Équations macroscopiques de la physique classique

 \sim

Compléments d'électromagnétisme

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

20 septembre 2018

Objectifs

- ▶ L'électromagnétisme est le corps de discipline qui permet d'expliquer entre autres le fonctionnement des moteurs électriques, des téléphones portable et des cuisinières à induction.
- ► Le premier objectif de la leçon est de construire un modèle du chauffage par induction électromagnétique ;
- ▶ Le second est de décrire un dispositif idéal élementaire d'émission et de réception d'ondes électromagnétiques : le dipole oscillant.

Induction électromagnétique = basses fréquences

Tel que défini leçon No 3, le modèle des basses fréquences en potentiel vecteur magnétique \vec{a} et potentiel scalaire électrique φ dans le cas où la permittivité diélectrique est celle du vide est

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a}\right) + s \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi\right) &= \vec{j_s} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \varphi\right) + \rho &= 0 \\ \vec{a} (t = 0, \vec{x}) &= \vec{0} \end{cases}$$

- les données sont : $\vec{j_s}$ la densité de courant source ; $\mu: E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $s: E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions de perméabilité et de conductivité électrique ;
- ▶ les grandeurs à calculer sont : \vec{a} , φ , ρ à partir desquelles

$$ec{b}=ec{
abla} imesec{a}$$
 , $ec{b}=\mu$ $ec{b}$; $ec{e}=-\partial_tec{a}-ec{
abla}arphi$

L'utilisation du modèle

- ► Ce modèle n'a d'intérêt pratique que si on sait
 - ightharpoonup relier *a priori* $\vec{j_s}$ à un courant électrique source i_s
 - retirer du modèle des élements permettant de calculer la tension v_s qui correspond à ce courant
 - exprimer les effets mécaniques et thermique des courants induits de densité

$$ec{j} = -s \left(\partial_t ec{a} + ec{
abla} arphi
ight)$$

► L'objet de ce qui suit est d'établir ce savoir.

Le régime sinusoïdal établi

Si la densité de courant source dépend sinusoïdalement du temps

$$\vec{j}_s(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \Re \left\{ \vec{j}_s(\vec{x}) \exp^{j\omega t} \right\}$$

alors \vec{a} , φ et ρ comportent une partie transitoire dépendant de leurs valeurs initiales qui les amènent vers leur dépendance sinusoïdale de régime sinusoïdal établi

$$\vec{a}(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \, \Re \left\{ \underline{\vec{a}}(\vec{x}) \, \exp^{j\omega t} \right\} \quad ; \quad \varphi(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \, \Re \left\{ \underline{\varphi}(\vec{x}) \, \exp^{j\omega t} \right\}$$

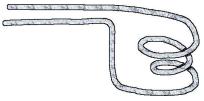
$$\rho(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \, \Re \left\{ \underline{\rho}(\vec{x}) \, \exp^{j\omega t} \right\}$$

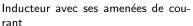
Le modèle devient alors

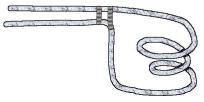
$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) + s \left(j \omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) & = & \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) + \underline{\rho} & = & 0 \end{array} \right.$$

Relation entre densité de courant et courant source

▶ Une première difficulté est de définir le domaine inducteur dans lequel circule le courant source :







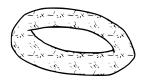
Ajout de deux conducteurs aller et retour l'un sur l'autre



Seul le côté inducteur est considéré; les amenées coté générateur sont supposées être suffisamment proches pour ne générer aucun champ source.

L'inducteur est un tore

Cette approximation de déconnexion entre les « côtés » inducteur et générateur fait apparaître le domaine de l'inducteur comme un tore D_s



Et la densité de courant source $\underline{\vec{j}_s}$ peut être supposée déjà satisfaire à

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{\underline{j_s}} = 0 & \text{dans} & D_s \\ \vec{\underline{j_s}} = \vec{0} & \text{dans} & E_3 - D_s \text{ le complémentaire de } D_s \text{ dans } E_3 \\ \vec{\underline{j_s}} \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur} & \partial D_s \text{ le bord de } D_s \text{; (\vec{n} le champ de normales de } \\ & \partial D_s \text{ orientées vers l'extérieur de } D_s) \end{array}$$

ainsi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\underline{j}}_s = 0 \text{ dans } E_3$$

Le tore coupé

Il reste à connecter la densité de courant source \underline{j}_s au courant source \underline{i}_s ; si le tore est coupé (de façon quelconque pourvu que le tore soit connexifié) suivant une surface Σ de manière qu'un écartement fasse apparaître 2 nouveaux bords Σ_- et Σ_+ dans le tore



Si
$$\int_{\Sigma} \vec{j}_{s} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^{2} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Sigma_{-}} \vec{j}_{s} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^{2} = -\int_{\Sigma_{+}} \vec{j}_{s} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^{2}$$
 on pose

$$\int_{\Sigma} \underline{\vec{j}}_{s} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^{2} = \underline{i}_{s}$$

 \vec{n} champ de normales extérieur à D_s coupé; $d\vec{x}^2$ notation pour l'élément de surface. Cette relation est indépendante de la position de Σ puisque $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s = 0$.

