Équations macroscopiques de la physique classique

Électromagnétisme formel

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

20 septembre 2018

Objectifs

- Présenter les aspects formels de l'électromagnétisme ;

- Les variables que ces équations relient sont décrites ;

- Ainsi que le passage aux potentiels scalaire électrique et vecteur magnétique ; le rôle de la jauge est précisé.

- Cette leçon ne contient pas la relation de l'électromagnétisme avec ce qui peut être perçu (lumière, chaleur, mouvement) : elle sera complétée par la suite.

- Notamment la loi d'Ohm des milieux en mouvement n'est pas introduite.

Densité de charge et de courant électrique

- Les densités de charge et de courant électrique sont des données

$$
\begin{array}{lcccll}
\rho & : & \mathbb{R}\times E_3 & \longrightarrow & \text{Densités de charges électriques} & \mathbb{R}(Cb/m^3) \\
 & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \rho(t,\vec{x}) & \\
\vec{j} & : & \mathbb{R}\times E_3 & \longrightarrow & \text{Densités de courant électrique} & E_3(A/m^2) \\
 & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{j}(t,\vec{x}) &
\end{array}
$$

- Elles ne sont pas libres l'une par rapport à l'autre mais satisfont à l'équation de conservation de la charge

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\partial_t\rho=0$$

qui peut *a priori* s'interpréter comme l'affirmation que la densité de courant est un flux des charges électriques advectées par un champ de vitesse $\vec{v} \;:\; \mathbb{R}\times E_3 \longrightarrow E_3(m/s)$

$$\vec{j}=\rho\,\vec{v}$$

soit

$$\partial_\rho+\vec{\nabla}\cdot(\rho\,\vec{v})=0$$

Charge positives et négatives

- En fait il y a des charges positives de densité ρ^+ et négatives de densité ρ^- qui peuvent s'interpénétrer [1] de manière que la densité globale est

$$\rho = \rho^+ + \rho^-$$

et chacune de ces densités sont advectées par un champ de vitesse qui leur est propre $\vec{v}^+$ et $\vec{v}^-$

$$\partial_t \rho^+ + \vec{\nabla} \cdot (\rho^+ \ \vec{v}^+) = 0 \text{ et } \partial_t \rho^- + \vec{\nabla} \cdot (\rho^- \ \vec{v}^-) = 0$$

- Ainsi la densité de courant électrique est

$$\vec{j} = \rho^+ \ \vec{v}^+ + \rho^- \ \vec{v}^-$$

1. On peut penser par exemple que la situation est analogue à celle d'ions d'un sel dissocié dans un solvant où ρ^+ et ρ^- sont les concentrations.

Charge positives et négatives

- La situation courante où
  - ρ^- et ρ^+ sont uniforme dans un domaine de $D \subset E_3$ et nulles en dehors ;
  - $\rho^- + \rho^+ = 0$
  - $\vec{v}^+ = \vec{0}$
  - $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^- = 0$ dans D avec $\vec{v}^- \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D

conduit alors à

$$\vec{j} = \rho^- \; \vec{v}^- \neq \vec{0} \text{ et } \rho = 0$$

et donc

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \text{ dans } E_3$$

- Il y a bien une densité de courant $\vec{j}$ globale non nulle mais la densité de charges globale ρ est nulle.

Potentiels scalaire électrique et vecteur magnétique

- Les potentiels scalaire électrique φ et vecteur magnétique $\vec{a}$ sont des champs

$$\begin{array}{ccccll}
\varphi & : & \mathbb{R}\times E_3 & \longrightarrow & \text{Pot. scal. élec.} & \mathbb{R}(V) \\
 & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \varphi(t,\vec{x}) & \\
\vec{a} & : & \mathbb{R}\times E_3 & \longrightarrow & \text{Pot. Vect. mag.} & E_3(T\ m = V\ s/m) \\
 & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{a}(t,\vec{x}) &
\end{array}$$

définis par la formule des potentiels retardés

$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi(t,\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int_{E_3}\frac{\rho\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,d\vec{y}^{\,3} \\
\vec{a}(t,\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{E_3}\frac{\vec{j}\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,d\vec{y}^{\,3}
\end{array}\right.$$

où

$$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ H/m\ ;\ \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\ \pi}\ F/m\ ;\ c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\ \epsilon_0}}\ m/s$$

sont les perméabilité magnétique, permittivité diélectrique et vitesse de la lumière dans le vide.

Jauge de Lorenz

- La relation de conservation de la charge électrique

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

entraîne sur les potentiels scalaire électrique φ et vecteur magnétique $\vec{a}$ la relation appelée jauge de Lorenz

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$$

- Pour le montrer on dérive sans précaution l'intégrand après avoir on posé

$$\vec{\mathcal{J}}(t, \vec{x}, \vec{y}) = \vec{j}\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}, \vec{y}\right)$$

et remarqué que

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{\mathcal{J}} = -\frac{\partial_t \vec{\mathcal{J}} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}{c\ |\vec{x} - \vec{y}|}\ ;\ \vec{\nabla}_{\vec{x}} |\vec{x} - \vec{y}| + \vec{\nabla}_{\vec{y}} |\vec{x} - \vec{y}| = \vec{0}$$

Équations d'onde

- Sous la condition de conservation de la charge électrique

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

les potentiels scalaire électrique φ et vecteur magnétique $\vec{a}$ sont également solutions de

$$\vec{\Box}\, \vec{a} = \mu_0\, \vec{j} \quad ; \quad \Box\, \varphi = \tfrac{\rho}{\epsilon_0}$$

où

$$\Box\, \phi = \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\phi - \Delta\phi \ ; \ \vec{\Box}\vec{a} = \frac{1}{c^2}\partial^2_{tt}\vec{a} - \vec{\Delta}\vec{a}$$

sont les d'alembertiens scalaire et vectoriel.

