# Équations macroscopiques de la physique classique

## Compléments d'électromagnétisme

#### G. Vinsard

#### Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

20 septembre 2018

## Objectifs

► L'électromagnétisme est le corps de discipline qui permet d'expliquer entre autres le fonctionnement des moteurs électriques, des téléphones portable et des cuisinières à induction.

► Le premier objectif de la leçon est de construire un modèle du chauffage par induction électromagnétique ;

► Le second est de décrire un dispositif idéal élementaire d'émission et de réception d'ondes électromagnétiques : le dipole oscillant.

## Induction électromagnétique = basses fréquences

Tel que défini leçon No 3, le modèle des basses fréquences en potentiel vecteur magnétique  $\vec{a}$  et potentiel scalaire électrique  $\varphi$  dans le cas où la permittivité diélectrique est celle du vide est

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{a}\right) + s \left(\partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi\right) &= \vec{j}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \varphi\right) + \rho &= 0 \\ \vec{a}(t=0, \vec{x}) &= \vec{0} \end{cases}$$

- ▶ les données sont : j<sub>s</sub> la densité de courant source;

   µ : E<sub>3</sub> → ℝ et s : E<sub>3</sub> → ℝ les fonctions de perméabilité et de conductivité électrique;
- ▶ les grandeurs à calculer sont :  $\vec{a}$ ,  $\varphi$ ,  $\rho$  à partir desquelles

$$ec{b}=ec{
abla} imesec{a}$$
  $ec{h}=\mu$   $ec{b}$  ;  $ec{e}=-\partial_tec{a}-ec{
abla}ec{\phi}$ 

## L'utilisation du modèle

► Ce modèle n'a d'intérêt pratique que si on sait

- relier a priori  $\vec{j_s}$  à un courant électrique source  $i_s$
- retirer du modèle des élements permettant de calculer la tension v<sub>s</sub> qui correspond à ce courant
- exprimer les effets mécaniques et thermique des courants induits de densité

$$\vec{j} = -s \left( \partial_t \vec{a} + \vec{\nabla} \varphi \right)$$

► L'objet de ce qui suit est d'établir ce savoir.

### Le régime sinusoïdal établi

Si la densité de courant source dépend sinusoïdalement du temps

$$\vec{j_s}(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \, \Re \left\{ \underline{\vec{j}_s}(\vec{x}) \, \exp^{j\omega t} \right\}$$

alors  $\vec{a}$ ,  $\varphi$  et  $\rho$  comportent une partie transitoire dépendant de leurs valeurs initiales qui les amènent vers leur dépendance sinusoïdale de régime sinusoïdal établi

$$\vec{a}(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \, \Re \left\{ \underline{\vec{a}}(\vec{x}) \, \exp^{j\omega t} \right\} \quad ; \quad \varphi(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \, \Re \left\{ \underline{\varphi}(\vec{x}) \, \exp^{j\omega t} \right\}$$

$$\rho(t, \vec{x}) = \sqrt{2} \, \Re \left\{ \underline{\rho}(\vec{x}) \, \exp^{j\omega t} \right\}$$

Le modèle devient alors

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) + s\left(j\omega \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) &= \underline{\vec{j}}_{s} \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_{0} \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) + \underline{\rho} &= 0 \end{cases}$$

## Relation entre densité de courant et courant source

► Une première difficulté est de définir le domaine inducteur dans lequel circule le courant source :



Inducteur avec ses amenées de courant



Seul le côté inducteur est considéré; les amenées coté générateur sont supposées être suffisamment proches pour ne générer aucun champ source.

tour l'un sur l'autre



Ajout de deux conducteurs aller et re-

#### L'inducteur est un tore

Cette approximation de déconnexion entre les « côtés » inducteur et générateur fait apparaître le domaine de l'inducteur comme un tore  $D_s$ 



Et la densité de courant source  $\underline{\vec{j}_s}$  peut être supposée déjà satisfaire à

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{j}_s} = 0 \quad \text{dans} \quad D_s \\ \vec{j}_s = \vec{0} \quad \text{dans} \quad E_3 - D_s \text{ le complémentaire de } D_s \text{ dans } E_3 \\ \vec{j}_s \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D_s \text{ le bord de } D_s \text{ ; } (\vec{n} \text{ le champ de normales de } \partial D_s \text{ orientées vers l'extérieur de } D_s)$$

ainsi

$$ec{
abla}\cdot \underline{\vec{j}}_s = 0$$
 dans  $E_3$ 

#### Le tore coupé

Il reste à connecter la densité de courant source  $\underline{j}_s$  au courant source  $\underline{i}_s$ ; si le tore est coupé (de façon quelconque pourvu que le tore soit connexifié) suivant une surface  $\Sigma$  de manière qu'un écartement fasse apparaître 2 nouveaux bords  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$  dans le tore



 $\vec{n}$  champ de normales extérieur à  $D_s$  coupé;  $d\vec{x}^2$  notation pour l'élément de surface. Cette relation est indépendante de la position de  $\Sigma$  puisque  $\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{j}_s} = 0$ .

