Équations macroscopiques de la physique classique

Leçon 3

Équations de Navier-Stokes

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

20 septembre 2018

Objectifs de la leçon

► Introduire l'équation de Navier Stokes dans le cas des conditions d'incompressibilité, dans un domaine borné et avec la condition d'imperméabilité aux frontières du domaine.

► La méthode utilisée est d'éviter l'introduction *a priori* des tenseurs de vitesse de déformation, de contrainte et de leur liaison sous forme de relation constitutive.

► Et cela pour faire apparaître clairement l'équation de Navier Stokes comme une conséquence de la relation fondamentale de la dynamique.

Statique des fluides

► La condition nécessaire pour qu'un fluide contenu dans un domaine borné $D \subset E_3$ et soumis à une densité de force

$$\begin{array}{rccc} \vec{f} & : & D & \longrightarrow & E_3(N/m^3) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \vec{f}(\vec{x}) \end{array}$$

soit en équilibre, i.e. ne bouge pas, est que cette densité de force soit potentielle, c'est à dire de la forme

$$\vec{f} = \vec{\nabla} P$$

où P, le champ de pression $\begin{array}{rccc} P & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}(Pa) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & P(\vec{x}) \end{array}$ permet de rendre compte de la force que le fluide exerce sur lui-même.

► Ce qui signifie que il n'y a équilibre dans le fluide que si la densité de force appliquée $\vec{f}$ est potentielle, i.e. $\exists\, \varphi \ : \ \vec{f} = -\vec{\nabla}\varphi$; et alors la pression est

$$P = -\varphi + \text{ Constante dans } D$$

Démonstration de Clairaut

▶ Un fluide en équilibre n'est sujet à aucun mouvement ; et donc il est possible d'imaginer que une partie de celui-ci est « gelée » de manière à l'isoler de l'autre partie qui elle reste liquide.

▶ De cette façon on gèle tout le fluide, à l'exception d'un tube de très faible section fermé sur lui-même ;

▶ Ce tube ne sera immobile que si la circulation de la densité de forces $\vec{f}$ appliquée le long de sa courbe moyenne est nulle ;

▶ Et donc il faut que pour tout chemin Γ fermé sur lui-même

$$\int_{\Gamma} \vec{f}\, dl = 0$$

▶ Cela n'est possible que si $\vec{f}$ est le gradient d'une fonction qu'on appelle la pression

$$\vec{f} = \vec{\nabla} P$$

Statique des fluides : force sur un domaine $\delta D \subset D$

- La force qui s'exerce sur le domaine $\delta D \subset D$ est alors

$$\delta \vec{F} = \int_{\delta D} \vec{\nabla} P \; d\vec{x}^3$$

Cette quantité est une intégrale de volume, mais un calcul permet de l'exprimer comme intégrale de surface sur le bord $\partial \delta D$ (de normale extérieure $\vec{n}$) de D

$$\delta \vec{F} = \int_{\partial \delta D} P \; \vec{n} \; d\vec{x}^2$$

Et donc, pour que δD puisse être immobile, elle doit être compensée par une densité surfacique de forces exercée sur $\partial \delta D$, soit

$$\vec{f}_\partial = -P \; \vec{n}$$

de manière que

$$\delta \vec{F} + \int_{\partial \delta D} \vec{f}_\partial \; d\vec{x}^2 = 0$$

Statique : Compensation des efforts intérieur du fluide

► Deux sous-domaines δD_1 et δD_2 en contact l'un avec l'autre par la surface $\delta\Gamma$ avec

$$\delta\Gamma \subset \partial\delta D_1 \text{ et } \delta\Gamma \subset \partial\delta D_2$$

exercent l'un sur l'autre les forces de densité surfaciques sur $\delta\Gamma$

$-P\ \vec{n}_1$; force exercée par δD_2 sur δD_1

$-P\ \vec{n}_2$; force exercée par δD_1 sur δD_2

où $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont les normales à $\delta\Gamma$ sortante de δD_1 et sortante de δD_2.

► Donc pour toute position sur $\delta\Gamma$: $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 \Rightarrow$ les densités de forces se compensent

$$-P\ \vec{n}_1 - P\ \vec{n}_2 = \vec{0}$$

► Le raisonnement peut être reconduit partout et il amène à la conclusion que *les efforts intérieurs du fluide* se compensent.

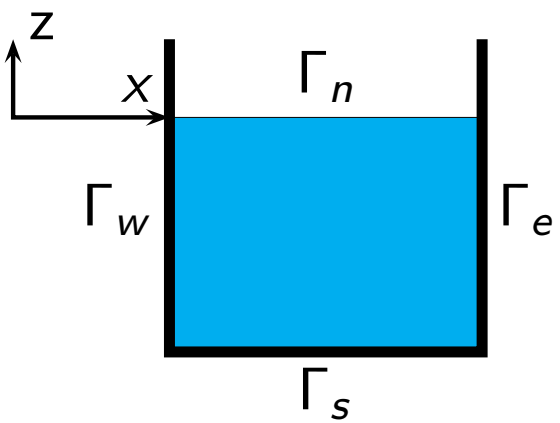
Statique : densité de force sur ∂D

- Si une partie du bord $\partial\delta D$, disons $\delta\partial D$, est commune avec ∂D, le bord de D, alors la densité surfacique de forces

$$\vec{f}_\partial = -P\ \vec{n} \text{ sur } \delta\partial D$$

qui participe à l'équilibre de δD ne peut être fournie comme précédemment par le fluide lui-même. C'est donc le milieu qui limite le fluide qui doit l'assurer.