- Ces équations sont des équations de propagation, ce qui permet de comprendre les formules de potentiels retardés : lorsque les valeurs de $\vec{j}$ ou de ρ à une position $\vec{y}$ et à un temps t changent, cela ne se répercute sur $\vec{a}$ et φ à la position $\vec{x}$ qu'au temps $t + |\vec{x} - \vec{y}|/c$.

Équations de Maxwell

- Les induction [2] magnétique $\vec{b}$ et champ électrique $\vec{e}$ sont

$$\begin{array}{llcll} \vec{e} & : \mathbb{R}\times E_3 & \longrightarrow & \text{Champs électriques} & E_3(V/m) \\ & \quad (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{e}(t,\vec{x}) & \\ \vec{b} & : \mathbb{R}\times E_3 & \longrightarrow & \text{Inductions magnétiques} & E_3(T) \\ & \quad (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \vec{b}(t,\vec{x}) & \end{array}$$

définis à partir des potentiels par

$$\vec{b} = \vec{\nabla}\times\vec{a}\,;\ \vec{e} = -\partial_t\vec{a} - \vec{\nabla}\varphi$$

- Ils sont solutions des équations de Maxwell « dans le vide »

$$\left\{ \begin{array}{lll} \vec{\nabla}\times\vec{b} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{e} & \text{Maxwell-Ampère} & E_3(A/m^2) \\ \vec{\nabla}\times\vec{e} = -\partial_t\vec{b} & \text{Maxwell-Faraday} & E_3(V/m^2 = T/s) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{b} = 0 & \text{Conservation de l'induction magnétique} & E_3(T/m) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{e} = \rho/\epsilon_0 & \text{Gauss} & \mathbb{R}(Cb/m^3) \end{array} \right.$$

2. $\vec{b}$ est appelé induction magnétique plutôt que champ magnétique pour des raisons historiques

Force de Lorentz

► La densité de forces électromagnétiques de Lorentz qui s'exerce sur les charges électriques réparties avec la densité ρ est

$$\vec{f}(t,\vec{x}) = \rho(t,\vec{x})\ \left(\vec{e} + \vec{v}(t,\vec{x}) \times \vec{b}(t,\vec{x})\right)$$

où $\vec{v}$ est le champ de vitesse qui advecte les charges électriques.

► Les densité de charges électriques $\rho(t,\vec{x})$ et de courant électrique sont liées par

$$\vec{j} = \rho\ \vec{v}$$

et donc l'expression de la densité de forces électromagnétiques devient

$$\vec{f} = \underbrace{\rho\ \vec{e}}_{\text{densité de forces électriques}} + \underbrace{\vec{j} \times \vec{b}}_{\text{densité de forces de Laplace}}$$

Cas des charges positives et négatives

- Dans la situation du tranparent 5 où : ρ^- et ρ^+ sont uniforme dans un domaine de $D \subset E_3$ et nulles en dehors et

$$\rho^- + \rho^+ = 0\ ;\ \vec{v}^+ = \vec{0}\ ;\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^- = 0 \text{ dans } D \text{ avec } \vec{v}^- \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D$$

et donc

$$\vec{j} = \rho^-\ \vec{v}^- \neq \vec{0}\ ;\ \rho = 0 \text{ soit } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \text{ dans } E_3$$

les densités de force de Lorentz sur les charges + et - sont

$$\vec{f}^+ = \rho^+\ \vec{e}\ ;\ \vec{f}^- = \rho^-\ \vec{e} + \vec{j} \times \vec{b}$$

soit donc en considérant que ces forces ne contribuent pas à changer les positions et vitesses relatives de ces charges

$$\vec{f} = \vec{f}^+ + \vec{f}^- = \vec{j} \times \vec{b}$$

il ne reste plus que la densité de forces de Laplace qui s'exerce globalement dans le domaine D.

Électromagnétisme

- Formellement l'électromagnétisme apparaît comme assez simple :
  1. il y a des charges électriques positives et négatives réparties avec des densités ρ^+ et ρ^- et advectées par des vitesses $\vec{v}^+$ et $\vec{v}^-$ qui permettent de trouver les densités de courant $\vec{j}^+$ et $\vec{j}^-$ d'où se déduit $\vec{j} = \vec{j}^+ + \vec{j}^-$;
  2. on calcule les potentiels scalaire électrique φ et vecteur magnétique $\vec{a}$; on en déduit les induction magnétique $\vec{b}$ et champ électrique $\vec{e}$; d'où la densité de force de Lorentz $\vec{f}$;
  3. cette densité de force de Lorentz permet de déterminer le mouvement des charges et donc les vitesses $\vec{v}^+$ et $\vec{v}^-$.

- Mais hélas ce programme est impraticable à chaque étape : on ne sait pas trop comment dissocier les charges et leurs vitesse ; le calcul des potentiels suppose qu'on connaisse les positions et vitesses non pas à un instant initial mais depuis tous les instants qui le précèdent ; la force de Lorentz ne donne pas accès à l'inertie qu'il faudrait prêter aux charges pour déterminer leur mouvement.

Électromagnétisme

- Aussi va-t-on procéder différemment et traiter l'électromagnétisme en quelque sorte à la découpe.