## L'espace de cohomologie du tore

Finalement il reste à éliminer toute indétermination sur  $\vec{j_s}$ ; cela peut être fait en lui donnant une régularité maximum avec la condition

$$ec{
abla} imes ec{j}_s = ec{0} ext{ dans } D_s$$

L'ensemble de ces conditions peuvent être réunies par l'invocation d'un champ  $\vec{u_s}$  ne dépendant que de la géométrie de  $D_s$  et défini par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u_s} = 0 \quad \text{dans} \quad D_s \quad \int_{\Sigma_-} \vec{u_s} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2 = -\int_{\Sigma_+} \vec{u_s} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2 = 1$$
$$\vec{u_s} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D_s \quad \vec{\nabla} \times \vec{u_s} = 0 \text{ dans} \quad D_s$$

Un tel champ existe et est unique si  $D_s$  est un tore : il s'appelle l'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore. La relation cherchée est alors

$$\underline{j}_{s} = \underline{i}_{s} \ \vec{u}_{s}$$

#### Le tore axisymétrique

Les vecteurs de base des coordonnées cylindriques sont

$$ec{k}_r = \cos heta \ ec{k}_1 + \sin heta \ ec{k}_2$$
 ;  $ec{k}_ heta = -\sin heta \ ec{k}_1 + \cos heta \ ec{k}_2$  ;  $ec{k}_z = ec{k}_3$ 

la position est  $\vec{x} = r \ \vec{k_r} + z \ \vec{k_z}$ . Un tore axisymétrique est décrit par

$$D_t = \{ r \; ec{k_r} \; + z \; ec{k_3} \; ext{avec} \; (r-R)^2 + z^2 < a^2 \; ( \; ext{où} \; 0 < a < R) \}$$

le champ de vecteur<sup>1</sup>

$$\vec{u}_{D_t}(\vec{x}) = \begin{cases} u_{D_t} \vec{k}_{\theta} & \text{si} \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}; u_{D_t} = \frac{1}{r \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{\rho \, d\rho}{R + \rho \, \cos \phi}}$$

satisfait à

$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_{D_t} = \vec{0} \qquad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{D_t} = 0 \text{ dans } D_t$$
$$\vec{u}_{D_t} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial D_t \qquad ; \quad \int_{\Sigma_-} \vec{u}_{D_t} \cdot \vec{n} \ d\vec{x}^2 = 1$$
$$\vec{u}_{D_t} = 1/(r \ 2\pi \ (R - \sqrt{R^2 - a^2})) \qquad (\approx 1/(\pi \ a^2) \text{ si } a << R) \qquad 10$$

#### La construction de $\tilde{\mathbf{u}}_s$ pour un tore quelconque

On admettra que l'élément générateur de l'espace de cohomologie du tore peut être construit à partir du problème en potentiel sur le tore coupé de la recherche de  $\chi$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \chi = 0 & {\rm dans} & D_c \ {\rm coupé} \\ \partial_n \chi = 0 & {\rm sur} & \partial D_c \ {\rm non} \ {\rm coupé} \\ \chi = 1 & {\rm sur} & \Sigma_+ \\ \chi = 0 & {\rm sur} & \Sigma_- \end{array} \right.$$

et alors

$$ec{u_s} = rac{ec{
abla}\chi}{\int_{\Sigma}ec{
abla}\chi\cdotec{n}\,dec{x^2}}$$

Une propriété intéressante est que

$$\forall \, \vec{j} \text{ tel que } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \text{ dans } D_c : \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2 = \frac{\int_{D_c} \vec{u} \cdot \vec{j} \, d\vec{x}^3}{\int_{D_c} |\vec{u}|^2 \, d\vec{x}^3}$$

Le courant à travers  $\Sigma$  s'exprime alors en terme d'intégrales de volume (ce qui est intéressant si on utilise des éléments finis).

## Expression des puissances active et réactive (1/2)

Le point de départ est l'équation

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) + s\left(j\omega \; \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right) = \underline{i}_s \; \vec{u}_s$$

Le produit scalaire avec  $(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \nabla \underline{\varphi})^*$  fournit

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) \cdot (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* + s \left| j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 = \underline{i}_s \ \vec{u}_s \cdot (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^*$$