- Typiquement



$$\partial D = \Gamma_s + \Gamma_e + \Gamma_n + \Gamma_w$$

$$P = P_0 - \rho\ g\ z$$

$$\vec{f}_\partial = \begin{cases} -P_0\ \vec{k}_z & \text{sur} \quad \Gamma_n \\ -P\ \vec{k}_x & \quad\ \ \Gamma_e \\ P\ \vec{k}_z & \quad\ \ \Gamma_s \\ P\ \vec{k}_x & \quad\ \ \Gamma_w \end{cases}$$

Compensation des couples

► La densité de forces de volume $\vec{\nabla} P$ dans un domaine $\forall\ \delta D$ est compensée par la densité superficielle de force $-P\vec{n}$ sur $\partial\delta D$, soit

$$\int_{\delta D} \vec{\nabla} P \; d\vec{x}^3 + \int_{\partial\delta D} -P\ \vec{n}\, d\vec{x}^2 = 0$$

► Mais pour l'équilibre il faut encore que les densités de couples se compense également, soit

$$\int_{\delta D} \vec{x} \times \vec{\nabla} P \; d\vec{x}^3 + \int_{\partial\delta D} \vec{x} \times (-P\ \vec{n})\; d\vec{x}^2 = 0$$

où le produit vectoriel est noté $\ll \times \gg$: $\vec{x} \times \vec{\nabla} P$ (en N/m^2) est la densité de couple volumique et $\vec{x} \times (-P\vec{n})$ (en N/m) la densité de couple surfacique.

► Un calcul (connexe à celui qui fait intervenir la formule de Green-Ostrogradski) conclut que cela arrive pour toute pression ; et donc les couples volumiques et surfaciques se compensent.

Dynamique des fluides

► La statique des fluides permet de résoudre de nombreux problèmes mais évidemment pas ceux où il y a un écoulement ; il est donc nécessaire d'introduire le mouvement dans le fluide.

► Le domaine fluide D étant spécifié, la connaissance de ce mouvement passe par celle du champ de vitesses

$$\begin{array}{rcccc} \vec{v} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & E_3(m/s) \\ & & (t, \vec{X}) & \longrightarrow & \vec{v}(t, \vec{X}) \end{array}$$

dans ce domaine.

► Et l'objectif est d'établir les équations qui permettent le calcul de ce champ de vitesses.

Rappels : le champ de vitesses et la densité

- Les positions de l'espace initialement en $\vec{x}$ se retrouvent à l'instant t en $\vec{X}(t)$ tel que

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{v}(t, \vec{X}) \; ; \; \vec{X}(t=0) = \vec{x}$$

- L'application flot est

$$\begin{array}{rccc} \vec{\Psi} & : & \mathbb{R} \times D & \longrightarrow & \vec{\Psi}(t, D) \\ & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{\Psi}(t, \vec{x}) = \vec{X}(t) \end{array} \qquad \text{et } \partial_t \vec{\Psi}(t, \vec{x}) = \vec{v}(t, \vec{\Psi}(t, \vec{x}))$$

- Une matière répartie initialement dans l'espace avec une densité massique $\rho_0 \; : \; \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R}(kg/m^3) \\ \vec{x} & \longrightarrow & \rho_0(\vec{x}) \end{array}$ se retrouve pour tous les temps répartie suivant une densité massique

$$\rho \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \vec{\Psi}(t, D) & \longrightarrow & \mathbb{R}(kg/m^3) \\ \vec{x} & \longrightarrow & \rho(t, \vec{x}) \end{array}$$

La relation entre ρ et ρ_0 est

$$\rho(t, \vec{\Psi}(t, x)) \, |\vec{\nabla}\vec{\Psi}(t, \vec{x})| = \rho_0(\vec{x})$$

Condition d'imperméabilité

▶ Dès lors qu'il y a mouvement il devient possible que l'image $\vec{\Psi}(t, D)$ de D par l'application flot ne coïncide pas avec D.

▶ Cette situation est fréquente, on parle alors d'écoulement à surface libre. Mais elle n'est pas très simple, aussi suppose-t-on qu'elle est évitée.

