de Navier il vient

$$(\lambda + 2\,\mu)\,\Delta D - \partial^2_{tt} D = 0 \; ; \; \mu\,\vec{\Delta}\vec{\Omega} - \partial^2_{tt}\vec{\Omega} = \vec{0}$$

- Et d'autre part ces grandeurs sont reliées aux potentiels par

$$\Delta\varphi = D \; ; \; \vec{\Delta}\vec{\Psi} + \vec{\Omega} = \vec{0}$$

et donc les dénominations de « longitudinal » (pour ϕ) et « transverses » (pour $\vec{\Psi}$) peuvent être transformées en « compression » et « cisaillement ».

Rappel : solution générale de l'onde plane

- Qu'elle soit de compression ou de cisaillement, une onde plane est représentée par un champ $\chi(t, z)$ solution de

$$c^2 \; \partial^2_{zz}\chi - \partial^2_{tt}\chi = 0$$

sur un segment $z \in [z_0, z_1]$ et pour des temps $t \in [0, \infty[$

- La propriété essentielle est qu'alors

$$\chi(t, z) = f(z - c \; t) + g(z + c \; t)$$

où f et g sont des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconques (dérivables suffisamment cependant).

- Chacun des termes $f(z - c \; t)$ et $g(z + c \; t)$ sont appelés des ondes progressives : le premier déplace la forme de base f dans la direction des z croissant et à la vitesse c et le second fait de même pour g mais dans le sens des z décroissants.

Méthode de recherche de solutions périodiques

- Les solutions de l'équation d'onde peuvent être trouvées par superposition de solutions élémentaires de la forme

$$\chi = \Re\left\{\underline{\chi}\ \exp^{i\,(k\ z-\omega\ t)}\right\}$$

où k s'appelle le nombre d'onde et ω la pulsation et où

$$\Re\{a + i\ b\} = a \text{ si } i^2 = -1 \text{ et } a, b \in \mathbb{R}$$

- L'injection de cette forme dans $c^2\ \partial^2_{zz}\chi - \partial^2_{tt}\chi = 0$ conduit à

$$\Re\left\{-(c^2\ k^2 - \omega^2)\ \exp^{i\,(k\ z-\omega\ t)}\right\} = 0$$

soit donc puisque cela doit être vrai pour $\exp^{i\,(k\ z-\omega\ t)}$ parcourant le cercle unité

$$c^2\ k^2 - \omega^2 = 0$$

qui s'appelle une relation de dispersion (les deux valeurs de k correspondent aux deux sens de propagation).

Vitesse de phase

- Pour une onde de la forme $\chi = \Re\left\{\underline{\chi}\ \exp^{i\,(k\ z - \omega\ t)}\right\}$ on appelle vitesse de phase le rapport :

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} \quad \left(= \frac{z}{t}\right)$$

- dans le cas de l'équation d'onde $c^2 \partial_{xx}\chi - \partial_{tt}\chi = 0$ la relation de dispersion est

$$c^2\ k^2 - \omega^2 = 0 \text{ et donc } c_\phi = c$$

La vitesse de phase ne dépend que des propriétés du milieu élastique (par c).

- Une onde de forme quelconque

$$u(t,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Re\left\{\underline{\chi}(k)\ \exp^{i\ k\ (z - c_\phi\ t)}\right\}\ dk$$

est telle que

$$\forall T\ :\ u(z + c_\phi T, t + T) = u(z,t)$$

elle ne change pas de forme.

Dispersion

- Au contraire l'équation de Klein-Gordon par exemple (dont l'origine est compliquée)

$$c^2\partial_{xx}\chi - \frac{1}{\tau^2}\,\chi - \partial_{tt}\chi = 0$$

conduit à l'équation de dispersion :

$$-c^2\,k^2 - \frac{1}{\tau^2} + \omega^2 = 0$$

et donc à une vitesse de phase :

$$c_\phi = c\,\sqrt{1 + \frac{1}{c^2\,k^2\,\tau^2}}$$

qui dépend du matériau par c et τ mais également de la forme de l'onde par k.