L'espace de cohomologie du tore

Finalement il reste à éliminer toute indétermination sur $\vec{j_s}$; cela peut être fait en lui donnant une régularité maximum avec la condition

$$ec{
abla} imes ec{\underline{j}_s} = ec{0} \; \mathsf{dans} \; D_s$$

L'ensemble de ces conditions peuvent être réunies par l'invocation d'un champ $\vec{u_s}$ ne dépendant que de la géométrie de D_s et défini par

$$\begin{array}{lll} \vec{\nabla} \cdot \vec{u_s} = 0 & \text{dans} & D_s \\ \vec{u_s} = \vec{0} & \text{dans} & E_3 - D_s \ ; & \int_{\Sigma_-} \vec{u_s} \cdot \vec{n} \ d\vec{x}^2 = - \int_{\Sigma_+} \vec{u_s} \cdot \vec{n} \ d\vec{x}^2 = 1 \\ \vec{u_s} \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur} & \partial D_s & \vec{\nabla} \times \vec{u_s} = 0 \ \text{dans} \ D_s \end{array}$$

Un tel champ existe et est unique si D_s est un tore : il s'appelle l'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore. La relation cherchée est alors

$$\underline{\vec{j}}_s = \underline{i}_s \ \vec{u}_s$$

Le tore axisymétrique

Les vecteurs de base des coordonnées cylindriques sont

$$\vec{k}_r = \cos\theta \ \vec{k}_1 + \sin\theta \ \vec{k}_2$$
 ; $\vec{k}_\theta = -\sin\theta \ \vec{k}_1 + \cos\theta \ \vec{k}_2$; $\vec{k}_z = \vec{k}_3$

la position est $\vec{x}=r$ \vec{k}_r+z \vec{k}_z . Un tore axisymétrique est décrit par

$$D_t = \{r \ \vec{k}_r \ + z \ \vec{k}_3 \ \text{avec} \ (r - R)^2 + z^2 < a^2 \ (\ \text{où} \ 0 < a < R) \}$$

le champ de vecteur ¹

$$\vec{u}_{D_t}(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} u_{D_t} \ \vec{k}_{\theta} & \text{si} \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{array} \right. \ \, \vec{x} \in D_t \ \, ; \\ u_{D_t} = \frac{1}{r \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{\rho \ d\rho}{R + \rho \ \cos\phi} }$$

satisfait à

$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_{D_t} = \vec{0} \qquad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{D_t} = 0 \text{ dans } D_t \\ \vec{u}_{D_t} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D_t \quad ; \quad \int_{\Sigma_-} \vec{u}_{D_t} \cdot \vec{n} \ d\vec{x}^2 = 1$$

La construction de $\tilde{\mathbf{u}}_s$ pour un tore quelconque

On admettra que l'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore peut être construit à partir du problème en potentiel sur le tore coupé de la recherche de χ solution de

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta\chi=0 & {\rm dans} & D_c \ {\rm coup\acute{e}} \\ \partial_n\chi=0 & {\rm sur} & \partial D_c \ {\rm non} \ {\rm coup\acute{e}} \\ \chi=1 & {\rm sur} & \Sigma_+ \\ \chi=0 & {\rm sur} & \Sigma_- \end{array} \right.$$

et alors

$$\vec{u}_{s} = \frac{\nabla \chi}{\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \chi \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^{2}}$$

Une propriété intéressante est que

$$\forall \, \vec{j} \, \, \text{tel que} \, \, \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \, \, \text{dans} \, \, D_c \, : \, \, \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \, \, d\vec{x}^2 = \frac{\int_{D_c} \vec{u} \cdot \vec{j} \, \, d\vec{x}^3}{\int_{D_c} |\vec{u}|^2 \, d\vec{x}^3}$$

Le courant à travers Σ s'exprime alors en terme d'intégrales de volume (ce qui est intéressant si on utilise des éléments finis).

Expression des puissances active et réactive (1/2)

Le point de départ est l'équation

$$ec{
abla} imes \left(rac{1}{\mu} ec{
abla} imes rac{ec{a}}{2}
ight) + s \left(j\omega \ ar{\underline{a}} + ec{
abla} \underline{ec{\varphi}}
ight) = \underline{i}_s \ ec{u}_s$$

Le produit scalaire avec $(j\omega \, \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\varphi)^*$ fournit

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) \cdot (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* + s \left| j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 = \underline{i}_s \ \vec{u}_s \cdot (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^*$$

La relation d'analyse vectorielle

$$\vec{
abla}\cdot(\vec{u} imes\vec{v})=(\vec{
abla} imes u)\cdot\vec{v}-(\vec{
abla} imes\vec{v})\cdot\vec{u}$$

permet d'écrire

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) \cdot (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi})^* = \vec{\nabla} \cdot \left(\left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) \times (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi})^*\right) + \frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right)^*}_{= -j\omega \ \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}^*}$$

Expression des puissances active et réactive (2/2)

Compte tenu que les champs de vecteur \vec{a} et $\vec{\nabla} \varphi$ sont suffisamment décroissants à l'infini pour que

$$\int_{E_3} \vec{\nabla} \cdot \left(\left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) \times (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* \right) \ d\vec{x}^3 = 0$$

il vient

$$\underline{i}_{s} \int_{E_{3}} \vec{u}_{s} \cdot (j\omega \, \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi})^{*} \, d\vec{x}^{3} = \int_{E_{3}} s \left| j\omega \, \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi} \right|^{2} \, d\vec{x}^{3} - j\omega \int_{E_{3}} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^{2} \, d\vec{x}^{3}$$
soit encore en conjuguant, le bilan de puissances

$$\underbrace{\left(\int_{E_{3}} \vec{u}_{s} \cdot \left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right) \ d\vec{x}^{3}\right)}_{= \ \underline{v}_{s}} \underbrace{j^{*}_{s} = \underbrace{\int_{E_{3}} s \left|j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right|^{2} \ d\vec{x}^{3}}_{= P} + j\underbrace{\omega \int_{E_{3}} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^{2} \ d\vec{x}^{3}}_{= Q}$$

Les trois quantités \underline{v}_s , P et Q sont

- <u>v</u>_s la force électromotrice dans l'inducteur qui maintient le courant <u>i</u>_s;
- ▶ P la puissance Joule dissipée dans la ou les charges ;
- Q la puissance réactive de l'ensemble.