La relation d'analyse vectorielle

$$ec{
abla} \cdot (ec{u} imes ec{v}) = (ec{
abla} imes u) \cdot ec{v} - (ec{
abla} imes ec{v}) \cdot ec{u}$$

permet d'écrire

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) \cdot (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi})^* = \vec{\nabla} \cdot \left(\left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) \times (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi})^*\right) \\ + \frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right)^*}_{= -j\omega \ \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}^*}$$

$$12$$

## Expression des puissances active et réactive (2/2)

Compte tenu que les champs de vecteur  $\vec{a}$  et  $\vec{\nabla}\varphi$  sont suffisamment décroissants à l'infini pour que

$$\int_{E_3} \vec{\nabla} \cdot \left( \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}} \right) \times (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi})^* \right) \ d\vec{x}^3 = 0$$

il vient

$$\underline{i}_{s} \int_{E_{3}} \vec{u}_{s} \cdot (j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi})^{*} \ d\vec{x}^{3} = \int_{E_{3}} s \left| j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi} \right|^{2} \ d\vec{x}^{3} - j\omega \int_{E_{3}} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^{2} \ d\vec{x}^{3}$$

soit encore, en conjuguant, le bilan de puissances

$$\underbrace{\left(\int_{E_3} \vec{u}_s \cdot (j\omega \ \vec{\underline{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}) \ d\vec{x}^3\right)}_{= \underline{v}_s} \underbrace{i_s^*}_{= P} \underbrace{\int_{E_3} s \left|j\omega \ \vec{\underline{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right|^2 \ d\vec{x}^3}_{= P} + \underbrace{\int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \vec{\underline{a}}|^2 \ d\vec{x}^3}_{= Q}$$

Les trois quantités  $\underline{v}_s$ , P et Q sont

- <u>v</u><sub>s</sub> la force électromotrice dans l'inducteur qui maintient le courant <u>i</u><sub>s</sub>;
- P la puissance Joule dissipée dans la ou les charges;
- ► *Q* la puissance réactive de l'ensemble.

#### La puissance active

Si le seul domaine conducteur est  $D_c$  de conductivité  $\sigma$ 

$$s(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma & \text{si} & \vec{x} \in D_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors

$$P = \int_{D_c} \sigma \left| j\omega \; \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^2 \; d\vec{x}^3$$

soit, compte tenu que

$$\underline{\vec{e}} = -(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}) \text{ et } \underline{\vec{j}} = \sigma \underline{\vec{e}}$$
$$P = \int_{D_c} \sigma \ |\underline{\vec{e}}|^2 \ d\vec{x}^3 = \int_{D_c} \frac{|\underline{\vec{j}}|^2}{\sigma} \ d\vec{x}^3$$

qui est bien l'expression attendue : la somme sur le domaine conducteur du rapport du carré de la densité de courant à la conductivité. La force électromotrice dans l'inducteur (1/3)

Compte tenu que

$$ec{e}=-(j\omega\;ec{a}+ec{
abla}ec{\phi})$$
 et  $ec{u_s}=0$  en dehors de  $D_s$ 

la force électromotrice dans l'inducteur est

$$\underline{v}_{s} = -\int_{D_{s}} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{u_{s}} \ d\vec{x}^{3}$$

Si cet inducteur était une spire de fibre moyenne  $\Gamma$  définie par

$$egin{array}{rcl} ec{X} & : & [0,1] & \longrightarrow & E_3 & ; & ec{ au}(s) = rac{ec{X}(s)}{ec{X}(s) ec{ au}(s) ec{ au}} & ext{ la tangente} \ s & \longrightarrow & ec{X}(s) & \end{array}$$

et de section circulaire de rayon *a* très petit alors au voisinage de cette fibre moyenne

$$ec{u_s} pprox rac{1}{\pi a^2} \ ec{ au}$$

de plus

$$\forall f : \int_{D_s} f(\vec{x}) \ d\vec{x}^3 \approx \pi \ a^2 \int_0^1 f\left(\vec{X}(s)\right) \ |\dot{\vec{X}}(s)| \ ds$$

## La force électromotrice dans l'inducteur (2/3)

Il vient donc que

$$\underline{v}_{s} pprox - \int_{0}^{1} \underline{\vec{e}} \left( \vec{X}(s) 
ight) \cdot \vec{ au} \, ds = - \int_{\Gamma} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{ au} \, d|\vec{x}|$$

la forme symbolique de cette expression suggère l'utilisation de la formule de Stokes : si  $\Gamma$  est le bord d'une surface S munie d'un champ de normales  $\vec{n}$ 

$$\underline{v}_{s} \approx -\int_{S} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{e}} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^{2}$$

Compte tenu de la relation de Maxwell-Faraday  $\vec{\nabla} \times \vec{\underline{e}} = -j\omega \ \vec{\underline{b}}$ 

$$\underline{v}_s \approx j\omega \int_s \underline{\vec{b}} \cdot \vec{n} \, d\vec{x}^2$$

la force électromotrice est en écriture d'amplitudes complexes la dérivée temporelle du flux de l'induction magnétique à travers la surface dont la spire est le bord. Elle vient compenser la force contre-électromotrice qui est l'opposée de cette quantité.