Dispersion

- L'onde de forme quelconque

$$u(t,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Re\left\{ \underline{\chi}(k)\ \exp^{i\ k\ (z-c_\phi\ t)} \right\}\ dk$$

n'est plus telle que

$$\forall T\ :\ u(z + c_\phi T, t + T) = u(z,t)$$

déjà parce que puisque c_ϕ dépendant de k, on ne sait pas trop bien quelle valeur de c_ϕ mettre dans l'expression.

- Les ondes solution de l'équation de Klein-Gordon sont qualifiées de dispersives parce que leur forme ne se conserve pas dans la propagation.
Deux de leurs composantes qui correspondent à des nombres d'ondes différents se déplacent à des vitesses différentes.

Le système d'ordre 1 de l'onde plane

- Une équation d'onde issue d'un problème physique est la synthèse d'un système doublant le nombre de variables mais ramenant l'ordre des dérivations à l'unité.

- Pour les ondes élastiques plane ce système les variables sont les contrainte σ et vitesse de déformation v, soit

$$v = \partial_t \chi \; ; \; \sigma = \beta \, \partial_z \chi$$

où $\beta = \mu$ ou $(\lambda + 2\,\mu)$ et $\chi = u$ ou w suivant que l'onde est transverse ou longitudinale ; d'où

$$c^2 \, \partial_z \sigma = \beta \, \partial_t v \; ; \; \beta \, \partial_z v = \partial_t \sigma$$

- Si le passage à l'équation de Navier en éliminant le tenseur des contraintes par la loi de Hooke n'avait pas été fait, c'est directement ce système qui aurait pu être obtenu.

Puissance transportée par l'onde en milieu semi-infini

- Considérons le cas de la condition aux limites

$$\sigma(t, z = 0) = F(t)/S$$

qui est le rapport d'une force F prescrite par la surface S de la section du milieu élastique où se propage l'onde.

- La puissance que doit fournir le dispositif qui crée la force F est

$$P = -F(t)\, v(t, z = 0)$$

- D'autre part si le milieu est infini dans la direction des z croissant à partir de l'origine, la solution est de la forme

$$\sigma(t, z) = \frac{1}{S} F\left(t - \frac{z}{c}\right) \;;\; v(t, z) = -\frac{c}{S\,\beta}\, F\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

- D'où

$$P(t) = c\, \frac{F(t)^2}{S\,\beta}$$

Puissance transportée par l'onde en milieu semi-infini

▶ Si le milieu n'est considéré qu'à partir de la position z_0 et qu'à cette position on cherche un dispositif qui a le même effet que le dispositif en $z = 0$ suivi d'une longueur de milieu $[0, z_0]$, alors ce dispositif devra créer la contrainte

$F\left(t - \dfrac{z_0}{C}\right)/S$ et délivrer la puissance $P\left(t - \dfrac{z_0}{c}\right) = c\,\dfrac{F(t - z_0/c)^2}{S\,\beta}$

▶ L'onde évacue donc continument de l'énergie avec le taux $P(t)$ de puis l'origine ou $P(t - z_0/c)$ depuis un position z_0.

▶ En particulier, pour le dispositif créant la force F, le milieu élastique est indiscernable d'une dissipation visqueuse pour laquelle la force F serait de la forme

$$F = \frac{S\,\beta}{c}\,v$$

Onde plane en milieu fini

- La situation est différente en milieu fini $z \in [z_0, z_1]$ avec $z_1 < \infty$; et cela parce que les solutions $f(t - z/c)$ et $g(t + z/c)$ co-existent.

- La description de cette situation nécessite de spécifier la condition aux limites en $z = z_1$ et il y aura des phénomènes de réflexion de l'onde qui présentent la plus grande analogie avec les phénomènes identiques pour les ondes électromagnétiques.

- Toutefois, bien qu'il y ait des applications utiles possibles à l'étude de la réflexion (et transmission) d'ondes élastiques planes[2], l'étude va maintenant être limité au régime harmonique afin de traiter les problèmes de vibrations.