La puissance active

Si le seul domaine conducteur est D_c de conductivité σ

$$s(\vec{x}) = \left\{ egin{array}{ll} \sigma & \mathrm{si} & \vec{x} \in D_c \\ 0 & \mathrm{sinon} \end{array} \right.$$

alors

$$P = \int_{D_c} \sigma \left| j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 \ d\vec{x}^3$$

soit, compte tenu que

$$\underline{\vec{e}} = -(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}) \text{ et } \underline{\vec{j}} = \sigma\underline{\vec{e}}$$

$$P = \int_{D_c} \sigma |\underline{\vec{e}}|^2 d\vec{x}^3 = \int_{D_c} \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma} d\vec{x}^3$$

qui est bien l'expression attendue : la somme sur le domaine conducteur du rapport du carré de la densité de courant à la conductivité.

La force électromotrice dans l'inducteur (1/3)

Compte tenu que

$$\vec{e} = -(j\omega \ \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi)$$
 et $\vec{u_s} = 0$ en dehors de D_s

la force électromotrice dans l'inducteur est

$$\underline{v}_s = -\int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{u}_s \ d\vec{x}^3$$

Si cet inducteur était une spire de fibre moyenne Γ définie par

$$ec{X}$$
 : $[0,1]$ \longrightarrow E_3 ; $ec{ au}(s)=rac{\dot{ec{X}}(s)}{|\dot{ec{X}}(s)|}$ la tangente s \longrightarrow $ec{X}(s)$

et de section circulaire de rayon *a* très petit alors au voisinage de cette fibre moyenne

$$\vec{u_s} pprox rac{1}{\pi a^2} \ ec{ au}$$

de plus

$$\forall f : \int_{D_s} f(\vec{x}) d\vec{x}^3 \approx \pi a^2 \int_0^1 f(\vec{X}(s)) |\dot{\vec{X}}(s)| ds$$

La force électromotrice dans l'inducteur (2/3)

Il vient donc que

$$\underline{v}_{s} pprox - \int_{0}^{1} \underline{\vec{e}} \left(\vec{X}(s) \right) \cdot \vec{\tau} \ ds = - \int_{\Gamma} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{\tau} \ d |\vec{x}|$$

la forme symbolique de cette expression suggère l'utilisation de la formule de Stokes : si Γ est le bord d'une surface S munie d'un champ de normales \vec{n}

$$\underline{v}_s \approx -\int_S \vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2$$

Compte tenu de la relation de Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \times \vec{\underline{e}} = -j\omega \; \vec{\underline{b}}$

$$\underline{v}_s \approx j\omega \int_s \underline{\vec{b}} \cdot \vec{n} \ d\vec{x}^2$$

la force électromotrice est en écriture d'amplitudes complexes la dérivée temporelle du flux de l'induction magnétique à travers la surface dont la spire est le bord. Elle vient compenser la force contre-électromotrice qui est l'opposée de cette quantité.

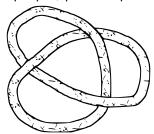
La force électromotrice dans l'inducteur (3/3)

L'analyse précédente a été faite pour montrer que

$$\underline{v}_s = -\int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{u_s} \ d\vec{x}^3$$

correspondait à ce qu'on attendait d'une force électromotrice dans le cadre d'une approximation où le résultat était connu *a priori*; mais bien cette expression qui est première parce que :

- les inducteurs ne sont pas nécessairement de section petite;
- même s'ils l'étaient il pourraient avoir une forme où la formule de Stokes ne s'applique pas, par exemple sur un nœud



La puissance réactive

Dès lors que \underline{v}_s est identifiée à une force électromotrice, la partie imaginaire de \underline{v}_s i_s^* est la puissance réactive. De plus l'examen de sa forme explicite

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^2 d\vec{x}^3$$

soit encore (compte tenu que $\vec{\underline{b}} = \vec{\nabla} \times \vec{\underline{a}}$)

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{|\vec{\underline{b}}|^2}{\mu} d\vec{x}^3$$

la fait apparaître comme le produit de la pulsation par le double de la moyenne quadratique temporelle de l'énergie magnétique

$$\int_{E_3} \frac{|\vec{\underline{b}}|^2}{2\mu} \ d\vec{x}^3$$

ce qui est conforme à l'idée qu'on s'en fait.

Le rôle du potentiel scalaire électrique

Le modèle complet

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) + s \left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) & = & \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) + \underline{\rho} & = & 0 \end{array} \right.$$

se découple en deux parties : d'abord

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j \omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) & = & \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = & 0 \end{array} \right.$$

dans laquelle le potentiel scalaire électrique $\underline{\varphi}$ est une variable annexe définie uniquement dans D_c dont la fonction est d'assurer la cohérence de la 1° équation et ensuite

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \underline{\rho} = 0$$

pour laquelle le statut de potentiel scalaire électrique est rendu à $\underline{\varphi}$ de part son lien avec la densité de charge électrique ρ .