## La force électromotrice dans l'inducteur (3/3)

L'analyse précédente a été faite pour montrer que

$$\underline{v}_s = -\int_{D_s} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{u_s} \ d\vec{x}^3$$

correspondait à ce qu'on attendait d'une force électromotrice dans le cadre d'une approximation où le résultat était connu *a priori*; mais bien cette expression qui est première parce que :

- les inducteurs ne sont pas nécessairement de section petite;
- même s'ils l'étaient il pourraient avoir une forme où la formule de Stokes ne s'applique pas, par exemple sur un nœud



#### La puissance réactive

Dès lors que  $\underline{v}_s$  est identifiée à une force électromotrice, la partie imaginaire de  $\underline{v}_s$   $i_s^*$  est la puissance réactive. De plus l'examen de sa forme explicite

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^2 d\vec{x}^3$$

soit encore (compte tenu que  $\underline{\vec{b}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}$ )

$$Q = \omega \int_{E_3} \frac{|\vec{\underline{b}}|^2}{\mu} \ d\vec{x}^3$$

la fait apparaitre comme le produit de la pulsation par le double de la moyenne quadratique temporelle de l'énergie magnétique

$$\int_{E_3} \frac{|\vec{\underline{b}}|^2}{2\mu} d\vec{x}^3$$

ce qui est conforme à l'idée qu'on s'en fait.

## Le rôle du potentiel scalaire électrique

Le modèle complet

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) + s\left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right) &= \underline{\vec{j}}_{s} \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_{0} \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right) + \underline{\rho} &= 0 \end{cases}$$

se découple en deux parties : d'abord

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) + s \left(j \omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) &= \ \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} &= \ 0 \end{cases}$$

dans laquelle le potentiel scalaire électrique  $\underline{\varphi}$  est une variable annexe définie uniquement dans  $D_c$  dont la fonction est d'assurer la cohérence de la 1° équation et ensuite

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) + \underline{\rho} = 0$$

pour laquelle le statut de potentiel scalaire électrique est rendu à  $\underline{\varphi}$  de part son lien avec la densité de charge électrique  $\rho$ .

19

Le potentiel électrique dans un domaine conducteur

La divergence de 
$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) + s\left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right) = \underline{\vec{j}}_s$$
 s'écrit $\vec{\nabla} \cdot \left(s\left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi}\right)\right) = 0$ 

Si le domaine conducteur est comme précédemment un domaine  $D_c$  et donc si *s* est une fonction discontinue (valant  $\sigma$  dans  $D_c$  et 0 ailleurs) il faut que (compte tenu que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$ )

$$ec{
abla}\cdot \underline{arphi} = 0$$
 dans  $D_c$  et  $\left(j\omega \ \underline{\vec{a}} + ec{
abla} \underline{arphi} 
ight) \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\partial D_c$ 

où  $\partial D_c$  est le bord de  $D_c$  et  $\vec{n}$  un champ de normales extérieures. Ces conditions sur  $\underline{\varphi}$  dans  $D_c$  et sur  $\partial D_c$  signifient que le courant induit

$$\vec{j} = s \left(-j\omega \ \underline{\vec{a}} - \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right)$$

est à divergence nulle dans  $D_c$  et que de plus ce courant ne « sort pas » de  $D_c$ .

## Le potentiel scalaire électrique dans $E_3$

Le potentiel scalaire électrique est de plus solution de

$$ec{
abla} \cdot \left(\epsilon_0 ec{
abla} \underline{\phi} 
ight) + \underline{
ho} = 0$$
 dans  $E_3$ 

ce qui impose

 $\rho = 0 \text{ dans } D_c$ 

L'intérieur d'un conducteur électrique est électriquement neutre (comme en électrostatique).

Avec l'hypothèse qu'il n'y a pas de charges électriques en dehors du conducteur  $^{\rm 2}$ 

$$ho = 0$$
 dans  $E_3 - D_c$ 

il ne reste comme possibilité pour les charges électriques que d'être réparties en surface de  $\partial D_c$ .

<sup>2.</sup> Cet extérieur est assimilé à un vide total ; sinon il pourrait y en avoir.

#### La conservation du courant induit

le potentiel  $\varphi$  peut être calculé sur  $E_3 - D_c$  par le problème

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) = 0 & \text{dans} \quad E_3 - D_c \\ \underline{\varphi}|_{c \hat{0} t \acute{e} \ E_3 - D_c} = \underline{\varphi}|_{c \hat{0} t \acute{e} \ D_c} & \text{sur} & \partial(E_3 - D_c) = \partial D_c \end{cases}$$

Ainsi la densité superficielle de charges  $(C/m^2)$  sur  $\partial D_c$  est

$$\rho_{s} = \epsilon_{0} \left( \partial_{n} \underline{\varphi} |_{c \hat{o} t \acute{e} D_{c}} - \partial_{n} \underline{\varphi} |_{c \hat{o} t \acute{e} E_{3} - D_{c}} \right)$$

Ce qui assure la conservation du courant induit

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+j\omega\;\rho=0$$

la densité de charge est alors une distribution de la forme

$$\rho(\vec{x}) = \rho_s \, \delta_{\partial D_s}$$

dans le sens que

$$\forall \psi : \int_{E_3} \rho \psi \, d\vec{x}^3 = \int_{\partial D_c} \rho_s \psi \, d\vec{x}^2$$