▶ Ce qui arrive lorsque le fluide remplit complétement son récipient (ou sa conduite).
Dans ce cas, pour que la matière dont est fait le fluide ne puisse traverser les parois de ce récipient, il faut que le flux advectif soit nul sur le bord de ∂D de D, soit

$$\rho\, \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

ρ étant supposé strictement positif, le champ de vitesse satisfait à la condition dite d'imperméabilité

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

Accélération

- Un point matériel situé initialement en $\vec{x}$ et donc à l'instant t en $\vec{X}(t)$ subit à cet instant une accélération ($\vec{\nabla}\vec{v}\ \vec{v}$ expliqué ci-dessous)

$$\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}(t) = \partial_t\ \vec{v} + \vec{\nabla}\vec{v}\ \vec{v}$$

- En effet l'expression en composantes du champ de vitesse est

$$\vec{v}(t, X\ \vec{k}_x + Y\ \vec{k}_y + Z\ \vec{k}_z) = u(t,X,Y,Z)\ \vec{k}_x + v(t,X,Y,Z)\ \vec{k}_y + w(t,X,Y,Z)\ \vec{k}_z$$

comme

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \dot{X}\ \vec{k}_x + \dot{Y}\ \vec{k}_y + \dot{Z}\ \vec{k}_z = \vec{v}(t,\vec{X})$$

il vient que

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}(t) &= (\partial_t u + \partial_X u\ \dot{X} + \partial_y u\ \dot{Y} + \partial_z u\ \dot{Z})\ \vec{k}_x \\ &+ (\partial_t v + \partial_X v\ \dot{X} + \partial_y v\ \dot{Y} + \partial_z v\ \dot{Z})\ \vec{k}_y \\ &+ (\partial_t w + \partial_X w\ \dot{X} + \partial_y w\ \dot{Y} + \partial_z w\ \dot{Z})\ \vec{k}_z\end{aligned}$$

Accélération

- Soit donc encore

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}(t) &= (\partial_t u + \partial_X u\ u + \partial_y u\ v + \partial_z u\ w)\ \vec{k}_x \\ &+ (\partial_t v + \partial_X v\ u + \partial_y v\ v + \partial_z v\ w)\ \vec{k}_y \\ &+ (\partial_t w + \partial_X w\ u + \partial_y w\ v + \partial_z w\ w)\ \vec{k}_z\end{aligned}$$

qui définit la notation $\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}(t) = \partial_t\ \vec{v} + \vec{\nabla}\vec{v}\ \vec{v}$

- Il existe une expression de $\vec{\nabla}\vec{v}\ \vec{v}$ sous forme d'opérateurs vectoriels comme

$$\vec{\nabla}\vec{v}\ \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right)$$

où s'introduit le rotationnel de $\vec{v}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = (\partial_Y w - \partial_Z v)\ \vec{k}_x + (\partial_Z u - \partial_X w)\ \vec{k}_y + (\partial_X v - \partial_Y u)\ \vec{k}_z$$

Évolution d'un domaine élémentaire

► La quantité de masse δm contenue par un domaine élémentaire δD de positions voisines de δx est

$$\delta m = \int_{\delta D} \rho_0(\vec{x})\ d\vec{x}^3$$

► Cette même quantité de masse se retrouve dans le domaine élémentaire image de δD par l'application flot, soit $\vec{\Psi}(t, \delta D)$. Elle est donc telle que

$$\delta m = \int_{\vec{\Psi}(\delta D)} \rho(t, \vec{X})\ d\vec{X}^3$$

(par changement de variable $\vec{X} = \vec{\Psi}(t, \vec{x})$ et utilisation de la relation entre ρ et ρ_0

$$\delta m = \int_{\delta D} \rho(t, \vec{\Psi}(t, \vec{x}))\ |\vec{\nabla}\vec{\Psi}(t, \vec{x})|\ d\vec{x}^3 = \int_{\delta D} \rho_0(\vec{x})\ d\vec{x}^3 \Big)$$

Force d'inertie sur un élément de volume

► Si le volume élémentaire est suffisamment petit pour que les accélérations des positions qui le constituent soient très proches de celle de la position initialement en $\vec{x}$, la force d'inertie associée à son mouvement est

$$-\delta m \left(\partial_t \vec{v} + \vec{\nabla}\vec{v}\,\vec{v}\right)$$

► Si on considére que le domaine $\vec{\Psi}(t, \delta D)$ est le parallélépipède infinitésimal

$$\{\vec{X}+\xi\,\vec{k}_x+\iota\,\vec{k}_y+\zeta\,\vec{k}_z\} \text{ avec } \begin{cases} -dx/2 < \xi < dx/2 \quad ; \quad -dy/2 < \iota < dy/2 \\ -dz/2 < \zeta < dz/2 \end{cases}$$

et donc que

$$\delta m = \rho(t, \vec{X})\; dx\; dy\; dz$$

il vient que la densité volumique de force d'inertie est

$$-\rho(t, \vec{X}) \underbrace{\left(\partial_t \vec{v} + \vec{\nabla}\vec{v}\,\vec{v}\right)}_{\text{d'arguments } (t,\vec{X})}$$

Équation du fluide parfait

► La condition d'équilibre d'un fluide contenu par D en présence d'une densité volumique de forces $\vec{f}$ appliquée était
$\vec{\nabla} P = \vec{f}$ dans D

► Si ce n'est pas le cas, le fluide se met en mouvement et sa vitesse est déterminée par l'équation d'évolution

$$-\rho(t, \vec{X}) \left(\partial_t \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v} \, \vec{v} \right) + \vec{f} = \vec{\nabla} P \text{ dans } D$$

où la densité de forces d'inertie d'ajoute à la densité de forces appliquée $\vec{f}$.