Le potentiel électrique dans un domaine conducteur

La divergence de $\vec{\nabla} imes \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} imes \vec{\underline{a}} \right) + s \left(j \omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) = \underline{\vec{j}_s}$ s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \left(s \left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) \right) = 0$$

Si le domaine conducteur est comme précédemment un domaine D_c et donc si s est une fonction discontinue (valant σ dans D_c et 0 ailleurs) il faut que (compte tenu que $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$)

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\varphi} = 0$$
 dans D_c et $\left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D_c

où ∂D_c est le bord de D_c et \vec{n} un champ de normales extérieures. Ces conditions sur $\underline{\varphi}$ dans D_c et sur ∂D_c signifient que le courant induit

$$\vec{j} = s \left(-j\omega \ \underline{\vec{a}} - \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right)$$

est à divergence nulle dans D_c et que de plus ce courant ne « sort pas » de D_c .

Le potentiel scalaire électrique dans E_3

Le potentiel scalaire électrique est de plus solution de

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \underline{\rho} = 0 \text{ dans } E_3$$

ce qui impose

$$\rho = 0$$
 dans D_c

L'intérieur d'un conducteur électrique est électriquement neutre (comme en électrostatique).

Avec l'hypothèse qu'il n'y a pas de charges électriques en dehors du conducteur ²

$$\rho = 0$$
 dans $E_3 - D_c$

il ne reste comme possibilité pour les charges électriques que d'être réparties en surface de ∂D_c .

^{2.} Cet extérieur est assimilé à un vide total; sinon il pourrait y en avoir.

La conservation du courant induit

le potentiel φ peut être calculé sur $E_3 - D_c$ par le problème

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) = 0 & \text{dans} \quad E_3 - D_c \\ \underline{\varphi}|_{\text{c\^{o}t\'e} \ E_3 - D_c} = \underline{\varphi}|_{\text{c\^{o}t\'e} \ D_c} & \text{sur} \quad \partial (E_3 - D_c) = \partial D_c \end{cases}$$

Ainsi la densité superficielle de charges (C/m^2) sur ∂D_c est

$$\rho_s = \epsilon_0 \left(\partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côt\'e } D_c} - \partial_n \underline{\varphi}|_{\text{côt\'e } E_3 - D_c} \right)$$

Ce qui assure la conservation du courant induit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + j\omega \ \rho = 0$$

la densité de charge est alors une distribution de la forme

$$\rho(\vec{x}) = \rho_{\mathsf{s}} \; \delta_{\partial D_{\mathsf{c}}}$$

dans le sens que

$$\forall \ \psi : \int_{E_3} \rho \ \psi \ d\vec{x}^3 = \int_{\partial D_c} \rho_s \ \psi \ d\vec{x}^2$$

Les effets capacitifs

Les statuts des potentiel scalaire électrique $\underline{\varphi}$ et densité de charge ρ étant définis, si

$$ec{
abla}\cdot\left(\epsilon_0ec{
abla}\underline{ec{arphi}}
ight)+\underline{
ho}=0$$
 dans E_3

alors

$$\int_{E_3} \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) \; \underline{\varphi}^* \; d\vec{x}^3 + \int_{E_3} \underline{\rho} \; \underline{\varphi}^* \; d\vec{x}^3 = 0$$

d'où

$$\int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \ \underline{\varphi}^* \ d\vec{x}^2 = \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla} \underline{\varphi}|^2 \ d\vec{x}^3$$

c'est le double de la moyenne quadratique temporelle de l'énergie électrostatique.

La puissance correspondant aux effets capacitifs est alors

$$Q' = \omega \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla} \underline{\varphi}|^2 d\vec{x}^3 = \omega \int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \, \underline{\varphi}^* \, d\vec{x}^2$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (1/4)

Si le courant source \underline{i}_s , la géométrie du tore D_s approximant l'inducteur ainsi que celle du domaine conducteur D_c qui est le lieu des courants induits sont donnés ainsi que la valeur σ de la conductivité électrique dans D_c (donc la fonction de conductivité s est définie) alors :

▶ l'élément générateur de l'espace de cohomologie de l'inducteur est calculé par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{u_s} = \vec{0} \; ; \; \vec{\nabla} \cdot \vec{u_s} = 0 \quad \text{dans} \quad D_s \\ \vec{u_s} = \vec{0} \qquad \qquad \text{dans} \quad E_3 - D_s \\ \vec{u_s} \cdot \vec{n} = 0 \qquad \qquad \text{sur} \quad \partial D_s \end{array} \right.$$

▶ la densité de courant source est

$$\underline{\vec{j}}_s = \underline{i}_s \ \vec{u}_s$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (2/4)

▶ Le potentiel vecteur magnétique $\underline{\vec{a}}$ (défini dans E_3) et la partie du potentiel scalaire électrique qui est définie dans D_c sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) + s \left(j \omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) & = & \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} & = & 0 \end{array} \right.$$

▶ La partie du potentiel scalaire électrique définie dans $E_3 - D_c$ se calcule par