- La première découpe est déjà la considération de deux électromagnétismes :
  - le 1° considère des charges en mouvement comme on l'a fait jusque ici et elles-seules. C'est l'électromagnétisme du vide ou encore l'électromagnétisme microscopique pour signifier que l'espace n'est pas vide puisqu'il contient au moins des charges électriques.
  - le second considère que certains domaines de l'espace ont des propriétés électromagnétiques particulières ; celles-ci sont certes dues à des mouvements de charge mais par des mécanismes si compliqués qu'on les aborde de façon phénoménologique. C'est l'électromagnétisme dans la matière ou électromagnétisme macroscopique pour signifier qu'il traduit des propriétés moyennes de l'électromagnétisme du vide.

Les champs et inductions électriques et magnétiques et les densités de charges et de courant

- Les équations de Maxwell dans la matière portent sur les champs, inductions et densités :

$$
\begin{array}{llllll}
\vec{e} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Champs électriques} & E_3(V/m) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{e}(t, \vec{x}) & \\
\vec{d} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Inductions électriques} & E_3(Cb/m^2) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{d}(t, \vec{x}) & \\
\vec{h} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Champs magnétiques} & E_3(A/m) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{h}(t, \vec{x}) & \\
\vec{b} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Inductions magnétiques} & E_3(T) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{b}(t, \vec{x}) & \\
\vec{j} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Densités de courant électrique} & E_3(A/m^2) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{j}(t, \vec{x}) & \\
\rho & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Densités de charges électriques} & \mathbb{R}(Cb/m^3) \\
 & & (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \rho(t, \vec{x}) &
\end{array}
$$

Équations de Maxwell (2/2)

- Ces inductions, champ et densité sont mis en relation par les équation de Maxwell comme

$$\left\{\begin{array}{lll}
\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j} + \partial_t \vec{d} & \text{Maxwell-Ampère} & E_3(A/m^2) \\
\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b} & \text{Maxwell-Faraday} & E_3(V/m^2 = T/s) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 & \text{Conservation de l'induction magnétique} & E_3(T/m) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{d} = \rho & \text{Gauss} & \mathbb{R}(Cb/m^3)
\end{array}\right.$$

où

$$\begin{array}{lllll}
\partial_t \vec{d} : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & \text{Courants de déplacement} & E_3(A/m^2) \\
& (t, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{d}(t, \vec{x}) &
\end{array}$$

Explicitations

► Une base $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ est donnée dans laquelle la position est repérée par le triplet $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; les grandeurs scalaires φ doivent être vue comme des applications de

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t, x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & \varphi(t, x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

et les grandeurs vectorielles $\vec{u}$ comme des applications de

$$\begin{array}{cccc} \vec{u} & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (t, x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & (u_1(t, x_1, x_2, x_3), u_2(t, x_1, x_2, x_3), u_3(t, x_1, x_2, x_3)) \end{array}$$

► En omettant les arguments de ces fonctions, en notant ∂_n la dérivée partielle par rapport à x_n, l'opérateur ≪ nabla ≫ $\vec{\nabla}$ de dérivation fonctionne comme

- sur les grandeurs scalaires (gradient) :

$$\vec{\nabla}\varphi = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi)$$

- sur les grandeurs vectorielles (divergence) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3$$

- encore sur les grandeurs vectorielles (rotationnel) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

Equations de Maxwell en composantes

Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \partial_2 h_3 - \partial_3 h_2 &= j_1 + \partial_t d_1 \\ \partial_3 h_1 - \partial_1 h_3 &= j_1 + \partial_t d_2 \\ \partial_1 h_2 - \partial_2 h_1 &= j_2 + \partial_t d_3 \end{aligned}$$

Maxwell-Ampère

$$\begin{aligned} \partial_2 e_3 - \partial_3 e_2 &= -\partial_t b_1 \\ \partial_3 e_1 - \partial_1 e_3 &= -\partial_t b_2 \\ \partial_1 e_2 - \partial_2 e_1 &= -\partial_t b_3 \end{aligned}$$

Maxwell-Faraday

$$\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3 = 0$$

Conservation induction magnétique

$$\partial_1 d_1 + \partial_2 d_2 + \partial_3 d_3 = \rho$$

Gauss

Relations magnétiques et diélectrique dans le vide

- ≪ Le vide ≫ dont il s'agit est tout relatif puisqu'il contient des charges électriques (ρ) et des courants électriques ($\vec{j}$).
- Les champs et inductions sont liés par
  - la relation magnétique

$$\vec{b} = \mu_0 \ \vec{h} \quad ; \quad \mu_0 = 4\pi \ 10^{-7} \ H/m \text{ perméabilité magnétique du vide}$$

  - la relation diélectrique

$$\vec{d} = \epsilon_0 \ \vec{e} \quad ; \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36 \ \pi} \ F/m \text{ permittivité diélectrique du vide}$$

- La distinction en champs et inductions est inutile dans le vide puisque ceux-ci sont liés par une simple relation de proportionnalité, le coefficient étant une constante universelle.
Mais la situation va radicalement changer en présence de matière.

Relation magnétique dans la matière

- Supposons qu'un domaine $D \subset E_3$ soit immobile et rempli par une matière homogène : celle-ci peut être non-magnétique pour signifier que la relation magnétique est celle du vide ;

- Mais elle peut être également magnétique, la relation est alors

$$\vec{b} = \mu_0 \left(\vec{h} + \vec{m}\right)$$

où

$$\begin{array}{rcccl} \vec{m} & : & \mathcal{H}(E_3(A/m)) & \longrightarrow & E_3(A/M) \\ & & \vec{\mathfrak{h}}(.) & \longrightarrow & \vec{m}(\vec{\mathfrak{h}}(.)) \end{array}$$

s'appelle l'aimantation. Cette aimantation est une variable dépendante de $\vec{\mathfrak{h}}(.)$ qui n'est pas nécessairement le champ magnétique $\vec{h}(t, \vec{x})$ à l'instant t et la position $\vec{x}$ mais l'ensemble des valeurs pour cette position $\vec{x}$ et tous les instants τ antérieurs à t de la fonction

$$\begin{array}{rcccl} \mathfrak{h} & : & \mathbb{R} \times E_3 & \longrightarrow & E_3(A/m) \\ & & (\tau, \vec{x}) & \longrightarrow & \vec{h}(\tau, \vec{x}) \end{array}$$

Formes de l'aimantation

- L'aimantation peut prendre des formes très compliquées, notamment parce qu'elle peut dependre de ≪ l'histoire ≫ du champ magnétique en chacune des positions ; dans ce cas on parle d'hystérèsis magnétique.

