Équations macroscopiques de la physique classique

Compléments en mécanique des fluides

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

20 septembre 2018

Objectifs

- L'équation de Navier-Stokes de la leçon 3 a été présentée sans introduire le concept de tenseur d'ordre 2 ; lequel n'a été introduit qu'à la leçon 3 sur l'élasticité. On reprend ici une présentation plus synthétique où le fluide est défini comme un milieu où le tenseur des contraintes dépend du tenseur des vitesses de déformation ;

- On profite de cet objectif pour fournir la notation en indice des tenseurs cartésiens ;

- Les écoulement compressibles (avec l'équation des ondes sonores comme dénotation) ainsi que les problèmes de frontière libre et diphasiques sont évoqués.

- Et finalement la formulation en vorticité et fonction de courant est expliquée.

Définitions formelles

- La position dans l'espace E_3 est repérée par

$$\vec{x} = x_1 \ \vec{k}_1 + x_2 \ \vec{k}_2 + x_3 \ \vec{k}_3$$

où $(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$ est une base orthonormée et (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées de $\vec{x}$.

- Comme c'est long à écrire, on utilise la convention de sommation des indices répétés

$$\vec{x} = x_i \ \vec{k}_i$$

- Le gradient d'un champ de scalaires $\phi \ : \ E_3 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ est

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \ \vec{k}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \ \vec{k}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \ \vec{k}_3$$

qu'on abrège avec cette même convention en

$$\vec{\nabla}\phi = \phi_{,i} \ \vec{k}_i$$

en convenant de plus que $\phi_{,i} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$

Définitions formelles

- Toujours avec la convention de sommation des indices répétés, un champ de vecteurs $\vec{v} \; : \; E_3 \longrightarrow E_3$ s'écrit

$$\vec{v} = v_i \, \vec{k}_i$$

- Son gradient est un tenseur d'ordre 2 de composantes

$$\left(\vec{\nabla}\vec{v}\right)_{ij} = v_{i,j} \quad \left(= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

- Sa divergence la trace de $\vec{\nabla}\vec{v}$ soit $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = v_{i,i}$
- Son rotationnel est un champ de vecteurs dont les composantes sont formées par la partie antisymétrique de $\vec{\nabla} V$ comme

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)_i = \epsilon_{ijk} v_{k,j}$$

où (ϵ est le symbole de Levi-civita)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,2,1)\} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\} \\ 0 & \text{sinon, i.e deux au moins des indices sont égaux} \end{cases}$$

Définition formelles

- Par sa définition $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$ et $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ et on a la formule

$$\epsilon_{ijk}\ \epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\ \delta_{km} - \delta_{jm}\ \delta_{kl}$$

- Ces notations permettent de retrouver simplement des formules d'analyse vectorielles

$$\vec{\nabla} \cdot (\lambda\ \vec{v}) = \lambda\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla}\lambda \cdot \vec{v} \Longleftrightarrow (\lambda\ v_i)_{,i} = \lambda\ v_{i,i} + \lambda_{,i}\ v_i$$
$$\vec{\nabla} \times (\lambda\ \vec{v}) = \lambda\ \vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla}\lambda \times \vec{v} \Longleftrightarrow \epsilon_{ijk}(\lambda\ v_k)_{,j} = \lambda\ \epsilon_{ijk} v_{k,j} + \epsilon_{ijk}\lambda_{,j}\ v_k$$
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) - \vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \left(\epsilon_{ijk} v_j\ u_k\right)_{,i} = u_k\ \epsilon_{kij}\ v_{j,i} - v_j\ \epsilon_{jik} v_j\ u_{k,i}$$
$$\ldots$$

- Mais surtout elle permettent de manipuler des expressions qui ne se réduisent pas à des expressions ne comportant que des champs de vecteurs, par exemple

$$\left(\vec{\nabla}\,(\vec{u} \cdot \vec{v})\right)_i = (u_j\ v_j)_{,i} = u_{j,i}\ v_j + v_{j,i}\ u_j$$