2. par exemple de placer une vraie force de viscosité à l'extrémité z_1 du milieu pour éliminer la réflexion et créer ainsi un dispositif capable de transmettre à distance un effet visqueux.

Le régime harmonique

- Le système
$$\partial_z \, \sigma = \rho \, \partial_t v \; ; \; \beta \, \partial_z \, v = \partial_t \sigma$$
est traité dans le cas d'un milieu fini $z \in [0, L]$ avec $L < \infty$.

- Les conditions aux limites sont
$$v(t, z = 0) = v_0(t) \; ; \; v(t, z = L) = 0$$
soit une vitesse prescrite en $z = 0$ (pour laquelle, une force par unité de surface $\sigma(t, z = 0)$ devra être créée) et une vitesse nulle en $z = L$ (assurée par un déplacement nul). De plus la vitesse prescrite est de la forme
$$v_0(t) = \Re\{\underline{V}_0 \; \exp^{i \, \omega \, t}\}$$
où ω est une pulsation donnée et $\underline{V}_0$ une amplitude complexe qui va être choisie réelle (c'est un choix de l'origine des temps)
$$\underline{V}_0 = V_0$$

Le régime harmonique

- Une solution est cherchée dans le cas du régime harmonique, soit

$$\sigma = \Re\{\underline{\sigma}(z)\ \exp^{i\ \omega\ t}\}\ ;\ v = \Re\{\underline{V}(z)\ \exp^{i\ \omega\ t}\}$$

- Cette solution est

$$\begin{cases} \underline{V}(z) = V_0\ \left(\cos\left(2\pi\ z/\lambda\right) - \dfrac{\cos\left(2\pi\ L/\lambda\right)}{\sin\left(2\pi\ L/\lambda\right)}\sin\left(2\pi\ z/\lambda\right)\right) \\ \\ \underline{\sigma}(z) = V_0\ i\ \sqrt{\beta\ \rho}\ \left(\sin\left(2\pi\ z/\lambda\right) + \dfrac{\cos\left(2\pi\ L/\lambda\right)}{\sin\left(2\pi\ L/\lambda\right)}\cos\left(2\pi\ z/\lambda\right)\right) \end{cases}$$

avec

$$\lambda = 2\ \pi\frac{c}{\omega}$$

et donc la force par unité de surface en $z = 0$ capable de créer la vitesse $V_0\ \cos\left(\omega\ t\right)$ en $z = 0$ est

$$F/S = \Re\{\underline{\sigma}(0)\ \exp^{i\ \omega\ t}\} = -V_0\ \sqrt{\beta\ \rho}\ \frac{\cos\left(2\pi\ L/\lambda\right)}{\sin\left(2\pi\ L/\lambda\right)}\ \sin\left(\omega\ t\right)$$

La résonance

- Cette expression

$$F/S = -V_0\ \sqrt{\beta\ \rho}\ \frac{\cos(2\pi\ L/\lambda)}{\sin(2\pi\ L/\lambda)}\ \sin(\omega\ t)$$

montre que si

$$L = n\ \lambda/2 \text{ Pour } n \in \mathbb{Z}$$

alors il faudrait une force infinie pour créer la vitesse $V_0\ \cos(\omega\ t)$ et entretenir l'onde associée ; ce dont personne ne dispose.

- Inversement si $L = \left(\frac{1}{2} + n\right)\ \lambda/2$ pour $n \in \mathbb{Z}$ il suffit d'une force nulle pour que la vitesse $V_0\ \cos(\omega\ t)$ et l'onde associée existent ; il est donc probable que qu'elles existent alors même qu'on ne sait pas quelle est la force initiale qui les a engendrées.

- C'est la situation de résonance.