► Cette équation s'appelle l'équation du fluide parfait ; elle se réduit à celle de la statique des fluides lorsque $\vec{v} = \text{Constante}$; mais pas dans le cas stationnaire où

$$\partial_t \vec{v} = \vec{0} \text{ mais } \vec{v} \text{ n'est pas uniforme}$$

puisqu'elle devient alors

$$-\rho(t, \vec{X}) \, \vec{\nabla} \vec{v} \, \vec{v} + \vec{f} = \vec{\nabla} P \text{ dans } D$$

Condition d'incompressibilité

- L'incompressibilité est traduite *a priori* par l'affirmation que le déterminant du jacobien de l'application flot $|\vec{\nabla}\vec{\Psi}(t,\vec{x})|$ vaut 1 de manière que

$$\rho(t,\vec{\Psi}(t,x))\ |\vec{\nabla}\vec{\Psi}(t,\vec{x})| = \rho_0(\vec{x})$$

se transforme en

$$\rho(t,\vec{\Psi}(t,x)) = \rho_0(\vec{x})$$

- Cela correspond à une condition de divergence nulle sur le champ de vitesses

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \text{ dans } D$$

En effet si par exemple la densité initiale est uniforme comme on le suppose dans la suite

$$\vec{\nabla}\rho_0(\vec{x}) = \vec{0} \text{ dans } D$$

alors, du fait de l'équation d'advection $\partial_t\rho + \vec{\nabla}(\rho\ \vec{v}) = 0$, elle le demeure aux instants ultérieurs

$$\vec{\nabla}\rho(t,\vec{X}) = \vec{0} \text{ dans } D \text{ et } \rho = \rho_0$$

Équilibre des forces

► La situation en statique devait être telle que $P\ \vec{n}$ sur ∂D puisse être compensée par une densité surfacique de force $\vec{f_\partial}$ fournie par la paroi.

► Un raisonnement du même type peut être reconduit en dynamique : par intégration sur D de l'équation du fluide parfait fournit (via un calcul exploitant l'incompressibilité)

$$\int_D \vec{f}\, d\vec{x}^3 = \int_{\partial D} P\ \vec{n}\, d\vec{x}^2 + \int_{\partial D} \rho\ (\vec{v}\cdot\vec{n})\ \vec{v}\, d\vec{x}^2 + \frac{d}{dt}\int_D \rho\ \vec{v}\, d\vec{x}^3$$

D'autre part la force à compenser par une densité surfacique de forces $\vec{f_\partial}$ sur ∂D est la somme des forces appliquées et de la force d'inertie soit

$$\int_D \vec{f}\, d\vec{x}^3 - \frac{d}{dt}\int_D \rho\ \vec{v}\, d\vec{x}^3 + \int_{\partial D} \vec{f_\partial}\, d\vec{x}^2 = 0$$

d'où vient que cette force est

$$\vec{f_\partial} = -P\ \vec{n} - \rho\ (\vec{v}\cdot\vec{n})\ \vec{v}$$

Système d'équations du fluide parfait en domaine borné

- Compte tenu de la condition d'imperméabilité

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

la densité de forces surfacique exercée par la paroi sur le fluide est

$$\vec{f}_{\partial} = -P\ \vec{n}$$

comme en statique.

- Les équations permettant le calcul du champ de vitesses d'un fluide parfait sont donc au final

$$\begin{cases} \rho \left(\partial_t\ \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}\ \vec{v} \right) + \vec{\nabla} P = \vec{f} & \text{dans} & D \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & - & - \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur} & \partial D \end{cases}$$

Trajectoire, ligne d'émission et ligne de courant

► La trajectoire d'un point matériel initialement en $\vec{x}$ est la courbe de dans D définie par

$$\vec{X}(t) = \vec{\Psi}(t, \vec{x}) \text{ pour } 0 < t < T$$

► La ligne d'émission à partir d'une position $\vec{x}$ et à l'instant t est la courbe dans D définie paramétriquement par

$$\vec{\Psi}(T, \vec{\Psi}^{-1}(\tau, \vec{x})) \text{ pour } 0 < \tau < T$$

c'est la ligne qui pourrait être rendue visible par une émission continue entre les instants 0 et T de colorant à partir de la position $\vec{x}$ et qui serait photographiée à l'instant T.