- Mais il existe quelques formes bien plus simples qui fournissent des approximations raisonnable à cette complexité. Ce sont

$$\vec{m} = m\,\vec{d} \text{ où } m \text{ et } \vec{d} \text{ sont uniformes dans } D$$

qui est le cas de l'aimant permanent : m est une donnée ($\approx 1.0e^6\ A/m$ pour un aimant en néodyme-fer-bore) ; et $\vec{d}$ est la direction d'aimantation.

- Il y a aussi le paramagnétisme

$$\vec{m} = \chi\,\vec{h} \text{ avec } \chi > 0$$

c'est un effet en général très faible : $\chi \approx 10^{-5}$ pour de nombreux matériaux.

Formes de l'aimantation

- et encore le diamagnétisme

$$\vec{m} = \chi\,\vec{h} \text{ avec } \chi < 0 \text{ mais } \chi > -1$$

c'est également un effet très faible $\chi \approx -10^{-5}$ pour de nombreux matériaux.
Avec cependant une exception notable (quoique peu courante dans la vie de tous les jours) : celle des matériaux supraconducteurs pour lesquels $\chi = -1$; on les appelle des diamagnétiques parfaits.

- Et finalement il y a les matériaux magnétiques comme le fer, le nickel le cobalt et leurs alliages qui ont des comportements magnétiques plainement hystérétiques mais pouur lesquels ont peut considérer (en 1° approximation) que quand ils ne sont pas des aimants permanents ils ont une susceptibilité magnétique (c'est le nom de χ) très forte.

L'anisotropie et la perméabilité magnétique

- Cette présentation phénoménologique du magnétisme suppose que les matériaux magnétique sont isotropes, c'est à dire que que lorsqu'elle est supposée linéaire, la relation entre induction et champ magnétique ne fait intervenir qu'une relation de proportionalité entre les vecteurs de la forme

$$\vec{b} = \mu \, \vec{h}$$

où

$$\mu = \mu_0 \, (1 + \chi) = \mu_0 \, \mu_r$$

qui s'appelle la perméabilité magnétique est un scalaire ; μ_r s'appelle la perméabilité magnétique relative.

- Une forme plus générale (et plus proche de la réalité dans certains cas) serait de considérer que c'est une matrice (un tenseur) qui permet de spécifier des comportement magnétiques différents suivant les directions de l'espace.

Forme générale de la relation magnétique

► Ce qui a été dit du magnétisme l'a été pour un seul milieu homogène, mais les problèmes d'électromagnétisme mettent en situation plusieurs milieux, aussi est-il intéressant d'introduire des notations globales prenant ce fait en compte.

► On introduit les fonctions de perméabilité magnétique et d'aimantation

$$\begin{array}{ccccc} \mu & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+(H/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \mu(\vec{x}) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccccc} m & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+(A/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & m(\vec{x}) \end{array}$$

constantes par morceau, typiquement si l'espace E_3 est décomposé en trois parties D_m, D_a et D_e

$$\mu_(\vec{x}) = \begin{cases} \mu_1 & \text{dans } D \\ \mu_0 & \text{ailleurs} \end{cases} \; ; \; m(\vec{x}) = \begin{cases} m\ \vec{d} & \text{dans } D_a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et la relation magnétique s'écrit dans tout l'espace

$$\vec{b} = \mu\ \left(\vec{h} + \vec{m}\right)$$

Forme générale de la relation délectrique

- Ce qui a été dit du magnétisme pourrait être répété pour la relation diélectrique ; à ceci prêt qu'on se limite à une relation linéaire

$$\begin{array}{ccccc} \epsilon & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+(F/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \epsilon(\vec{x}) \end{array}$$

où la permittivité diélectrique ϵ est une fonction constante par morceau ; typiquement si D et D_e sont 2 parties complémentaires de E_3

$$\epsilon(\vec{x}) = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{dans} \quad D \\ \epsilon_0 & \text{ailleurs} \quad \text{i.e. dans } D_e \end{cases}$$

(comme l'était la perméabilité magnétique) pour écrire dans tout l'espace

$$\vec{d} = \epsilon\, \vec{e} = \epsilon_0\, \epsilon_r\, \vec{e}$$

où ϵ_r s'appelle la permittivité diélectrique relative.

- On n'introduit pas d'analogue de l'aimantation parce que cela ne semble pas exister.

Loi d'Ohm

- In fine, le courant électrique n'est maintenant plus considéré en totalité comme une source ; sa densité est séparée en deux parties

$$\vec{j} = \vec{j_s} + \vec{j_i}$$

la partie source $\vec{j_s}$ et l'autre partie $\vec{j_i}$ reliée (phénoménologiquement encore) au champ électrique dans certaines parties de l'espace correspondant aux domaines conducteurs de l'électricité.

- La conductivité est une fonction de l'espace

$$\begin{array}{cccc} \sigma & : & E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+(S/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \sigma(\vec{x}) \end{array}$$

et typiquement si D et D_e sont 2 parties complémentaires de E_3

$$\sigma(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{dans} \quad D \\ 0 & \text{ailleurs} \quad \text{i.e. dans } D_e \end{cases}$$

- La loi d'Ohm (locale) est

$$\vec{j_i} = \sigma \; \vec{e}$$

La densité de courant $\vec{j_i}$ n'est donc pas une source.