Les modes de vibration

- Si le problème $\partial_z \underline{\sigma} = i \, \rho \, \omega \, \underline{V}$; $\beta \, \partial_z \, \underline{V} = i \, \omega \, \underline{\sigma}$ est repris avec les conditions aux limites homogènes [3]

$$\underline{V}(t, z = 0) = \underline{V}(t, z = L) = 0$$

les solutions possibles sont alors

$$\text{pour } L \neq n \, \pi \, \lambda \text{ où } n \in \mathbb{Z} \ : \ \underline{V}(z) = 0 \ ; \ \underline{\sigma}(z) = 0$$

et sinon

$$\underline{V}(z) = \underline{V}_0 \sin\left(2\pi \ z/\lambda\right) ; \ \underline{\sigma}(z) = -i \ \sqrt{\beta \ \rho} \ \underline{V}_0 \cos\left(2\pi \ z/\lambda\right) \text{ sinon}$$

c'est le premier mode de résonance d'un milieu de longueur L qui a lieu pour une pulsation $\omega = \frac{\pi \, c}{L}$. Il y a également d'autres modes de résonance qui ont lieu pour les pulsations $\omega = \frac{n \, \pi \, c}{L}$ et qui ont pour forme les harmoniques $\sin\left(n \, \pi \, \frac{z}{L}\right)$

3. différentes donc de celles du problème précédent et donc les conditions de résonance sont différentes, ici elle sont même inversées

La résonance et les valeurs et vecteurs propres de d^2/dx^2

- Le cas monodimensionnel d'un milieu unidirectionnel dont les extrémités sont fixes (vitesses nulle) peut être traité de façon plus générique en reprenant l'équation des ondes et les conditions aux limites comme

$$c^2\ \partial^2_{zz}\chi - \partial^2_{tt}\chi \ \text{ avec } \chi(t, z=0) = \chi(t, z=L) = 0$$

en cherchant une solution harmonique $\chi(t,z) = \Re\{\underline{\chi}(z)\ \exp^{i\ \omega\ t}\}$ qui sera donc solution de

$$\frac{d^2\underline{\chi}}{dz^2} + k^2\ \underline{\chi} = 0 \text{ avec } \underline{\chi}(t, z=0) = \underline{\chi}(t, z=L) = 0 \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right)$$

- Cette recherche est celle des valeurs propres $-k^2$ de l'opérateur $\frac{d^2\underline{\chi}}{dz^2}$ dans l'espace des fonctions nulles en $z=0$ et $z=L$; les vecteurs propres sont appelés les modes de vibration.

Les vibrations résonnantes dans les structures élastiques

- L'intérêt de l'interprétation de la recherche des modes de vibration comme vecteurs propres d'opérateurs est qu'elle se transporte aux cas bi et tridimensionnel.

- Géométriquement le plus simple serait *a priori* de considérer le cas des plaques bidimensionnelles mais le processus de moyenne sur l'épaisseur conduit à un opérateur bi-laplacien (laplacien de laplacien) qui nécessite une analyse fine des conditions aux limites.

- Aussi pour éviter à la fois le 3D vrai et un opérateur trop complexe, va-t-on se limiter au cas des membranes pour lesquels le déplacement transverse w est solution de

$$c^2\,\Delta w - \partial_{tt} w = 0 \text{ pour } 0 < x < L\,;\ 0 < y < l$$

où c dépend de la tension τ (en N/m) exercée sur la membrane et de sa densité surfacique (en kg/m^2) comme

$$c = \sqrt{\tau/\rho_s}$$

Les vibrations résonnantes dans les membranes

- On cherche les modes de vibrations transverses dans la direction $\vec{k}_z$ d'un domaine bi-dimensionnel rectangulaire

$$D = \{\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \ \text{ avec } 0 < x < L\ ;\ 0 < y < l\}$$

fixé en $x = 0$, $x = L$, $y = 0$ et $y = L$

- Le champ de déplacement se réduit à

$$\vec{u} = w(t, x, y)\ \vec{k}_z$$

où w est solution de

$$c^2\ \Delta w - \partial_{tt} w = 0 \text{ pour } 0 < x < L\ ;\ 0 < y < l$$

avec

$$w(t, x = 0, y) = w(t, x, y = 0) = w(t, x = L, y) = w(t, x, y = l) = 0$$

- On pose

$$w(t, x, y) = \Re\{\underline{w}(x, y)\ \exp^{i\ \omega\ t}\}$$

Les vibrations résonnantes dans les membranes

- d'où pour $k^2 = \omega^2/c^2$

$$\begin{array}{ll} & \Delta \underline{w} + k^2 \ \ \underline{w} = 0 \\ \text{avec} & \underline{w}(x=0,y) = \underline{w}(x,y=0) = \underline{w}(x=L,y) = \underline{w}(x,y=l) = 0 \end{array}$$