Tenseur des vitesses de déformation

- Un milieu continu occupe un domaine D de l'espace, la vitesse eulérienne est

$$\begin{array}{rcccl} \vec{v} & : & \mathbb{R} \times D & \longrightarrow & E_3(m/s) \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{v} = v_i \, \vec{k}_i \end{array}$$

- Le tenseur des vitesses de déformations est le tenseur de composantes

$$D_{ij} = \frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2}$$

- C'est le tenseur des (petites) déformations de l'élasticité pour un déplacement de $\delta t \vec{v}$ et rapporté à l'intervalle de temps δ.

- Et donc il en hérite de toutes les propriétés : notamment celle de spécifier la déformation.

Les Fluides

- Un fluide est un milieu continu dans lequel le tenseur des contraintes σ ne dépend que du tenseur des vitesses de déformation et cela uniquement de façon isotrope. Soit donc $\exists$ 9 fonctions F_{ij} telles que

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{31}, D_{32}, D_{33})$$

et ces fonctions ont pour propriétés que dans un changement de base orthogonal tel que les nouveaux tenseurs de contraintes et déformation soit (Q est la matrice orthogonale de changement de base)

$$\sigma'_{ij} = Q_{im}\,\sigma_{mn}\,Q_{in}\ ;\ D'_{ij} = Q_{im}\,D_{mn}\,Q_{in}$$

alors on a encore

$$\sigma'_{ij} = F_{ij}(D'_{11}, D'_{12}, D'_{13}, D'_{21}, D'_{22}, D'_{23}, D'_{31}, D'_{32}, D'_{33})$$

- C'est une contrainte très forte.

Les Fluides

- La seule relation compatible avec la définition donnée du fluide est

$$\sigma_{ij} = -P\ \delta_{ij} + f_1\ D_{ij} + f_2\ D_{ik}\ D_{kj} \Longleftrightarrow \sigma = f_0\ I + f_1\ D + f_2\ D^2$$

- où f_0, f_1 et f_2 dépendent des D_{ij} mais seulement par les invariants de la matrice qu'ils forment : le 1° est la trace D_{ii}, le 2° $D_{11}\ D_{22} + D_{22}\ D_{33} + D_{33}\ D_{11} - D_{12}^2 - D_{23}^2 - D_{31}^2$, et le 3° le déterminant $\epsilon_{ijk} D_{1i}\ D_{2j}\ D_{3k}$.

- La rhéologie des fluides est la discipline qui s'intéresse à la recherche des f_0, f_1, f_2 des fluides réels. Et les fluides peuvent présenter une palette de comportement très étendue.

- Les fluides pour lesquel la relation entre σ et D est affine sont appelé des fluide snewtonien (et les autres non-newtoniens).

Fluides Newtoniens

- La loi de comportement des fluides newtoniens s'écrit

$$\sigma_{ij} = (\lambda \; D_{kk} - P) \; \delta_{ij} + 2 \; \mu \; D_{ij}$$

où P est la pression hydrostatique ; μ la viscosité dynamique et λ le second coefficient de viscosité.

- Si le fluide est incompressible, alors $D_{kk} = 0 \iff v_{i,i} = 0$ et la donnée de

$$\sigma_{ij} = -P \; \delta_{ij} + 2 \; \mu \; D_{ij}$$

est suffisante pour déterminer l'équation d'évolution de la vitesse en volume.

- S'il ne l'est pas, il faut fournir une loi d'état entre pression P, densité de masse ρ et température T (typiquement pour un gaz la loi des gaz parfait).