## Les effets capacitifs

Les statuts des potentiel scalaire électrique  $\underline{\varphi}$  et densité de charge  $\rho$  étant définis, si

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) + \underline{\rho} = 0 \text{ dans } E_3$$

alors

$$\int_{E_3} \vec{\nabla} \cdot \left( \epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right) \ \underline{\varphi}^* \ d\vec{x}^3 + \int_{E_3} \underline{\rho} \ \underline{\varphi}^* \ d\vec{x}^3 = 0$$

d'où

$$\int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \ \underline{\varphi}^* \ d\vec{x}^2 = \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla}\underline{\varphi}|^2 \ d\vec{x}^3$$

c'est le double de la moyenne quadratique temporelle de l'énergie électrostatique.

La puissance correspondant aux effets capacitifs est alors

$$Q' = \omega \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla}\underline{\varphi}|^2 \ d\vec{x}^3 = \omega \int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \ \underline{\varphi}^* \ d\vec{x}^2$$

## Le modèle d'induction formulé en courant source (1/4)

Si le courant source  $\underline{i}_s$ , la géométrie du tore  $D_s$  approximant l'inducteur ainsi que celle du domaine conducteur  $D_c$  qui est le lieu des courants induits sont donnés ainsi que la valeur  $\sigma$  de la conductivité électrique dans  $D_c$  (donc la fonction de conductivité *s* est définie) alors :

► l'élément générateur de l'espace de cohomologie de l'inducteur est calculé par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{u_s} = \vec{0} \ ; \ \vec{\nabla} \cdot \vec{u_s} = 0 & \text{dans} & D_s \\ \vec{u_s} = \vec{0} & \text{dans} & E_3 - D_s \\ \vec{u_s} \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur} & \partial D_s \end{array} \right.$$

► la densité de courant source est

$$\underline{j}_s = \underline{i}_s \ \vec{u}_s$$

## Le modèle d'induction formulé en courant source (2/4)

► Le potentiel vecteur magnétique  $\underline{\vec{a}}$  (défini dans  $E_3$ ) et la partie du potentiel scalaire électrique qui est définie dans  $D_c$  sont solutions de

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}\right) + s \left(j \omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) &= \underline{\vec{j}}_s \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{a}} &= 0 \end{cases}$$

► La partie du potentiel scalaire électrique définie dans  $E_3 - D_c$  se calcule par

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \underline{\varphi}\right) + \rho = 0 & \text{dans} \quad E_3 - D_c \\ \underline{\varphi}|_{c\hat{o}t\acute{e}} \ E_3 - D_c} = \underline{\varphi}|_{c\hat{o}t\acute{e}} \ D_c & \text{sur} & \partial(E_3 - D_c) = \partial D_c \end{cases}$$

et la densité superficielle de charges électriques est

$$\rho_{s} = \epsilon_{0} \left( \partial_{n} \underline{\varphi} |_{c \hat{c} t \hat{e} \ D_{c}} - \partial_{n} \underline{\varphi} |_{c \hat{c} t \hat{e} \ E_{3} - D_{c}} \right)$$

## Le modèle d'induction formulé en courant source (3/4)

► La force électromotrice dans l'inducteur est maintenant

$$\underline{v}_{s} = -\int_{D_{s}} \underline{\vec{e}} \cdot \vec{u}_{s} \ d\vec{x}^{3}$$

Les puissances active et réactive-inductive peuvent être calculées de deux façons, sur l'inducteur et directement sur la charge et dans l'espace par

$$P+j \ Q = \underline{v}_{s} \ \underline{i}_{s}^{*} = \int_{D_{c}} \sigma \left| j\omega \ \underline{\vec{a}} + \vec{\nabla} \underline{\varphi} \right|^{2} \ d\vec{x}^{3} + j \ \omega \int_{E_{3}} \frac{1}{\mu} |\vec{\nabla} \times \underline{\vec{a}}|^{2} \ d\vec{x}^{3}$$

La puissance réactive-capacitive peut être calculée également de deux façons

$$Q' = \omega \int_{E_3} \epsilon_0 |\vec{\nabla}\underline{\varphi}|^2 \ d\vec{x}^2 = \omega \int_{\partial D_c} \underline{\rho}_s \ \underline{\varphi}^* \ d\vec{x}^2$$

## Le modèle d'induction formulé en courant source (4/4)

► La résistance de l'inducteur est prise en compte de façon externe au modèle par une formule du type

$$R_s = rac{ ext{longueur fibre moyenne}}{ ext{conductivite} imes ext{surface de passage du courant}} \ ext{compte tenu de l'effet Kelvin}$$

► L'inductance du dispositif inducteur+charge est

$$Z = R_s + \frac{P + (Q - Q')j}{|\underline{i}_s|^2}$$

c'est la grandeur utile pour dimensionner l'alimentation électrique. La densité de puissance Joule dans la charge q (en  $W/m^3$ ) est

$$\boldsymbol{q} = \sigma \left| \boldsymbol{j}\omega \; \underline{\boldsymbol{\vec{a}}} + \vec{\nabla}\underline{\varphi} \right|^2$$

c'est la grandeur utile d'entrée d'un modèle de transfert de chaleur.