Charges électriques

▶ Du fait de la relation de conservation du courant électrique, la densité de charge doit-elle aussi être séparée en deux parties

$$\rho = \rho_s + \rho_i$$

de manière que séparément

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j_s} + \partial_t \rho_s = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j_i} + \partial_t \rho_i = 0$$

▶ À cette relation près ρ_s est une variable source indépendante ; mais on conviendra de ne traiter que les cas où

$$\rho_s = 0 \text{ et donc } \vec{j_s} = 0$$

▶ Par contre ρ_i dépend du champ électrique par

$$\partial_t \rho_i = -\vec{\nabla} \cdot (\sigma \; \vec{e})$$

Ce n'est pas une source mais une grandeur cherchée.

Le problème d'électromagnétisme linéaire mais complet

- En l'absence de mouvement macroscopique (ce qui a été supposé d'emblée) le problème d'électromagnétisme se présente donc comme la recherche de $\vec{b}$, $\vec{h}$, $\vec{e}$, $\vec{d}$, ρ_i, $\vec{j_i}$ solutions de

$$\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j_i} + \vec{j_s} + \partial_t \vec{d} & \text{Maxwell-Ampère} & E_3(A/m^2) \\
\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b} & \text{Maxwell-Faraday} & E_3(V/m^2 = T/s) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 & \text{Conservation de } \vec{b} & E_3(T/m) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{d} = \rho_i & \text{Gauss} & \mathbb{R}(Cb/m^3) \\
\vec{b} = \mu\,(\vec{h} + \vec{m}) & \text{Relation magnétique} & \\
\vec{d} = \epsilon\,\vec{e} & \text{Relation diélectrique} & \\
\vec{j_i} = \sigma\,\vec{e} & \text{Loi d'Ohm} &
\end{cases}$$

lorsque $\vec{j_s}$, $\vec{m}$, μ, ϵ sont des fonctions de l'espace connues.

De l'utilité de résoudre les équations de Maxwell

- Tant que les champs et induction électrique et magnétique ne sont pas associées à des phénomènes perceptibles (viz la lumière, la chaleur et le mouvement) il est parfaitement inutile de ≪ résoudre les équations de Maxwell. ≫

- Cette correspondance sera faite dans la leçon réservée à cette fin qui n'est pas celle-ci ; il est donc demandé d'accepter de différer la recherche du sens et de croire que l'aspect purement formel de cette leçon trouvera sa récompence ultérieurement.

Comportement à l'∞

- Il est convenu que les « situations physiques » sont telles que
  - Les densités de courant et de charge sont placées à distance finie de l'origine

$$\exists\ D \text{ domaine borné } \subset E_3 \text{ et contenant } \vec{0} \text{ tel que}$$
$$\vec{x} \notin D \Longrightarrow \vec{j}(t,\vec{x}) = \vec{0}\ ;\ \rho(t,\vec{x}) = 0$$

  - Les champs et inductions électrique et magnétique s'évanouissent à distance infinie

$$\lim_{|\vec{x}| \longrightarrow \infty} \vec{u}(t,\vec{x}) = \vec{0} \text{ pour } \vec{u} = \vec{e}, \vec{d}, \vec{h} \text{ ou } \vec{b}$$

- Mais ces situations physiques peuvent être « approximées » par des situations où ces règles ne sont pas respectées.

Par exemple quand on approxime le cas d'un aimant situé à l'intérieur d'une bobine alimentée en courant électrique par celui où l'aimant est placé dans une induction magnétique uniforme.

Comportement local

- Il est convenu que les situations physiques sont telles que
  - Les champs et inductions électriques et magnétiques ne peuvent prendre une valeur infinie en un quelconque point de l'espace

$$\forall\, \vec{x} \in E_3 \ : \ |\vec{u}| < \infty \text{ pour } \vec{u} = \vec{e}, \vec{d}, \vec{b}, \vec{h}$$

  - Les densités de charge et de courant peuvent prendre des valeurs infinies en un point de l'espace mais elles correspondent à des quantités finies
    - si D est un domaine quelconque de l'espace, la quantité de charge qu'il contient est

$$\left| \int_D \rho(t, \vec{x}) \; d\vec{x}^{\,3} \right| < \infty$$

    - si S est une surface quelconque dans l'espace, dont le champ de normales est noté $\vec{n}$, la quantité de courant qui la traverse est

$$\left| \int_S \vec{j}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \; d\vec{x}^{\,2} \right| < \infty$$

Lemmes globaux de Poincaré

- Un champ à rotationnel nul dans tout E_3 est un champ potentiel

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{0} \Longrightarrow \exists\ \varphi \text{ tel que } \vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$$

φ est appelé le potentiel scalaire du champ de vecteurs $\vec{u}$; il suffit de choisir

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int_0^1 \vec{x} \cdot \vec{u}(t, \alpha\, \vec{x})\ d\alpha$$

- Un champ à divergence nulle dans tout E_3 est un champ rotationnel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \Longrightarrow \exists\ \vec{v} \text{ tel que } \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

$\vec{v}$ est appelé le potentiel vecteur du champ de vecteurs $\vec{u}$; il suffit de choisir

$$\vec{v}(t, \vec{x}) = \int_0^1 \vec{u}(t, \alpha\, \vec{x}) \times \vec{x}\ \alpha d\alpha$$

Spécification des potentiels (1/2)

- Un potentiel scalaire φ tel que $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ s'évanouit à l'infini

$$\lim_{|\vec{x}| \longrightarrow \infty} \varphi(t, \vec{x}) = 0$$

(la formule $\varphi(t, \vec{x}) = \int_0^1 \vec{x} \cdot \vec{u}(t, \alpha\, \vec{x})\, d\alpha$ doit être corrigée pour cela.)