Équation de Navier Stokes en incompressible

- La densité de forces fournie par le tenseur des contraintes est

$f_i = \sigma_{ij,j} = -P_{,j}\ \delta_{ij} + 2\ \mu\ D_{ij,j} = -P_{,i} + \mu\ (v_{i,jj} + v_{j,ij}) = -P_{,i} + \mu\ v_{i,jj}$

(l'incompressibilité fournit $v_{j,j} = 0$)

- Cette densité de force s'équilibre avec la force d'inertie

$$\rho\ \left(\partial \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}\ \vec{v}\right)_i = \rho\ (\partial_t v_i + v_{i,j}\ v_j)$$

- D'où

$$\rho\ (\partial_t v_i + v_{i,j}\ v_j) = -P_{,i} + \mu\ v_{i,jj}$$

soit

$$\rho\ \left(\partial_t \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}\ \vec{v}\right) + \vec{\nabla} P = \mu\ \vec{\Delta} \vec{v}$$

qui est l'équation de Navier-Stokes (sans source) obtenue leçon 3.

Équation de Navier-Stokes dans un gaz parfait

- La densité de forces fournie par le tenseur des contraintes est

$$f_i = \sigma_{ij,j} = \lambda \; D_{kk,i} - P_{,i} + 2 \; \mu \; D_{ij,j} = \lambda \; v_{k,ki} - P_{,i} + \mu \; (v_{i,jj} + v_{j,ij})$$

- La force d'inertie est encore (même si ρ varie, cf. leçon 3)

$$\rho \; \left(\partial \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v} \; \vec{v} \right)_i = \rho \; (\partial_t v_i + v_{i,j} \; v_j)$$

- Et donc l'équilibre s'écrit

$$\rho \; (\partial_t v_i + v_{i,j} \; v_j) = \lambda \; v_{k,ki} - P_{,i} + \mu \; (v_{i,jj} + v_{j,ij})$$

- L'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\partial_t \rho + (\rho \; v_i)_{,i} = 0$$

- Et la loi d'état, où m est la masse molaire du gaz, doit être ajoutée

$$P = \rho \, \frac{RT}{m}$$

($PV = n \; RT \longrightarrow P = n/V \; RT$: n/V est le nombre de mole par unité de volume et donc $\rho = m \; n/V$)

Équation de Navier-Stokes dans un gaz parfait

- Le jeu d'équations est donc *a priori*

$$\begin{cases} \rho\ (\partial_t v_i + v_{i,j}\ v_j) = \lambda\ v_{k,ki} - P_{,i} + \mu\ (v_{i,jj} + v_{j,ij}) \\ \partial_t \rho + (\rho\ v_i)_{,i} = 0 \\ P = \rho\, RT/m \end{cases}$$

- Mais la température n'est probablement pas constante : chaque partie du domaine D n'est pas en contact avec un thermostat. L'hypothèse duale est que les parties n'échangent pas de chaleur entre elles. Dans ce cas, ce n'est pas la loi des gaz parfaits qui doit être utilisée mais la relation adiabatique entre pression et volume

$$P\ V^\gamma = \text{Constante} \;\; \text{où } \gamma = C_P/C_v \Longrightarrow P = K\ \rho^\gamma$$

où K est une constante.

- On voit donc que les problèmes de mécanique des fluides compressibles peuvent devenir très volumineux.

Onde sonore de faible amplitude

- Si le milieu est immobile, à température constante T_0 et en l'absence de gravité qui créerait un gradient de masse volumique, on obtient que

$$v_i = 0 \ ; \ \rho = \rho_0 \ ; \ P = P_0 = K \ \rho_0^\gamma \ ; \ P_0 = \rho_0 \frac{RT_0}{m}$$

est solution des équations précédentes.

- On cherche une solution de la forme

$$v_i = 0 + \delta v_i \ ; \ \rho = \rho_0 + \delta\rho \ ; \ P = P_0 + \delta P$$

où les termes en δ seraient petits. On obtient déjà que

$$\delta P = \gamma \ \frac{P_0}{\rho_0} \ \delta\rho = \gamma \ \frac{RT_0}{m} \ \delta\rho$$

on pose

$$c = \sqrt{\gamma \ \frac{RT_0}{m}}$$

Onde sonore de faible amplitude

- Les équations exprimées à l'ordre 1 en fonction de δP et $\delta\rho$ sont

$$\begin{cases} \rho_0 \ (\partial_t \delta v_i) = \lambda \ \delta v_{k,ki} - \delta P_{,i} + \mu \ (\delta v_{i,jj} + \delta v_{j,ij}) \\ \\ \partial_t \delta P + c^2 \ (\rho_0 \ \delta v_i)_{,i} = 0 \end{cases}$$