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) + \rho = 0 & \text{dans} \quad E_3 - D_c \\ \underline{\varphi}|_{\text{côté } E_3 - D_c} = \underline{\varphi}|_{\text{côté } D_c} & \text{sur} \quad \partial (E_3 - D_c) = \partial D_c \end{cases}$$

et la densité superficielle de charges électriques est

$$\rho_{\rm s} = \epsilon_0 \left(\partial_n \underline{\varphi} |_{{\rm c\^{o}t\acute{e}} \ D_c} - \partial_n \underline{\varphi} |_{{\rm c\^{o}t\acute{e}} \ E_3 - D_c} \right)$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (3/4)

▶ La force électromotrice dans l'inducteur est maintenant

$$\underline{v}_s = -\int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{u}_s \ d\vec{x}^3$$

Les puissances active et réactive-inductive peuvent être calculées de deux façons, sur l'inducteur et directement sur la charge et dans l'espace par

$$P + j \ Q = \underline{v}_s \ \underline{i}_s^* = \int_{D_c} \sigma \left| j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 \ d\vec{x}^3 + j \ \omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^2 \ d\vec{x}^3$$

La puissance réactive-capacitive peut être calculée également de deux façons

$$Q' = \omega \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla} \underline{\varphi}|^2 d\vec{x}^2 = \omega \int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \, \underline{\varphi}^* \, d\vec{x}^2$$

Le modèle d'induction formulé en courant source (4/4)

► La résistance de l'inducteur est prise en compte de façon externe au modèle par une formule du type

$$R_s = rac{ ext{longueur fibre moyenne}}{ ext{conductivit\'e} imes ext{surface de passage du courant}}$$

► L'inductance du dispositif inducteur+charge est

$$Z = R_s + \frac{P + (Q - Q')j}{|\underline{i}_s|^2}$$

c'est la grandeur utile pour dimensionner l'alimentation électrique.

▶ La densité de puissance Joule dans la charge q (en W/m^3) est

$$q = \sigma \left| j\omega \ \underline{ec{a}} + ec{
abla} \underline{ec{\varphi}}
ight|^2$$

c'est la grandeur utile d'entrée d'un modèle de transfert de chaleur.

Mécanique

- ► Comme la possibilité d'un mouvement n'a pas été introduite dans le problème d'induction posé au départ, on ne trouve pas de puissance mécanique.
- ► L'analyse des milieux en mouvement se fait en modifiant la loi d'Ohm comme

$$\vec{j} = s \; \left(\vec{e} + \vec{v} \times \vec{b} \right)$$

où \vec{v} est le champ de vitesses eulérien de ce mouvement. L'analyse correspondant à cette modification est faite Leçon 7 de TIEM sous Arche et son résultat principal est que la densité de force électromagnétique dans tout l'espace est de la forme

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{b} + \vec{j_s} \times \vec{b} + \frac{\vec{b}^2}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu} \right)$$

qui est la divergence du tenseur des efforts de Maxwell

$$\overline{\overline{T}}_{ik} = \frac{b_i \ b_k}{\mu} - \delta_{ik} \frac{b_l \ b_l}{2\mu}$$

Ondes électromagnétiques = hautes fréquences

▶ Sous la condition de conservation de la charge électrique

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

les potentiels scalaire électrique φ et vecteur magnétique \vec{a} sont également solutions de

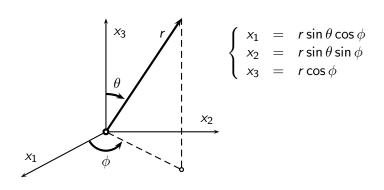
$$\vec{\Box} \ \vec{a} = \mu_0 \ \vec{j} \quad ; \quad \Box \ \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

οù

$$\Box \phi = \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \phi - \Delta \phi \; ; \; \vec{\Box} \vec{a} = \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \vec{a} - \vec{\Delta} \vec{a}$$

▶ La question est de décrire le mode de production des ondes électromagnétique, c'est à dire ρ et \vec{j} . Le plus élémentaire d'entre eux, à partir duquel il est possible d'en construire des dispositifs réel, est le dipole oscillant.

Système de coordonnées



$$\begin{cases} \vec{k}_r = \sin\theta \left(\cos\phi \ \vec{k}_1 + \sin\phi \ \vec{k}_2\right) + \cos\theta \ \vec{k}_3 \\ \vec{k}_\theta = \cos\theta \left(\cos\phi \ \vec{k}_1 + \sin\phi \ \vec{k}_2\right) - \sin\theta \ \vec{k}_3 \\ \vec{k}_\phi = -\sin\phi \ \vec{k}_1 + \cos\phi \ \vec{k}_2 \end{cases}$$

Onde produite par un dipôle élémentaire rayonnant

▶ Un brin de fil conducteur de l'électricité de longueur *L* à section circulaire de rayon *d* est considéré. Un courant électrique parcourt le brin de fil dans le sens de sa longueur, les sources sont alors

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = i(t) \ \vec{k}_3 \begin{cases} 1/(\pi d^2) & \text{si } x_1^2 + x_2^2 < d^2 \text{ et } -L/2 < x_3 < L/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\rho(t, x) = q(t) \ (\delta(\vec{x}, L/2) - \delta(\vec{x}, -L/2))/(\pi d^2)$$

οù

 \blacktriangleright $\delta(\vec{x},u)$ est la distribution de Dirac définie par : si ψ est une fonction test scalaire définie sur E_3

$$\forall \ \psi \ : \ \int_{E_3} \psi(\vec{x}) \ \delta(\vec{x}, u) \ dx^3 = \left\{ \begin{array}{ll} \psi(x_1 \ \vec{k}_1 + x_2 \ \vec{k}_2 + u \ \vec{k}_3) & \text{si} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \ x_1^1 + x_2^2 < d^2$$

ightharpoonup Le courant i le long du brin de fil et la charge électrique q des deux extrémités du brin sont liés par

$$\frac{dq}{dt} = i \Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0$$

de manière que la jauge de Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi = 0$ soit vérifiée.