- Un potentiel vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ s'évanouit à l'infini

$$\lim_{|\vec{x}| \longrightarrow \infty} \vec{v}(t, \vec{x}) = \vec{0}$$

(la formule $\vec{v}(t, \vec{x}) = \int_0^1 \vec{u}(t, \alpha\, \vec{x}) \times \vec{x}\, \alpha d\alpha$ doit être corrigée pour cela)

- Les potentiels ne prennent de valeurs infinies en aucune position dans E_3

$$\forall\, \vec{x} \in E_3 \;:\; |\vec{v}| < \infty\; ;\; |\varphi| < \infty$$

Spécification des potentiels (2/2)

- Ces spécifications sont suffisantes pour que le potentiel scalaire soit défini de façon unique ;

- mais elles ne sont pas suffisantes pour le potentiel vecteur. Si

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

alors $\forall\ \psi$

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} + \vec{\nabla}\psi)$$

- L'unicité est obtenue en imposant par exemple

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

mais il y a d'autres possibilités. Ce point est revisité à propos des jauges.

Champs scalaires à laplacien ou d'alembertien nuls

- Le seul champ scalaire à laplacien nul s'évanouissant à l'infini est le champ nul

$$\Delta\,\psi = 0 \text{ dans } E_3 \quad \text{et} \quad \lim_{|\vec{x}|\longrightarrow\infty} \psi(\vec{x}) = 0 \implies \psi = 0$$

(cf. principe du maximum de Dirichlet appliqué à la sphère $|\vec{x}| < R$ lorsque $R \longrightarrow \infty$)

- le seul champ scalaire à d'alembertien s'évanouissant à l'infini est le champ nul

$$\Box\,\psi = 0 \text{ dans } E_3 \quad \text{et} \quad \lim_{|\vec{x}|\longrightarrow\infty} \psi(t,\vec{x}) = 0 \implies \psi = 0$$

Les ondes planes, c'est à dire les solutions d'une fonction à d'alembertien nul qui sont une superposition de fonctions de la forme

$$\begin{array}{rccl} \chi & : & \mathbb{R}\times E_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t,\vec{x}) & \longrightarrow & \chi(t,\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{k}\;t) \end{array}$$

où $\vec{k}$ est un vecteur quelconque de norme c

sont exclues ; et c'est normal puisque que la considération d'ondes planes n'est jamais faite autrement que comme approximation.

Potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique

- Où on les réintroduit dans le cas où il y a de la matière.

- De $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$ vient l'existence du potentiel vecteur magnétique $\vec{a}$ tel que

$$\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

La relation de Maxwell-Faraday devient alors $\vec{\nabla} \times (\vec{e} + \partial_t \vec{a}) = \vec{0}$ d'où se déduit l'existence du potentiel scalaire électrique φ tel que

$$\vec{e} = -\partial_t \vec{a} - \vec{\nabla}\varphi$$

Il reste alors à remplacer dans Maxwell-Ampère qui devient

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu}\,\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{j_s} - \sigma\left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi\right) - \epsilon\left(\partial^2_{tt}\vec{a} + \vec{\nabla}\partial_t\varphi\right)$$

puis dans Gauss qui devient

$$-\vec{\nabla} \cdot \epsilon\left(\vec{\nabla}\varphi + \partial_t \vec{a}\right) = \rho_i$$

Indetermination des potentiels

- Les potentiels ne sont pas définis de façon unique, il est possible
  - d'ajouter le gradient d'un potentiel scalaire ψ à $\vec{a}$
  - si on retranche simultanément dont la dérivée temporelle de ce potentiel ψ au potentiel électrique φ

- Ces couples de potentiels sont donc équivalents

$$(\vec{a}, \varphi) \Longleftrightarrow (\vec{a} + \vec{\nabla}\psi, \varphi - \partial_t \psi)$$

du point de vue des équations électromagnétiques on a bien

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \, \vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{\nabla}\psi) \right) &= \vec{j_s} - \sigma \left(\partial_t \vec{a} + \partial_t \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}(\varphi - \partial_t \psi) \right) \\
&- \epsilon \left(\partial^2_{tt}(\vec{a} + \vec{\nabla}\psi) + \vec{\nabla}\partial_t(\varphi - \partial_t \psi) \right)
\end{aligned}$$

et

$$-\vec{\nabla} \cdot \epsilon \left(\vec{\nabla}(\varphi - \partial_t \psi) + \partial_t(\vec{a} + \vec{\nabla}\psi) \right) = \rho_i$$

La jauge de Lorenz

- Où on la réintroduit mais dans le cas où $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$

- L'indétermination sur les potentiels est levée en utilisant une relation supplémentaire appelée une jauge. La première possible est la jauge de Lorenz déjà introduite précédemment

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi = 0$$

De cette façon $\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) = \vec{j} - \epsilon_0 \left(\partial^2_{tt} \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right)$ qui s'écrit

$$-\frac{1}{\mu_0} \vec{\Delta}\, \vec{a} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = \vec{j} - \epsilon_0 \left(\partial^2_{tt} \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right)$$

se transforme en

$$\vec{\Box}\, \vec{a} = \mu_0\, \vec{j} \text{ si } c = 1/\sqrt{\epsilon_0\, \mu_0}$$

De même $-\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \left(\vec{\nabla} \varphi + \partial_t \vec{a} \right) = \rho$ devient

$$\Box\, \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La jauge de Coulomb

- La seconde jauge qui est plus utile en présence de matière que la jauge de Lorenz est la jauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$$

elle conduit à

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\dfrac{1}{\mu(\vec{x})} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) + \epsilon(\vec{x}) \left(\partial_{tt}^2 \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right) + \sigma(\vec{x}) \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \right) = \vec{j_s} \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon(\vec{x}) \, \vec{\nabla} \varphi \right) + \rho = 0 \end{cases}$$

Et les potentiels solutions de ce système satisfont à cette jauge.