► La ligne de courant au temps T passant par la position $\vec{X}$ est la trajectoire qu'aurait une particule située à un instant quelconque à cette position $\vec{X}$ si la valeur de la dépendance explicite en temps du champ de vitesses $\vec{v}$ était fixée à T, soit

$$\vec{Y}(s) \text{ où } \frac{d\vec{Y}}{ds} = \vec{v}(T, \vec{Y}) \text{ avec } \vec{Y}(s = 0) = \vec{X}$$

Théorème de Bernouilli

► Dans le cas stationnaire ($\partial_t \vec{v} = \vec{0}$) et lorsque la densité de force $\vec{f}$ est due à la pesanteur $\vec{f} = -\rho\, g\, \vec{k}_z$, l'équation du fluide parfait s'écrit

$$\rho \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \times \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\frac{\rho\, \vec{v}^2}{2} + P + \rho\, g\, (\vec{X} \cdot \vec{k}_z)\right) = \vec{0}$$

► Si Γ est une ligne de courant, alors en chacune de ses positions $\vec{Y}(s)$, son vecteur tangent $\vec{\tau} = d\vec{Y}/ds/|d\vec{Y}/ds|$ est dirigé suivant $\vec{v}(\vec{Y}(s))$; et donc

$$\left(\rho \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \times \vec{v}\right) \cdot \vec{\tau} = 0$$

► La circulation le long de la ligne de courant entre deux positions $\vec{Y}(s_1)$ et $\vec{Y}(s_2)$ quelconques de l'équation du fluide parfait fournit donc

$$\left(\frac{\rho\, \vec{v}^2}{2} + P + \rho\, g\, (\vec{X} \cdot \vec{k}_z)\right)_{\text{en } \vec{Y}(s_1)} = \left(\frac{\rho\, \vec{v}^2}{2} + P + \rho\, g\, (\vec{X} \cdot \vec{k}_z)\right)_{\text{en } \vec{Y}(s_2)}$$

C'est le théorème de Bernouilli : $\frac{\rho\, \vec{v}^2}{2} + P + \rho\, g\, (\vec{X} \cdot \vec{k}_z)$ ne varie pas le long d'une ligne de courant.

Force de frottement entre filets fluides

► Les fluides ne sont parfaits que dans les approximations. Ils sont en général soumis à des forces de frottement internes.

► Une façon d'introduire la forme que prennent ces forces de frottement interne consiste à supposer déjà le champ de vitesses stationnaire ; puis à supposer que l'écoulement se fait le long de *tubes de courant* dirigés suivant $\vec{k}_z$ dans lesquels on suppose discrétisé le champ de vitesse. Si de façon générale

$$\vec{v}(x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y + z\ \vec{k}_z) = u(x,y,z)\ \vec{k}_x + v(x,y,z)\ \vec{k}_y + w(x,y,z)\ \vec{k}_z$$

alors dans les hypothèses

$$\vec{v}(x,y,z) = w(x,y)\ \vec{k}_z$$

et dans le plan normal à $\vec{k}_z$

$\updownarrow \delta x$	$w(x, y+\delta x)$	$\delta y = \delta x$ $\longleftrightarrow$
$w(x-\delta x, y)$	$w(x,y)$	$w(x+\delta x, y)$
$\ldots$	$w(x, y-\delta x)$	$\ldots$

Force de frottement entre filets fluides

► Le fluide de la cellule centrale subit de la part de celui des cellules nord, sud, est et ouest des forces de frottement de la forme

$$k\,(w(x,y+\delta x)-w(x,y)) \quad ; \quad k\,(w(x,y-\delta x)-w(x,y))$$
$$k\,(w(x+\delta x,y)-w(x,y)) \quad ; \quad k\,(w(x-\delta x,y)-w(x,y))$$

où k est un coefficient de frottement.

► Au total, et en développant jusqu'à l'ordre 2 en δx, la force de frottement qui s'exerce sur le fluide de la cellule centrale est

$$\frac{k}{2}\,\delta x^2\;(\partial_{xx}w(x,y)+\partial_{yy}w(x,y))$$

les termes d'ordre 1 en δx ont disparu.

► Comme w ne dépend pas de z dans les hypothèse faites, cette force peut aussi bien s'écrire

$$\frac{k}{2}\,\delta x^2\,\Delta w \quad \text{où } \Delta \text{ est l'opérateur Laplacien}$$

La viscosité

► Le coefficient k a une unité telle que $k \times m/s$ soit une densité volumique de force (en N/m^3) ; son unité est donc en $N\ s/m^4$.

► D'autre part sa valeur n'est pas indépendante de la dimension de la cellule considérée : plus elle est petite plus il doit être grand parce qu'il est certainement d'autant plus difficile d'imposer une différence de vitesse donnée à deux filets fluides contigus que leur dimension est plus petite ; et le facteur qui agit est celui de leur surface de contact. Aussi k est-il en $1/\delta x^2$.

► Le coefficient caractéristique du frottement dans un fluide est la viscosité dynamique μ (en $Pa\ s = N\ s/m^2$) qui est reliée au coefficient de frottement par

$$\frac{k}{2}\ \delta x^2 = \mu$$

Force visqueuse

► Dans le cas général, la force de frottement des filets fluides les uns sur les autres est de la forme

$$\mu \, \vec{\Delta} \vec{v}$$

où

$$\vec{\Delta} \vec{v} = \Delta u \, \vec{k}_x + \Delta v \, \vec{k}_y + \Delta w \, \vec{k}_z$$

si

$$\vec{v}(x \, \vec{k}_x + y \, \vec{k}_y + z \, \vec{k}_z) = u(x, y, z) \, \vec{k}_x + v(x, y, z) \, \vec{k}_y + w(x, y, z) \, \vec{k}_z$$

► μ la viscosité dynamique est un coefficient caractéristique du fluide considéré (qui dépend également de l'état du fluide et notamment de sa température).