Onde produite par un dipôle élémentaire : 1° approximation

- ▶ Un tel système n'est concevable que sur le papier : toutefois des antennes existant réellement peuvent être approchés par la superposition de tels dipôles élémentaires et elles ont un comportement très voisin de celui de leur composant élémentaire.
- ▶ Au loin du dipôle $|\vec{x}| >> L, d$, les potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique prennent la forme

$$\vec{a}(t, \vec{x}) \approx \frac{\mu_0 L}{4\pi} i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{k}_3}{|\vec{x}|}$$

$$arphi(t,ec{x})pprox rac{L}{4\pi\epsilon_0}(ec{x}\cdotec{k}_3)\left(rac{q\left(t-rac{|ec{x}|}{c}
ight)}{|ec{x}|^3}+rac{i\left(t-rac{|ec{x}|}{c}
ight)}{c~|ec{x}|^2}
ight)$$

Ces approximations satisfont exactement la jauge de Lorenz. Elles comportent des termes qui peuvent se classer en puissances croissantes de $1/|\vec{x}|$.

3° approximation : l'onde plane

▶ Une approximation supplémentaire est encore possible, si

$$ec{x} = X \ ec{k_1} + \delta ec{x} \quad ext{ avec } |\delta ec{x}| << X$$
 i.e. $|X \ ec{k_1} + \delta ec{x}| pprox X + \delta x_1$ à l'ordre 1 en $|\delta ec{x}|$

alors les champs magnétique et électrique deviennent

$$\vec{h}(t, X \vec{k}_1 + \delta \vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi c X} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{X}{c} - \frac{\delta x_1}{c} \right) \vec{k}_2$$

$$\vec{e}(t, X \vec{k}_1 + \delta \vec{x})) \approx -\frac{\mu_0 L}{4\pi X} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{X}{c} - \frac{\delta x_1}{c} \right) \vec{k}_3$$

Ils ne dépendent plus que de δx_1 la coordonnée selon la direction \vec{k}_1 de $\delta \vec{x}$.

Onde plane

► Si l'amplitude du champ magnétique

$$f(x) = \frac{L}{4\pi \ c \ X} \frac{di}{dt} \left(t - \frac{X}{c} \right)$$

est choisie comme entrée plutôt que le courant i alors l'onde plane est définie par

$$\begin{cases} \vec{h}'(t, \vec{x}') = f\left(t - \frac{x_1'}{c}\right) \vec{k}_2 \\ \vec{e}'(t, \vec{x}') = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} f\left(t - \frac{x_1'}{c}\right) \vec{k}_3 \end{cases}$$

et

$$ec{h}(t,X \ ec{k}_1 + \delta ec{x}) pprox ec{h}'(t,\delta ec{x}) \quad ; \quad ec{e}(t,X \ ec{k}_1 + \delta ec{x})) pprox ec{e}'(t,\delta ec{x})$$

Ce qui fait apparaître l'onde plane comme une approximation locale au voisinage de $X\vec{k}_1$ de l'onde générée par le dipole.

L'onde du dipôle

▶ Si $|\vec{x}| << d, L$ et que la 1° approximation des potentiels

$$\vec{a}(t, \vec{x}) \approx \frac{\mu_0 L}{4\pi} i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{k}_3}{|\vec{x}|}$$

$$\varphi(t, \vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi\epsilon_0} (\vec{x} \cdot \vec{k}_3) \left(\frac{q \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{|\vec{x}|^3} + \frac{i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{c |\vec{x}|^2} \right)$$

est retenue alors les champs électriques et magnétiques correspondant sont

$$ec{h}(t, ec{x}) pprox -rac{L}{4\pi} rac{di}{c} \left(t - rac{|ec{x}|}{c}
ight) rac{ec{x} imes ec{k}_3}{|ec{x}|^2} \ ec{e}(t, ec{x}) pprox -rac{\mu_0}{4\pi} rac{di}{dt} \left(t - rac{|ec{x}|}{c}
ight) rac{1}{|ec{x}|} \left(ec{k}_3 - rac{ec{k}_3 \cdot ec{x}}{|ec{x}|^2} ec{x}
ight)$$

► Ces champs électriques et magnétiques définissent l'onde émise par le dipôle oscillant. Et cette onde est appelée un rayonnement.

Puissance du rayonnement

- ► La puissance que le dispositif qui impose le courant *i* dans le brin de fil du dipôle contribue à augmenter l'énergie électromagnétique dans tout l'espace (supposé vide).
- ► Cette énergie s'écrit a priori

$$W(t) = \int_{E_3} \left(\frac{1}{2} \mu_0 \left(\vec{h}(t, \vec{x}) \right)^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\vec{e}(t, \vec{x}) \right)^2 \right) d\vec{x}^3$$

► La puissance instantanée qui correspond à l'énergie électromagnétique est

$$p(t) = \frac{dW}{dt}(t)$$

▶ Mais il n'est pas possible d'appliquer *verbatim* cette façon de procéder parce les expressions de \vec{e} et \vec{h} ne sont valables qu'à des distances $|\vec{x}|$ grandes devant les dimensions du dipôle alors que l'intégration s'étend jusqu'à lui.