- La forme des équations est plus disymmétrique qu'avec la jauge de Lorenz ; son statut est plus suspect puisqu'un changement de sa source ρ en une position correspond à un changement instantané du potentiel scalaire électrique φ à une autre position, ce qu'on sait ne pas être possible.

Néanmoins cette jauge est celle qui sera presque systématiquement utilisée.

Potentiels électromagnétiques en présence de matière

La présence de la matière est traduite par des perméabilité magnétique et permittivité diélectrique dépendant de l'espace, on ne s'intéresse qu'à l'introduction des potentiels et

$$\vec{j} = -\sigma \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi\right) + \vec{j_s}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j} + \partial_t \vec{d}$
Maxwell Ampère

$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$
cons. induction

$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\partial_t \vec{b}$
Maxwell Faraday

$\vec{\nabla} \cdot \vec{d} = \rho$
Gauss

$\vec{b} = \mu(\vec{x})\ \vec{h}$
rel. magnétique

$\exists\ \vec{a}$ tq $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$ $\longrightarrow$ $\exists \varphi$ tq $\vec{e} = -\partial_t \vec{a} - \vec{\nabla}\varphi$

$\vec{d} = \epsilon(\vec{x})\ \vec{e}$
rel. diélectrique

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu(\vec{x})} \vec{\nabla} \times \vec{a}\right) + \epsilon(\vec{x}) \left(\partial_{tt}^2 \vec{a} + \vec{\nabla}\partial_t \varphi\right) = \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon(\vec{x}) \left(\vec{\nabla}\varphi + \partial_t \vec{a}\right)\right) + \rho = 0$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$
jauge de Coulomb

Le problème électromagnétique formulé en potentiels

- Au final le problème électromagnétique consiste à chercher les potentiels φ, $\vec{a}$ (s'évanouissant à l'infini) et la densité ρ_i (nulle à l'infini) solutions de

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu(\vec{x})}\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) + \epsilon(\vec{x})\left(\partial^2_{tt}\vec{a} + \vec{\nabla}\partial_t\varphi\right) - \sigma(\vec{x})\left(\partial_t\vec{a} + \vec{\nabla}\varphi\right) = \vec{j_s} \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon(\vec{x})\left(\vec{\nabla}\varphi + \partial_t\vec{a}\right)\right) + \rho_i = -\rho_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0 \end{array}\right.$$

dont les sources sont $\vec{j_s}$ et ρ_s ainsi que les données des matériaux (nature et géométrie) les fonctions μ, ϵ, σ.

- Ce problème a été qualifié de linéaire parce qu'on n'a utilisé que des relations constitutives linéaires pour le construire : il pourrait donc être compliqué encore.
- D'autre part le problème reste trop riche pour la majeure partie des applications, il convient donc de le découper suivant les usages.

Parties de l'électromagnétisme : statique

- La première approximation possible du problème d'électromagnétisme consiste à supposer que les sources ρ_s, $\vec{j_s}$ varie suffisamment lentement dans le temps pour que les termes comportant une dérivée dans le temps puissent ne pas être prises en compte. C'est l'approximation statique qui conduit à un découplage presque complet entre électricité et magnétisme. Il y a :
- l'électrostatique

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon(\vec{x}) \left(\vec{\nabla} \varphi \right) \right) + \cancel{\rho_i} = -\rho_s$$

où ρ_i a un rôle qui sera précisé lors de l'étude de ce cas mais qui peut être négligé en 1° approximation.
- la magnétostatique

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\dfrac{1}{\mu(\vec{x})} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) - \cancel{\sigma(\vec{x}) \left(\vec{\nabla} \varphi \right)} = \vec{j_s} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases}$$

où le commentaire fait pour ρ_i peut être reconduit pour le terme $-\sigma \vec{\nabla} \varphi$.

Électrocinétique

► Un autre régime statique consiste à chercher la forme que pourrait prendre $\vec{j_s}$ à partir de la donnée d'un domaine D_s qui supporte cette densité de courant et donc qui est conducteur de l'électricité sans pour autant que cette propriété de conduction apparaisse dans les équations électromagnétiques.

► Cela n'a de sens que dans un domaine D_s des courants sources qui serait non simplement connexe, par exemple un tore dans lequel on cherche $\vec{j_s}$ comme solution de

$$\begin{array}{lll} \vec{\nabla} \cdot \vec{j_s} = 0 & \text{dans} & D_s \\ \vec{j_s} = \vec{0} & \text{dans} & E_3 - D_s \text{ le complémentaire de } D_s \text{ dans } E_3 \\ \vec{j_s} \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur} & \partial D_s \text{ le bord de } D_s\,;\ (\vec{n} \text{ le champ de normales de} \\ & & \partial D_s \text{ orientées vers l'extérieur de } D_s) \end{array}$$

Il se trouve qu'il existe des solutions non-nulles éléments de « l'espace de cohomologie » du tore » ; mais l'analyse nous entraînerait trop loin.