- Dans le cas où les coefficients de viscosité λ et μ sont nuls, il est possible d'éliminer la vitesse pour obtenir

$$\partial^2_{tt} \delta P - c^2 \ \delta P_{,ii} = 0 \Longrightarrow \partial^2_{tt} \delta P - c^2 \ \Delta \delta P = 0$$

C'est l'équation de propagation du son (dans un gaz parfait) ; et donc $c = \sqrt{\gamma \ R \ T_0/m}$ est la vitesse du son.

- On voit que lever l'hypothèse de viscosité nulle rend l'analyse du son bien plus difficile. Mais rien que la prise en compte d'un mouvement dans l'écoulement de base ou d'une masse volumique variable sous l'effet de gravité est déjà relativement difficile.

Équation d'équilibre sur la surface

- En revenant au cas des fluides incompressibles dans un domaine D pour lesquels

$$\sigma_{ij} = -P\ \delta_{ij} + 2\ \mu\ D_{ij} \quad ; \quad D_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \quad ; \quad D_{ii} = v_{i,i} = 0$$

L'équilibre entre force d'inertie et divergence du tenseur des contraintes $\rho\ (\partial_t v_i + v_{i,j}\ v_j) = \sigma_{ij,j}$ fournit l'équation de Navier-Stokes

$$\rho\ (\partial_t v_i + v_{i,j}\ v_j) = -P_{,i} + \mu\ v_{i,jj} \text{ dans } D$$

valable en volume.

- Mais de plus l'équilibre doit être réalisé sur le bord ∂D de D et donc, si le champ de normale extérieur est $\vec{n} = n_j\ \vec{k}_j$ et que $\vec{f}^{\partial} = f_i^{\partial}\ \vec{k}_i$ est la densité de force surfacique appliquée au fluide depuis l'extérieur, alors

$$\sigma_{ij}\ n_j + f_i^{\partial} = 0 \text{ sur } \partial D$$

Contact entre deux fluides

- L'équation d'équilibre sur la surface permet le calcul de $\vec{f}^{\partial}$ sur les parties ∂D_c de ∂D où les conditions sont celle de l'imperméabilité et du non-glissement, soit

$$\vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \partial D_c$$

- Mais elle permet également de traiter le cas du contact entre deux fluides de viscosité et masse volumique différentes.

- Si le domaine D est en contact par ∂D_c avec un domaine D' contenant un fluide de masse volumique ρ' et de viscosité μ' animé d'un mouvement de vitesse $\vec{v}'$ correspondant au tenseur de contrainte σ'_{ij} alors les forces surfaciques dues à l'un des fluides et agissant sur l'autre se compensent et donc

$$\sigma_{ij}\, n_j = \sigma'_{ij}\, n_j \text{ sur } \partial D_c$$

Surface libre sans tension superficielle

▶ Si le fluide du domaine D' est un gaz alors que celui du domaine D est un liquide, la viscosité des gaz étant négligeable devant celle des liquides, la vitesse dans le gaz n'est pas importante et seule compte sa pression P_0 ; la condition de bord se réduit à

$$-P\ n_i + \mu\,(v_{i,j} + v_{j,i})\ n_j = -P_0\ n_i \text{ sur } \partial D_c$$

Cette condition contient trois équations scalaires pour $i = 1, 2, 3$.
▶ Si la frontière ne varie pas dans le temps il faut lui adjoindre la condition d'imperméabilité $v_i\ n_i = 0$ et le total des 4 conditions permet alors le calcul de la position de la frontière.

▶ Si elle varie dans le temps alors le domaine D également et le problème du calcul du champ de vitesse se fait dans un domaine variable, ce qui peut être compliqué.