Tactique d'évitement de la difficulté

- ▶ Il faudrait donc revenir sur l'approximation de \vec{e} et \vec{h} afin de retrouver des expressions valable dans le dipôle, mais il est possible d'exploiter les propriétés de propagation de l'énergie électromagnétique pour éviter ce travail.
- ightharpoonup Une sphère de rayon R centrée sur l'origine (ou se trouve le dipôle) étant définie, l'extérieur de cette sphère est noté

$$D(R) = \{\vec{x} \in E_3 \text{ tq } |\vec{x}| > R\}$$

► La partie de l'énergie électromagnétique totale contenue dans *D* est

$$W_D(t,R) = \int_{D(R)} \left(\frac{1}{2} \mu_0 \; (\vec{h}(t,\vec{x}))^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \; (\vec{e}(t,\vec{x}))^2 \right) \; d\vec{x}^3$$

▶ Si R >> L, d alors les expressions de \vec{e} et \vec{h} peuvent être utilisées dans D(R) et tous calculs faits

$$W_D(t,R) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_{R}^{\infty} \left(\frac{di}{dt} (t - \frac{r}{c})\right)^2 dr$$

Puissance rayonnée

► Puisque formellement

$$\int_{R}^{\infty} \left(\frac{di}{dt} (t + \Delta t - \frac{r}{c}) \right)^{2} dr = \int_{R-c}^{\infty} \left(\frac{di}{dt} (t - \frac{r}{c}) \right)^{2} dr$$

il devient possible d'obtenir l'énergie totale à l'instant t

$$W(t) = W_D(t,0)$$

par l'énergie dans D à un instant ultérieur t + R/c, soit

$$W(t) = W_D(t + R/c, R) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_R^{\infty} \left(\frac{di}{dt} (t - \frac{r - R}{c}) \right)^2 dr$$

▶ d'où par changement de variable entre r et $\alpha = t - (r - R)/c$

$$W(t) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_{-\infty}^t \left(\frac{di}{dt}(\alpha)\right)^2 \frac{d\alpha}{c}$$

► La puissance rayonnée est alors

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi \ c)^2} \left(\frac{di}{dt}(t)\right)^2$$

Puissance rayonnée

► Pour un rayonnement monochromatique

$$i(t) = \sqrt{2} \Re{\{\underline{I} \exp^{i\omega t}\}}$$
 avec $(\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T})$

Cette puissance devient

$$p(t) = P + \text{ terme fluctuant en } 2\omega$$

avec

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(cT)^2} |\underline{I}|^2 = R_{\text{ray}} |\underline{I}|^2$$

► La « résistance de rayonnement » est définie par

$$R_{\mathsf{ray}} = \frac{2\pi}{3} \, z_0 \, \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$$

l'expression comporte les longueur d'onde et impédance caractéristique du vide

$$\lambda = c \ T \ ; \ z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$$

Direction de rayonnement

- ► Le rayonnement du dipôle oscillant se fait radialement mais pas de façon isotrope.
- ▶ Pour mettre ceci en évidence commodément il est intéressant d'introduire le vecteur de Poynting. En partant de

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{D(R)} \left(\mu_0 \ \vec{h}(t, \vec{x}) \cdot \partial_t \vec{h}(t, \vec{x}) + \epsilon_0 \ \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \partial_t \vec{e}(t, \vec{x}) \right) \ d\vec{x}^3$$

par injection directe des relations de Maxwell-Faraday, de Maxwell-Ampère et en tenant compte de ce que D ne comporte aucune source, il vient

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{D(R)} \left(-\vec{h}(t, \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{e}(t, \vec{x}) + \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{h}(t, \vec{x}) \right) d\vec{x}^3$$

Vecteur de Pointing (1/2)

▶ en utilisant successivement la relation d'analyse vectorielle

$$ec{
abla}\cdot(ec{h} imesec{e})=ec{e}\cdotec{
abla} imesec{h}-ec{h}\cdotec{
abla} imesec{e}$$

et le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{\partial D(R)} \vec{h}(t, \vec{x}) \times \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{x}^2$$

οù

$$\partial D(R) = \{ \vec{x} \text{ tq } \vec{x}^2 = R^2 \} ; \vec{n}(\vec{x}) = -\vec{x}/|\vec{x}|$$

sont les bord de D(R) et normale sortante à ce bord.

 $ightharpoonup rac{dW_D}{dt}$ est la puissance entrant dans W_D à l'instant t, aussi peut-on accepter l'idée que le vecteur de Poynting

$$\vec{s}(\vec{x},t) = \vec{e}(\vec{x},t) \times \vec{h}(\vec{x},t)$$

soit tel que sa densité de flux sur une surface

$$p = \vec{s}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}$$

représente la densité de puissance sortant par cette surface.

Vecteur de Pointing (2/2)

► Le vecteur de Pointing

$$\vec{s}(\vec{x},t) = \vec{e}(\vec{x},t) \times \vec{h}(\vec{x},t)$$

quantifie la répartition de la puissance rayonnée totale par rapport à la direction à partir de l'expression

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{\partial D(R)} \vec{s}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \ d\vec{x}^2$$

ightharpoonup Mais il est possible d'ajouter une quantité $q(\vec{x})$ quelconque telle que

$$\int_{\partial D(R)} q(\vec{x}) \ d\vec{x}^2 = 0$$

sans modifier cette puissance.

► Aussi l'utilisation du vecteur de Pointing est-elle susceptible de révision.