- Les valeurs propres $-\eta$ négatives de l'opérateur Δ sur l'espace des champs w définies sur le domaine D et à valeurs nulles sur ∂D déterminent les pulsations propres de vibration

$$\omega = c\,\sqrt{\eta} = \frac{\tau}{\rho_s}\,\sqrt{\eta}$$

et les vecteurs propres associées $\underline{w}_\eta$ telle que

$$\begin{array}{ll} & \Delta \underline{w}_\eta + k^2 \ \ \underline{w}_\eta = 0 \\ \text{avec} & \underline{w}_\eta(x=0,y) = \underline{w}_\eta(x,y=0) = \underline{w}_\eta(x=L,y) = \underline{w}_\eta(x,y=l) = 0 \end{array}$$

permettent la reconstruction des $w_\eta = \Re\{\underline{w}_\eta \ \exp^{i\,\omega\,t}\}$ qui sont les formes que prennent les vibrations, i.e., les modes de vibration.

- Pour le problème de la plaque plane, les modes de vibration sont

$$\underline{w} = \sin\left(\pi\,\frac{n\,x}{L}\right)\ \sin\left(\pi\,\frac{p\,y}{l}\right) \text{ associé aux VP } -k^2 = -\left(\frac{n}{L}\right)^2 - \left(\frac{p}{l}\right)^2$$

Les vibrations résonnantes dans les structures élastiques

- Ainsi les pulsations de résonance sont

$$\omega = c\sqrt{\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}$$

- Cela s'appelle de l'analyse vibratoire et pour les membranes cela permet de déterminer les sons qu'elles peuvent émettre.

- Si on reprenait une plaque (avec l'opérateur bi-laplacien) la méthode serait la même ; et la recherche des fréquences et modes propres a un grand intérêt pour la fabrication mécanique.

- Tout objet élastique possède une gamme de modes de vibrations. Si ceux-ci ne sont pas excités et ce n'est donc pas gênant. Mais si l'objet est soumis à une excitation continue de pulsation qui correspond à une pulsation propre alors l'énergie de l'excitation s'accumule. L'excitation peut être petite les effets cumulatifs importants (l'exemple classique est le pont de Tacoma).

Exercice : Onde de Rayleigh

- Dans l'hypothèse bi-dimensionnelle d'un déplacement

$$\vec{u} = u(t,x,z)\ \vec{k}_x + w(t,x,z)\ \vec{k}_z$$

dans un milieu élastique semi-infini $D = x\ \vec{k}_x + z\ \vec{k}_z$ avec $z > 0$, on propose d'étudier les ondes de la forme

$$u = \Re\{\underline{U}\ \exp^{-z/\delta}\ \exp^{i\ k\ (x-c\ t)}\}\ ;\ w = \Re\{\underline{W}\ \exp^{-z/\delta}\ \exp^{i\ k\ (x-c\ t)}\}$$

où k, c et δ sont des paramètres à trouver pour que l'équation de Navier ainsi que la condition aux limites de contrainte nulle en $z = 0$ soient satisfaites.
Ce sont des ondes de surface dans la mesure où elles disparaissent dès que z est plus grand que quelques δ de part le terme $\exp^{-z/\delta}$.

Exercice : Vibrations transverses de membranes

- Une membrane rectangulaire est maintenue seulement par deux de ses côtés opposés ; la condition aux limites qui correspond aux deux autres côtés est

$$\partial_n w = 0$$

- Déterminer les modes et fréquences de résonnance.

- Même question pour la membrane d'un disque maintenu par sa périphérie [4].

4. la solution de l'équation différentielle est à chercher dans les fonctions de Bessel