Tension superficielle

- La tension superficielle est le phénomène qui fait qu'une petite goutte posée sur un plan horizontal ne s'étale pas.

- Ses effets peuvent être pris en compte en considérant qu'à toute surface séparant deux milieux (quels qu'ils soient solide, gaz ou liquide) est associée une énergie de la forme $E_s = \gamma\ S$ où γ est le coefficient de tension superficielle caractéristique des deux milieux qui séparent la surface Γ d'aire S.

- Un calcul montre alors que la densité de force due à la tension superficielle est

$$\vec{f_s} = \gamma\ C\ \vec{n}$$

où C est la somme des courbures principales de la surface (le double de la courbure moyenne) et où $\vec{n}$ est orienté dans le sens de la Et donc la condition d'interface entre deux milieux s'écrit (loi de Laplace)

$$\sigma_{ij}\ n_j = \sigma'_{ij}\ n_j + \gamma\ C\ n_i \text{ sur } \partial D_c$$

Vorticité et fonction de courant

- Si un fluide est incompressible et qu'il est bordé par des frontières imperméables d'un domaine D, alors sa vitesse $\vec{v}$ est telle que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \text{ dans } D \text{ ; } \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

Si le domaine est simplement connexe (sans boucles ni trous), cette vitesse admet une paramétrisation

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \text{ avec } \vec{\psi} \times \vec{n} = \vec{0}$$

$\vec{\psi}$ est un potentiel vecteur de $\vec{v}$ qui est appelé la fonction de courant.

- D'autre part le rotationnel de la vitesse

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

est appelé la vorticité.

- Ces deux variables $\vec{\psi}$ et $\vec{\Omega}$ peuvent être utilisées plutôt que $\vec{v}$ et P pour la calcul de l'écoulement dans le domaine D.

Formulation en vorticité et fonction de courant

- La première relation entre vorticité et fonction de courant est

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = \vec{\Omega}$$

- Compte tenu que

$$\vec{\nabla} \vec{v} \vec{v} = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} \text{ et } \vec{\Delta} \vec{v} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\rho \, \left(\partial_t \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} \right) + \vec{\nabla} P = -\mu \, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{f}$$

soit encore, après en avoir pris le rotationnel

$$\rho \, \left(\partial_t \vec{\Omega} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{\Omega} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) \right) \right) = -\mu \, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Omega} + \vec{\nabla} \times \vec{f}$$

Cas du non-glissement aux parois

- Si de plus il y a non-glissement aux parois

$$\vec{v} \times \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \partial D$$

la formulation en vorticité et fonction de courant $(\vec{\Omega}/\vec{\psi})$ s'écrit alors

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = \vec{\Omega} \\ \rho \left(\partial_t \vec{\Omega} + \vec{\nabla} \times \left(\vec{\Omega} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) \right) \right) = -\mu \, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Omega} + \vec{\nabla} \times \vec{f} \end{array} \right\} \text{ dans } D$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\psi} \times \vec{n} = \vec{0} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) \times \vec{n} = \vec{0} \end{array} \right\} \text{ sur } D$$

Elle permet le calcul de $\vec{\Omega}$ et $\vec{\psi}$ à partir desquel on retrouve $\vec{v}$ et P (en cas de besoin) par

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$$

et

$$\vec{\nabla} P = -\mu \, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{f} - \rho \left(\partial_t \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} \right)$$

Vorticité et fonction de courant pour un écoulement bidimensionnel

- Un écoulement bidimensionnel est tel que

$$\vec{v} = v_x(x, y)\ \vec{k}_x + v_y\ \vec{k}_y(x, y)$$

Dans ce cas les vorticité et fonction de courant prennent la forme simple de

$$\vec{\psi} = \psi(x, y)\ \vec{k}_z\ ;\ \vec{\Omega} = \Omega(x, y)\ \vec{k}_z$$

et le problème du transparent précédent devient

$$\begin{array}{lll} \Delta\psi = \Omega & \text{dans} & D \\ \rho\left(\partial_t\Omega + \left((\vec{\nabla}\Omega) \times (\vec{\nabla}\psi)\right) \cdot \vec{k}_z\right) = \mu\ \Delta\Omega + \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) \cdot \vec{k}_z & - & D \\ \psi = 0 & \text{sur} & \partial D \\ \partial_n\psi = 0 & - & \partial D \end{array}$$

Il ne dépend alors que des deux variables scalaires Ω et ψ.