Direction de rayonnement

▶ L'application du résultat sur la puissance sortante du complémentaire de de D(R) (qui est l'inverse de la puissance entrant dans D(R) et conduit à un changement de signe de la normale), il vient, toujours en utilisant

$$\begin{split} \vec{h}(t, \vec{x}) &\approx -\frac{L}{4\pi} \frac{di}{c} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{x} \times \vec{k}_3}{|\vec{x}|^2} \\ \vec{e}(t, \vec{x}) &\approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{L}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{1}{|\vec{x}|} \left(\vec{k}_3 - \frac{\vec{k}_3 \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \right) \end{split}$$

ainsi que les coordonnées sphériques

$$p(\theta,\phi,t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi \ c)^2} \left(\frac{di}{dt} (t - R/c) \right)^2 \frac{(\sin \theta)^2}{R^2}$$

dont l'intégrale sur le bord de la sphère est bien sûr la puissance totale trouvée précédemment

$$P(t) = \int_0^{2\pi} R \ d\phi \int_0^{\pi} R \ \sin\theta \ d\theta \ p(\theta, \phi, t)$$

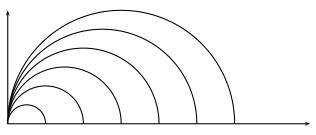
Direction de rayonnement

► La puissance rayonnée

$$p(\theta, \phi, t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi \ c)^2} \left(\frac{di}{dt} (t - R/c) \right)^2 \frac{(\sin \theta)^2}{R^2}$$

ne dépend pas de la composante suivant ϕ (ce qui est cohérent avec la symétrie axisymétrique du dipôle) et dépend de $\sin\theta$.

ightharpoonup C'est principalement dans les directions orthogonales à la direction \vec{k}_3 que rayonne le dipôle oscillant.



Émission et réception

- ▶ Si un brin de géométrie identique à celui qui a été décrit pour définir le dipôle élémentaire de Hertz est situé à la position \vec{x} et est dirigé suivant une direction \vec{k} ;
- ➤ Si ce brin est fait d'un matériau conducteur de l'électricité qui impose la loi d'Ohm en tous points du brin, alors le courant induit sera

$$\vec{j_i}(t,\vec{x}) = \sigma \left(\vec{e}(t,\vec{x}) + \vec{e_i}(t,\vec{x}) \right)$$

où \vec{e} est le champ électrique incident

$$\vec{e}(t, \vec{x}) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{L}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{1}{|\vec{x}|} \left(\vec{k}_3 - \frac{\vec{k}_3 \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \right)$$

et $\vec{e_i}$ est le champ électrique de réaction d'induit dans le brin.

Émission et réception

▶ Dans le cas limite où le brin est fait d'un matériau très conducteur alors

$$\sigma \longrightarrow \infty \text{ et } |\vec{j_i}| < \infty \Longrightarrow \vec{e_i}(t, \vec{x}) = -\vec{e}(t, \vec{x})$$

le champ électrique de réaction d'induit est connu dans le brin : il s'oppose au champ source et crée une différence de potentiel entre les deux extrémités du brin qui peut servir de signal d'entrée à un récepteur.

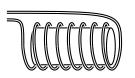
▶ Quantitativement cette différence de potentiel est (lorsque le champ électrique ne varie presque pas sur la longueur du brin)

$$V pprox \vec{e_i} \cdot L \ \vec{k} = -rac{\mu_0 \ L^2}{4\pi} rac{di}{dt} \left(t - rac{|\vec{x}|}{c}
ight) rac{(\vec{x} imes \vec{k_3}) \cdot (\vec{x} imes \vec{k})}{|\vec{x}|^3}$$

▶ Comme c'était prévisible, elle est maximale pour \vec{k} aligné à \vec{k}_3 et \vec{x} orthogonal à \vec{k}_3 et elle décroît en l'inverse du cube de la distance qui sépare les deux brins.

Exercice : chauffage de billette

Fournir un modèle de calcul dont la variable d'état est la composante orthoradiale du potentiel vecteur pour un dispositif constitué d'une bobine à l'intérieur de laquelle se trouve une billette



en supposant que

- ▶ l'inducteur est composé de *N* spires axisymétriques de même axe dans lesquels circule le même courant ;
- que la charge est également axisymétrique (de même axe que les spires);

En géométrie cylindrique $\vec{x} = r \vec{k_r} + z \vec{k_z}$ on a

$$\vec{\nabla} \times \left(a(r,z) \; \vec{k}_{\theta} \right) = -\partial_{z} a \; \vec{k}_{r} + \frac{1}{r} \partial_{r} \left(r \; a \right) \; \vec{k}_{z}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(b_{r} \; \vec{k}_{r} + b_{z} \; \vec{k}_{z} \right) = \left(\partial_{z} b_{r} - \partial_{r} b_{z} \right) \; \vec{k}_{\theta}$$

Exercices ondes

Exercice 1 : Une formule pratique utilisée dans une norme propose déterminer l'intensité du champ électrique « au loin » d \hat{u} au rayonnement d'une antenne est

Champ électrique en
$$V/m=\underbrace{7}_{\text{en }\sqrt{\Omega}}\frac{\sqrt{\text{Puissance effective rayonnée en }W}}{\text{distance à l'antenne en }m}$$

critiquer cette formule.

Exercice 2 : Examiner l'onde générée par un réseau de dipôles oscillants tous parallèles, de longueur L et disposés en n a \vec{k}_2 pour $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$ où a est une longueur de pas.