## Mécanique

► Comme la possibilité d'un mouvement n'a pas été introduite dans le problème d'induction posé au départ, on ne trouve pas de puissance mécanique.

► L'analyse des milieux en mouvement se fait en modifiant la loi d'Ohm comme

$$ec{j}=s~\left(ec{e}+ec{v} imesec{b}
ight)$$

où  $\vec{v}$  est le champ de vitesses eulérien de ce mouvement. L'analyse correspondant à cette modification est faite Leçon 7 de TIEM sous Arche et son résultat principal est que la densité de force électromagnétique dans tout l'espace est de la forme

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{b} + \vec{j_s} \times \vec{b} + \frac{\vec{b}^2}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu}\right)$$

qui est la divergence du tenseur des efforts de Maxwell

$$\overline{\overline{T}}_{ik} = \frac{b_i \ b_k}{\mu} - \delta_{ik} \frac{b_l \ b_l}{2\mu}$$

## Ondes électromagnétiques = hautes fréquences

► Sous la condition de conservation de la charge électrique

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

les potentiels scalaire électrique  $\varphi$  et vecteur magnétique  $\vec{a}$  sont également solutions de

$$\vec{\Box} \vec{a} = \mu_0 \vec{j}$$
;  $\Box \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 

où

$$\Box \phi = \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \phi - \Delta \phi ; \ \vec{\Box} \vec{a} = \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 \vec{a} - \vec{\Delta} \vec{a}$$

► La question est de décrire le mode de production des ondes électromagnétique, c'est à dire  $\rho$  et  $\vec{j}$ . Le plus élémentaire d'entre eux, à partir duquel il est possible d'en construire des dispositifs réel, est le dipole oscillant.

## Système de coordonnées



$$\begin{cases} \vec{k}_r = \sin\theta \left(\cos\phi \ \vec{k}_1 + \sin\phi \ \vec{k}_2\right) + \cos\theta \ \vec{k}_3\\ \vec{k}_\theta = \cos\theta \left(\cos\phi \ \vec{k}_1 + \sin\phi \ \vec{k}_2\right) - \sin\theta \ \vec{k}_3\\ \vec{k}_\phi = -\sin\phi \ \vec{k}_1 + \cos\phi \ \vec{k}_2 \end{cases}$$

## Onde produite par un dipôle élémentaire rayonnant

▶ Un brin de fil conducteur de l'électricité de longueur L à section circulaire de rayon d est considéré. Un courant électrique parcourt le brin de fil dans le sens de sa longueur, les sources sont alors

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = i(t) \vec{k}_3 \begin{cases} 1/(\pi d^2) & \text{si } x_1^2 + x_2^2 < d^2 \text{ et } -L/2 < x_3 < L/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\rho(t,x) = q(t) \left(\delta(\vec{x},L/2) - \delta(\vec{x},-L/2)\right)/(\pi d^2)$$

$$\Rightarrow \delta(\vec{x},u) \text{ est la distribution de Dirac définie par : si } \psi \text{ est une}$$
fonction test scalaire définie sur  $E_3$ 

$$\forall \psi : \int_{E_3} \psi(\vec{x}) \, \delta(\vec{x},u) \, dx^3 = \begin{cases} \psi(x_1 \, \vec{k}_1 + x_2 \, \vec{k}_2 + u \, \vec{k}_3) & \text{si} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} x_1^1 + x_2^2 < d^2$$

► Le courant *i* le long du brin de fil et la charge électrique *q* des deux extrémités du brin sont liés par

$$\frac{dq}{dt} = i \Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0$$

de manière que la jauge de Lorentz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi = 0$  soit vérifiée.

31

## Onde produite par un dipôle élémentaire : 1° approximation

► Un tel système n'est concevable que sur le papier : toutefois des antennes existant réellement peuvent être approchés par la superposition de tels dipôles élémentaires et elles ont un comportement très voisin de celui de leur composant élémentaire.

► Au loin du dipôle  $|\vec{x}| >> L, d$ , les potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique prennent la forme

$$\vec{a}(t,\vec{x}) \approx \frac{\mu_0 L}{4\pi} i \left( t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{\vec{k}_3}{|\vec{x}|}$$
$$\varphi(t,\vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi\epsilon_0} (\vec{x} \cdot \vec{k}_3) \left( \frac{q \left( t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{|\vec{x}|^3} + \frac{i \left( t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right)}{c |\vec{x}|^2} \right)$$

Ces approximations satisfont exactement la jauge de Lorenz. Elles comportent des termes qui peuvent se classer en puissances croissantes de  $1/|\vec{x}|$ .