► La forme de cette force de frottement peut être différente de celle-ci pour certains fluides mais ceux pour qui elle est valable sont assez nombreux, ce sont les fluides newtonniens.

Condition de non-glissement aux parois

► La discrétisation faite sur le champ de vitesse du t. 22 est reprise mais dans le cas où la cellule centrale est en contact avec la paroi du réservoir supposé immobile

	0	
$w(x-\delta x, y)$	$w(x,y)$	$w(x+\delta x, y)$
$\updownarrow \delta x$	$w(x, y-\delta x)$	δx $\longleftrightarrow$

La contribution des frontières nord et sud à la force de frottement est

$$k\ (0 - w(x,y) + w(x, y-\delta x) - w(x,y))$$

soit en développant à l'ordre 0

$$-k\ w(x,y)$$

► Mais on a vu que $k = 2/(\mu\ \delta x^2)$: Si donc $w(x,y)$ n'était pas nul il y aurait une force de frottement infinie qui aurait pour conséquence que $w(x,y)$ deviendrait nul en en temps infinitésimal.

Condition de non-glissement aux parois

- Il s'ensuit que la condition de frottement aux parois est une condition de non-glissement

$$w = 0$$

- En revenant au champ de vitesses et à une paroi de position quelconque, la condition de non-glissement correspond donc à affirmer que la vitesse tangentielle à la paroi est nulle ; soit donc en remarquant que le produit vectoriel de $\vec{v}$ et de la normale $\vec{n}$ est cette vitesse tangentielle tournée de $\pi/2$:

$$\vec{v} \times \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \partial D$$

- Mais avec la condition d'imperméabilité,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

le cumul des ces deux conditions est

$$\vec{v} = \vec{0} \text{ sur } \partial D$$

Équation de Navier Stokes

► Les équations d'évolution d'un fluide incompressible intérieur à un domaine D bordé par des parois solides immobiles et soumis à une densité de forces $\vec{f}$ sont

$$\begin{cases} \rho \left(\partial_t \vec{v} + \vec{\nabla}\vec{v}\,\vec{v}\right) + \vec{\nabla}P = \mu \vec{\Delta}\vec{v} + \vec{f} & \text{dans} \quad D \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 & - \quad D \\ \vec{v} = \vec{0} & \text{sur} \quad \partial D \end{cases}$$

► L'équation de volume

$$\rho \left(\partial_t \vec{v} + \vec{\nabla}\vec{v}\,\vec{v}\right) + \vec{\nabla}P = \mu \vec{\Delta}\vec{v} + \vec{f}$$

s'appelle l'équation de Navier-Stokes.

► L'équation de Navier-Stokes est intriséquement non-linéaire du fait du terme $\vec{\nabla}\vec{v}\,\vec{v}$; et donc, suivant la force de ce terme par rapport à $\mu\vec{\Delta}\vec{v}$, le champ de vitesses $\vec{v}$ aura des comportements très différents.

Force de frottement à la paroi

- Cette force peut s'obtenir par intégration de l'équation de Navier Stokes sur le domaine D qui fournit

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\ \vec{v}\ d\vec{x}^3 + \int_{\partial D} \rho\ (\vec{v}\cdot\vec{n})\ \vec{v}\ d\vec{x}^2 + \int_{\partial D} P\ \vec{n}\ d\vec{x}^2 = \int_D \mu\ \vec{\Delta}\vec{v}\ d\vec{x}^3 + \int_D \vec{f}\ d\vec{x}^3$$

Si $\vec{v} = u\ \vec{k}_x + v\ \vec{k}_y + w\ \vec{k}_z$ en utilisant la formule de Green composante par composante

$$\int_D \mu\ \vec{\Delta}\vec{v}\ d\vec{x}^3 = \int_{\partial D} \mu\ \left((\vec{\nabla}u\cdot\vec{n})\ \vec{k}_x + (\vec{\nabla}v\cdot\vec{n})\ \vec{k}_y + (\vec{\nabla}w\cdot\vec{n})\ \vec{k}_z\right)\ d\vec{x}^2$$

- D'où vient que la densité de force surfacique qui compense les forces appliquées et d'inertie est

$$\vec{f}_\partial = -P\vec{n} - \mu\ \left((\vec{\nabla}u\cdot\vec{n})\ \vec{k}_x + (\vec{\nabla}v\cdot\vec{n})\ \vec{k}_y + (\vec{\nabla}w\cdot\vec{n})\ \vec{k}_z\right)$$

et donc le terme dû à la viscosité est

$$-\mu\ \left((\vec{\nabla}u\cdot\vec{n})\ \vec{k}_x + (\vec{\nabla}v\cdot\vec{n})\ \vec{k}_y + (\vec{\nabla}w\cdot\vec{n})\ \vec{k}_z\right)$$

Cas d'une paroi en mouvement

► L'analyse a été faite en supposant immobiles les parois qui bordent le fluide ; mais elle est également valable lorqu'une partie de cette paroi est en mouvement à la condition que ce soit un mouvement la laissant globalement invariante. Par exemple dans le cas de l'écoulement de Couette donné en exercice.