Exercice : gymnastique

- montrer que si $\vec{d}$ est un vecteur constant,

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{d} \times \vec{x}\right) = 2\,\vec{d}$$

que

$$\Delta\left(\phi\,\psi\right) = \psi\,\Delta\psi + \psi\,\Delta\phi + 2\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi$$

que

$$\vec{\nabla}\vec{v}\,\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right)$$

Exercice : Équation du son dans un gaz de van der Waals

- La loi d'état d'un gaz de van der Waals est

$$\left(P - \frac{a\ n^2}{V^2}\right)(V - n\ b) = n\ R\ T$$

et la relation entre la pression et le volume dans une transformation adiabatique

$$\left(P + \frac{n^2\ a}{V^2}\right)\ (V - n\ b)^\gamma = \text{constante}$$

- Écrire l'équation des ondes sonores de faible amplitude dans un tel gaz pour les cas :
  - $a = 0,\ b > 0$
  - $a > 0\ ,\ b = 0$

(le cas général conduit à trop de calculs à la main, cf. script)

Exercice : Écoulement laminaire sur un plan incliné

- Un fluide s'écoule sur un plan incliné d'un angle θ par rapport avec l'horizontale en présence d'un champ de gravité $-g\ \vec{k}_z$; on suppose que le domaine liquide est un film d'épaisseur constante e soit

$$D = \{s\ \vec{\tau} + \zeta\ \vec{n} \ \text{ pour } 0 < \zeta < e\}$$

où

$$\vec{\tau} = \cos\theta\ \vec{k}_x - \sin\theta\ \vec{k}_z\ ;\ \ \vec{n} = \sin\theta\ \vec{k}_x + \cos\theta\ \vec{k}_z$$

- Calculer l'écoulement stationnaire en supposant que le champ de vitesse est dirigé suivant $\vec{\tau}$ et que son profil ne dépend que de ζ, soit

$$\vec{v} = v(\zeta)\ \vec{\tau}$$

que la vitesse est nulle en $\zeta = 0$ et que les forces superficielles en $\zeta = e$ s'équilibrent avec celle qui sont dues à la pression atmosphérique.

- En déduire une relation entre débit d par unité de longueur transversale (suivant $\vec{k}_y$) et épaisseur e.

Exercice : Écoulement de Poiseuille plan de fluides superposés

- Deux fluides non missibles de masses volumique ρ_1 et ρ_2 et viscosités μ_1 et μ_2 différentes sont superposés (le plus lourd en dessous) en deux couches d'épaisseurs e_1 et e_2.

- Ces couches sont placées entre deux parois planes solides ; celle de dessous est immobile et celle du dessus est entrainé à la vitesse $V\ \vec{k}_x$; calculer l'écoulement.

- Que se passe-t-il lorsque l'une des viscosités est beaucoup plus grande que l'autre ?

Exercice : Écoulement plan dipolaire

- Le domaine fluide est le disque de rayon R ; on suppose que

$$\vec{v} = u(x,y)\ \vec{k}_x + v(x,y)\ \vec{k}_y$$

qu'à l'intérieur de ce disque il y a une densité de force de la forme

$$\vec{f} = f(r)\ \vec{k}_x \text{ avec } f(r) = \begin{cases} F & \text{si} \qquad \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon\ R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et que les conditions en $R\ (\cos\theta\ \vec{k}_x + \sin\theta\ \vec{k}_y)$ sont

$$u = v = 0$$

- Poser le problème en $\Omega - \psi$.

- Dans le cas de Stokes (nombre de Reynolds nul) la calculer effectivement.