## 3° approximation : l'onde plane

► Une approximation supplémentaire est encore possible, si

$$ec{x} = X \ ec{k_1} + \delta ec{x}$$
 avec  $|\delta ec{x}| << X$   
i.e.  $|X \ ec{k_1} + \delta ec{x}| pprox X + \delta x_1$  à l'ordre 1 en  $|\delta ec{x}|$ 

alors les champs magnétique et électrique deviennent

$$\vec{h}(t, X \ \vec{k_1} + \delta \vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi \ c \ X} \frac{di}{dt} \left( t - \frac{X}{c} - \frac{\delta x_1}{c} \right) \vec{k_2}$$
$$\vec{e}(t, X \ \vec{k_1} + \delta \vec{x})) \approx -\frac{\mu_0 \ L}{4\pi \ X} \frac{di}{dt} \left( t - \frac{X}{c} - \frac{\delta x_1}{c} \right) \vec{k_3}$$

Ils ne dépendent plus que de  $\delta x_1$  la coordonnée selon la direction  $\vec{k_1}$  de  $\delta \vec{x}$ .

## Onde plane

► Si l'amplitude du champ magnétique

$$f(x) = \frac{L}{4\pi \ c \ X} \frac{di}{dt} \left( t - \frac{X}{c} \right)$$

est choisie comme entrée plutôt que le courant *i* alors l'onde plane est définie par

$$\begin{cases} \vec{h}'(t, \vec{x}') = f\left(t - \frac{x_1'}{c}\right)\vec{k}_2\\ \vec{e}'(t, \vec{x}') = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}f\left(t - \frac{x_1'}{c}\right)\vec{k}_3 \end{cases}$$

et

$$ec{h}(t,X \;ec{k_1}+\deltaec{x})pproxec{h}'(t,\deltaec{x})$$
 ;  $ec{e}(t,X \;ec{k_1}+\deltaec{x}))pproxec{e}'(t,\deltaec{x})$ 

Ce qui fait apparaître l'onde plane comme une approximation locale au voisinage de  $X\vec{k_1}$  de l'onde générée par le dipole.

## L'onde du dipôle

▶ Si  $|\vec{x}| << d, L$  et que la 1° approximation des potentiels

$$\vec{a}(t,\vec{x}) \approx \frac{\mu_0 L}{4\pi} i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) \frac{\vec{k}_3}{|\vec{x}|}$$
$$\varphi(t,\vec{x}) \approx \frac{L}{4\pi\epsilon_0} (\vec{x} \cdot \vec{k}_3) \left(\frac{q \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)}{|\vec{x}|^3} + \frac{i \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)}{c |\vec{x}|^2}\right)$$

est retenue alors les champs électriques et magnétiques correspondant sont

$$\vec{h}(t,\vec{x}) \approx -\frac{L}{4\pi} \frac{di}{c} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) \frac{\vec{x} \times \vec{k}_3}{|\vec{x}|^2}$$
$$\vec{e}(t,\vec{x}) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{L}{dt} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) \frac{1}{|\vec{x}|} \left(\vec{k}_3 - \frac{\vec{k}_3 \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \vec{x}\right)$$

► Ces champs électriques et magnétiques définissent l'onde émise par le dipôle oscillant. Et cette onde est appelée un rayonnement.

## Puissance du rayonnement

► La puissance que le dispositif qui impose le courant *i* dans le brin de fil du dipôle contribue à augmenter l'énergie électromagnétique dans tout l'espace (supposé vide).

► Cette énergie s'écrit *a priori* 

$$W(t) = \int_{E_3} \left( \frac{1}{2} \mu_0 \; (\vec{h}(t, \vec{x}))^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \; (\vec{e}(t, \vec{x}))^2 \right) \; d\vec{x}^3$$

► La puissance instantanée qui correspond à l'énergie électromagnétique est

$$p(t) = \frac{dW}{dt}(t)$$

► Mais il n'est pas possible d'appliquer *verbatim* cette façon de procéder parce les expressions de  $\vec{e}$  et  $\vec{h}$  ne sont valables qu'à des distances  $|\vec{x}|$  grandes devant les dimensions du dipôle alors que l'intégration s'étend jusqu'à lui.

## Tactique d'évitement de la difficulté

► Il faudrait donc revenir sur l'approximation de  $\vec{e}$  et  $\vec{h}$  afin de retrouver des expressions valable dans le dipôle, mais il est possible d'exploiter les propriétés de propagation de l'énergie électromagnétique pour éviter ce travail.