► Si donc les parois ont un mouvement dont la cinématique est décrite par la donnée de

$$\begin{array}{rcccc} \vec{v}_\partial & : & \mathbb{R}\times\partial D & \longrightarrow & R(m/s) \\ & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{v}_\partial(t,\vec{v}) \end{array}$$

où

$$\vec{v}_\partial \cdot \vec{n} = 0$$

assure l'invariance globale, le système de Navier-Stokes s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho\,\left(\partial_t\,\vec{v} + \vec{\nabla}\vec{v}\,\vec{v}\right) + \vec{\nabla}P = \mu\,\vec{\Delta}\vec{v} + \vec{f} & \text{dans} & D \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 & - & D \\ \vec{v} = \vec{v}_\partial & \text{sur} & \partial D \end{array} \right.$$

Viscosité cinématique

▶ Le fluide étant supposé de masse volumique ρ constante, l'équation de Navier-Stokes se réécrit

$$\left(\partial_t\,(\rho\,\vec{v}) + \vec{\nabla}\vec{v}\,(\rho\,\vec{v})\right) + \vec{\nabla}P = \nu\,\vec{\Delta}(\rho\,\vec{v}) + \vec{f}$$

où $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}\,(m^2/s)$ s'appelle la viscosité cinématique.

▶ On constate, qu'à part les termes de pression et de force appliquée, l'équation de Navier-Stokes prend la forme d'une équation d'advection-diffusion ; à ceci près qu'il s'agit d'une diffusion portant apparemment sur $\rho\,\vec{v}$ qui est la densité de quantité de mouvement.

▶ Ce qui correspond à une explication physique de l'équation de Navier-Stokes qu'on trouve dans le livre de Jean Perrin.

Adimensionnement

- On introduit une dimension L *caractéristique* à D pour poser

$$\vec{x} = L\,\vec{\xi}$$

puis un temps caractéristique T pour poser

$$t = T\,\tau$$

Il ne faut pas chercher de dénotation immédiate au concept de dimension ou temps caractéristique ; cela vient plus tard.

- La combinaison de L, T, ρ, μ permet d'obtenir les nombres adimensionnels de :

$$\text{Fourier} \quad : \quad Fo = \frac{\mu\,T}{\rho\,L^2} \quad ; \quad \text{Reynolds} \quad : \quad Re = \frac{\rho\,L\,V}{\mu}$$

- D'autre part on peut également obtenir des quantités homogènes à une pression P_c (Pa) et une densité de force f_c (N/m^3) comme

$$P_c = \frac{\mu\,V}{L} \; ; \; f_c = \frac{\mu\,V}{L^2} = \frac{P_c}{L}$$

Adimensionnement

- On introduit alors les champs

$$\mathfrak{P}(\tau,\vec{\xi}) = \frac{P(\tau/T,\vec{x}/L)}{P_c} \; ; \; \vec{\mathfrak{f}}(\tau,\vec{\xi}) = \frac{\vec{f}(\tau/T,\vec{x}/L)}{f_c} \; ; \; \vec{\mathfrak{v}}(\tau,\vec{\xi}) = \frac{\vec{v}(\tau/T,\vec{x}/L)}{V}$$

- Puis les opérateurs de dérivation par rapport à $\vec{\xi}$ via : si

$$\vec{\xi} = \xi \; \vec{k}_x + \iota \; \vec{k}_y + \zeta \; \vec{k}_z$$

alors

$$\vec{\nabla} = \partial_\xi \; \vec{k}_x + \partial_\iota \; \vec{k}_y + \partial_\zeta \; \vec{k}_z \;\; \text{et} \; \Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

(on garde le même symbole « nabla » que pour la dérivation par rapport à $\vec{x}$)

- L'équation de Navier-Stokes s'écrit finalement sous la forme adimensionnelle

$$\frac{1}{Fo} \; \partial_\tau \vec{\mathfrak{v}} + Re \; \vec{\nabla}\vec{\mathfrak{v}} \; \vec{\mathfrak{v}} + \vec{\nabla}\mathfrak{P} = \vec{\Delta}\vec{\mathfrak{v}} + \vec{\mathfrak{f}}$$

Écoulements à faible nombre de Reynolds

► L'intérêt de l'adimensionnement est qu'il permet d'utiliser un cadre unique pour des situations très variées.

► Par exemple on parle d'écoulement à faible nombre de Reynolds pour celui de miel ($\mu = 10\ Pa\ s$, $\rho = 1.4\ 10^3\ kg/m^3$) s'écoulant à des vitesses de l'ordre de 1cm/s dans une conduite de 10cm de diamètre mais aussi pour de l'eau ($\mu = 1.7\ 10^{-3}\ Pa\ s$, $\rho = 10^3\ kg/m^3$) s'écoulant à des vitesses de 0.1mm/s dans une éprouvette de 1mm de diamètre.