Analyse dimensionnelle

- Si les dimensions caractéristiques en espace et en temps sont notées L et T, que les grandeurs caractéristiques de $\vec{a}$ et $\vec{\phi}$ sont notée $[A]$ et $[\Phi]$, les poids respectifs des différents termes de l'équation vectorielle sont

Courants

magnétique		de conduction		de déplacement		source
$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a} \right)$	$+$	$\sigma \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \right)$	$+$	$\epsilon \left(\partial^2_{tt} \vec{a} + \vec{\nabla} \partial_t \varphi \right)$	$=$	$\vec{j_s}$
$\approx \frac{[A]}{\mu_0 \ \mu_r L^2}$		$\approx \frac{\sigma[A]}{T}$		$\approx \frac{\epsilon_0 \epsilon_r [A]}{T^2}$		

- Les rapports des ordres de grandeur des courants de conduction et de déplacement à celui du courant magnétique sont donc (c est la vitesse de la lumière)

$$\frac{\text{courant magnétique}}{\text{courant de déplacement}} = \frac{[A]}{\mu_0 \ \mu_r L^2} / \frac{\epsilon_0 \epsilon_r [A]}{T^2} = \frac{1}{\mu_r \ \epsilon_r} \left(\frac{c}{L/T} \right)^2$$

$$\frac{\text{courant de conduction}}{\text{courant de déplacement}} = \sigma[A]/T / \frac{\epsilon_0 \epsilon_r [A]}{T^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 / T}$$

Induction

- En choisissant de prendre $\epsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$, le rapport des courant magnétique et de déplacement est le carré du rapport de la vitesse de la lumière c à une vitesse L/T fabriquée à partir des dimensions caractéristiques.

$$\text{déplacement} << \text{magnétique, conduction :}$$

- Et

$$\left(\frac{c}{L/T}\right)^2 > 100 \quad \text{parce que } L < 30\ m, \frac{1}{T} < 10^6 \text{ Hz}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0/T} > 100 \qquad \text{parce que } 1/T < 10^6 \text{ Hz}, \ \sigma > 10$$

Pour des dispositifs de taille inférieure à la dizaine de mètre et pour des fréquences inférieures au mégahertz le terme de courant de déplacement est négligeable devant les courants magnétiques et de conduction (quand ils existent) : c'est le problème d'induction électromagnétique.

Ondes électromagnétiques

- Si $L/T > c/10$ approximativement il n'est plus possible de négliger le courant de déplacement devant le courant magnétique.

- Par contre si la conductivité σ est de l'ordre de celle des métaux $\approx 10^6\ (\Omega\ m)^{-1}$ il est encore possible de négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.

- C'est la difficulté des problèmes d'ondes qui prennent une forme complexe dans laquelle deux zones sont à considérer suivant qu'il y a ou non des métaux.

- Il est cependant possible d'esquiver cette difficulté en ne s'intéressant pas au mode de production des ondes électromagnétiques mais seulement à leur propagation ; ce qui sera expliqué ultérieurement.

Exercice : modèle ampérien et coulombien de l'aimant

- La relation constitutive entre champ et induction magnétique dans un aimant est

$$\vec{b} = \mu_0\,(\vec{h} + \vec{M}_1)$$

où $\vec{M}_1$, l'aimantation en A/m, est un vecteur de grandeur et de direction fixe par rapport à l'aimant.
L'aimant est supposé placé dans le vide, et pour plus de facilité on introduit D_1 le domaine de l'aimant et la fonction

$$\begin{array}{rccl} \vec{m}_1 & : & E_3 & \longrightarrow & E_3(A/m) \\ & & \vec{x} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} \vec{M}_1 & \text{si } \vec{x} \in D_1 \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

pour disposer de $\vec{b} = \mu_0\,(\vec{h}+\vec{m}_1)$ dans E_3

- Appliquer les équations de Maxwell à cette situation.

- Est-il possible d'introduire un potentiel scalaire magnétique Ω tel que $\vec{h} = \vec{\nabla}\Omega$? Si oui le faire et formuler le problème dont Ω est solution. C'est le modèle coulombien de l'aimant.

- Introduire le potentiel vecteur magnétique $\vec{a}$ et formuler le problème dont Ω est solution. C'est le modèle ampérien de l'aimant.

Suite : le magnétisme terrestre

- En première approximation, le magnétisme terrestre peut être décrit comme celui qui correspondrait à un aimant sphérique de rayon $R < 6400km$ et d'aimantation m dirigée dans un axe nord-sud (magnétique $\approx$ géographique).

- Calculer $|\vec{m}|$ en fonction de R sachant que l'induction magnétique à Nancy est (approximativement) dirigé vers le sud avec un angle par rapport à l'horizontal de 65° et a une intensité de $47\mu T$

- Même si cette question déborde un peu des intentions de la leçon (en introduisant la notion de force et couple électromagnétique qui n'ont encore pas été définis dans le cadre du magnétisme), montrer qu'un aimant sphérique posé sur un plan roule et pivote jusqu'à ce que son pôle nord point vers le sud avec un angle par rapport à l'horizontal de 65°.

Exercice : Champ électrique entre deux cylindres coaxiaux à même potentiel

- Deux cylindres coaxiaux de géométrie axisymétrique sont portés aux potentiels V_1 et V_2 ; quelles sont les équations qui permettent le calcul du champ électrique dans tout l'espace.

- Donner une approximation de l'expression de ce champ en négligeant les effets de longueur finie des cylindres.

Exercice : Champ magnétique entre deux cylindres coaxiaux portant des courants électriques aller et retour

- les deux cylindres sont dirigés suivant $\vec{k_z}$ et ils portent les courants dont la densité est parallèle à cette direction, donner une expression *a priori* de cette densité ;

- Calculer alors le champ magnétique entre les cylindres et en dehors : par la relation d'Ampère-Maxwell sous forme différentielle puis sous forme intégrale (théorème d'Ampère).