► Les écoulements à faible nombre de Reynolds considérés comme des écoulements à nombre de Reynolds nul

$$\frac{1}{Fo}\,\partial_\tau \vec{\mathfrak{v}} + \vec{\nabla}\mathfrak{P} = \vec{\Delta}\vec{\mathfrak{v}} + \vec{\mathfrak{f}}$$

s'appellent des écoulements de Stokes : ils correspondent à une équation linéaire.

Écoulements turbulents

▶ Lorsque le nombre de Reynolds devient grand, le terme non-linéaire $\vec{\nabla}\vec{\mathfrak{v}}\,\vec{\mathfrak{v}}$ est prépondérant dans

$$\frac{1}{Fo}\,\partial_\tau \vec{\mathfrak{v}} + Re\,\vec{\nabla}\vec{\mathfrak{v}}\,\vec{\mathfrak{v}} + \vec{\nabla}\mathfrak{P} = \vec{\Delta}\vec{\mathfrak{v}} + \vec{\mathfrak{f}}$$

et le régime d'écoulement devient turbulent.

▶ L'explication de la turbulence est encore affaire de recherches. Heisenberg en aurait dit :

> ≪ When I meet God, I am going to ask him two questions : Why relativity ? And why turbulence ? I really believe he will have an answer for the first. ≫

mais on constate expérimentalement et numériquement qu'au delà d'une valeur critique

$$Re = 2000$$

le phénomène de turbulence advient.

Écoulement ouverts et fermés

► La description faite est celle d'écoulements fermés ; c'est à dire enclos dans un récipient avec condition d'imperméabilité. Et, si on excepte les situations de frontière libre, c'est toujours le cas dans les problèmes concrets.

► Cependant ces problèmes concrets peuvent être approximé géométriquement et ne porter que sur une partie de l'écoulement ; notamment si on souhaite examiner l'écoulement

- dans une conduite, il peut être intéressant de la considérer comme indéfinie dans sa longueur ;
- autour d'un obstacle, il peut être intéressant de supposer que l'obstacle est immergé dans un écoulement indéfini dans toutes les directions.

► On parle alors d'écoulements ouverts ; et pour ceux-ci des grandeurs qui seraient à calculer en écoulement fermés peuvent se trouver devenir des données d'entrées.

Exercice : Écoulement de Poiseuille dans une conduite

► Un écoulement dans une conduite cylindrique (invariante par translation dans la direction $\vec{k}_z$) et axisymétrique (invariante par rotation autour de $\vec{k}_z$) de rayon R est de la forme

$$\vec{v} = w(r)\ \vec{k}_z$$

où les coordonnées cylindriques sont définies par

$$\vec{x} = r\ \vec{k}_r + z\ \vec{k}_z \text{ avec } \begin{cases} \vec{k}_r = \cos\theta\ \vec{k}_x + \sin_\theta\ \vec{k}_y \\ \vec{k}_\theta = -\sin\theta\ \vec{k}_x + \cos_\theta\ \vec{k}_y \end{cases}$$

On donne

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\partial_r w\ \vec{k}_\theta\ ;\ \vec{\nabla} P = \partial_r P\ \vec{k}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta P\ \vec{k}_\theta + \partial_z P\ \vec{k}_z$$

► Donner l'expression de l'écoulement en fonction du débit volumique d (en m^3/s) ; en déduire l'expression de la *perte de charge* dans la conduite.

Exercice : Écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux

► Un écoulement entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 et tournant chacun à la vitesse Ω_1 et Ω_2 est de la forme

$$\vec{v} = v(r)\ \vec{k}_\theta$$

On donne

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\ v\right)\ \vec{k}_z$$

► Donner l'expression de l'écoulement en fonction de Ω_1 et Ω_2. En déduire l'expression du couple sur le cylindre intérieur.

Exercice : Calcul de la loi de Stokes

▶ La loi de Stokes est qu'une sphère solide de rayon R qui se déplace à vitesse faible V dans un fluide de viscosité μ qui serait immobile sans elle éprouve une force de frottement

$$F = -6\,\pi\,\mu\,R\,V$$

▶ Cette loi est valable à nombre de Reynolds nul et on l'accepte comme valable lorsqu'il est plus petit que l'unité. Exprimer ce nombre de Reynolds.

▶ Dans le référentiel de la sphère, le fluide se déplace à vitesse constante V dans la direction $\vec{k}_z$ et le problème de Stokes reste valable dans ce référentiel ; le champ de vitesse de l'écoulement est alors (en coordonnées cylindriques et pour $r^2 + z^2 > R^2$)

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \left(\psi\ \vec{k}_\theta \right) \text{ avec } \psi = \frac{V\ R\ r}{4} \left(\frac{R^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{\sqrt{r^2+z^2}} + 2 \right)$$

▶ Retrouver la loi de Stokes à partir de la donnée de $\vec{v}$.