 $\blacktriangleright$  Une sphère de rayon R centrée sur l'origine (ou se trouve le dipôle) étant définie, l'extérieur de cette sphère est noté

$$D(R) = \{\vec{x} \in E_3 \text{ tq } |\vec{x}| > R\}$$

► La partie de l'énergie électromagnétique totale contenue dans *D* est

$$W_D(t,R) = \int_{D(R)} \left( rac{1}{2} \mu_0 \; (ec{h}(t,ec{x}))^2 + rac{1}{2} \epsilon_0 \; (ec{e}(t,ec{x}))^2 
ight) \; dec{x}^3$$

▶ Si R >> L, d alors les expressions de  $\vec{e}$  et  $\vec{h}$  peuvent être utilisées dans D(R) et tous calculs faits

$$W_D(t,R) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_R^\infty \left(\frac{di}{dt}(t-\frac{r}{c})\right)^2 dr$$

37

## Puissance rayonnée

► Puisque formellement

$$\int_{R}^{\infty} \left(\frac{di}{dt}(t+\Delta t-\frac{r}{c})\right)^{2} dr = \int_{R-c \Delta t}^{\infty} \left(\frac{di}{dt}(t-\frac{r}{c})\right)^{2} dr$$

il devient possible d'obtenir l'énergie totale à l'instant t

$$W(t) = W_D(t,0)$$

par l'énergie dans D à un instant ultérieur t + R/c, soit

$$W(t) = W_D(t+R/c,R) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_R^\infty \left(\frac{di}{dt}(t-\frac{r-R}{c})\right)^2 dr$$

▶ d'où par changement de variable entre r et  $\alpha = t - (r - R)/c$ 

$$W(t) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi)^2 c} \int_{-\infty}^t \left(\frac{di}{dt}(\alpha)\right)^2 \frac{d\alpha}{c}$$

► La puissance rayonnée est alors

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi c)^2} \left(\frac{di}{dt}(t)\right)^2$$

## Puissance rayonnée

▶ Pour un rayonnement monochromatique

$$i(t) = \sqrt{2} \Re\{\underline{I} \exp^{i\omega t}\}$$
 avec  $(\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T})$ 

Cette puissance devient

 $p(t) = P + \text{ terme fluctuant en } 2\omega$ 

avec

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(cT)^2} |\underline{I}|^2 = R_{\mathsf{ray}} |\underline{I}|^2$$

► La « résistance de rayonnement » est définie par

$$R_{\mathsf{ray}} = \frac{2\pi}{3} z_0 \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$$

l'expression comporte les longueur d'onde et impédance caractéristique du vide

$$\lambda=c \ T$$
 ;  $z_0=\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 

## Direction de rayonnement

► Le rayonnement du dipôle oscillant se fait radialement mais pas de façon isotrope.

► Pour mettre ceci en évidence commodément il est intéressant d'introduire le vecteur de Poynting. En partant de

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{D(R)} \left( \mu_0 \ \vec{h}(t, \vec{x}) \cdot \partial_t \vec{h}(t, \vec{x}) + \epsilon_0 \ \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \partial_t \vec{e}(t, \vec{x}) \right) \ d\vec{x}^3$$

par injection directe des relations de Maxwell-Faraday, de Maxwell-Ampère et en tenant compte de ce que D ne comporte aucune source, il vient

$$rac{dW_D}{dt} = \int_{D(R)} \left( -ec{h}(t,ec{x})\cdotec{
abla} imesec{e}(t,ec{x}) + ec{e}(t,ec{x})\cdotec{
abla} imesec{h}(t,ec{x}) 
ight) \ dec{x}^3$$

## Vecteur de Pointing (1/2)

▶ en utilisant successivement la relation d'analyse vectorielle

$$ec{
abla} \cdot (ec{h} imes ec{e}) = ec{e} \cdot ec{
abla} imes ec{h} - ec{h} \cdot ec{
abla} imes ec{e}$$

et le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{\partial D(R)} \vec{h}(t, \vec{x}) \times \vec{e}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\vec{x}^2$$

où

$$\partial D(R) = \{ \vec{x} \text{ tq } \vec{x}^2 = R^2 \} ; \vec{n}(\vec{x}) = -\vec{x}/|\vec{x}|$$

sont les bord de D(R) et normale sortante à ce bord.

•  $\frac{dW_D}{dt}$  est la puissance entrant dans  $W_D$  à l'instant t, aussi peut-on accepter l'idée que le vecteur de Poynting

$$ec{s}(ec{x},t) = ec{e}(ec{x},t) imes ec{h}(ec{x},t)$$

soit tel que sa densité de flux sur une surface

$$p=\vec{s}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}$$

représente la densité de puissance sortant par cette surface.

## Vecteur de Pointing (2/2)

► Le vecteur de Pointing

$$ec{s}(ec{x},t)=ec{e}(ec{x},t) imesec{h}(ec{x},t)$$

quantifie la répartition de la puissance rayonnée totale par rapport à la direction à partir de l'expression

$$\frac{dW_D}{dt} = \int_{\partial D(R)} \vec{s}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \ d\vec{x}^2$$

► Mais il est possible d'ajouter une quantité  $q(\vec{x})$  quelconque telle que

$$\int_{\partial D(R)} q(\vec{x}) \ d\vec{x}^2 = 0$$

sans modifier cette puissance.

► Aussi l'utilisation du vecteur de Pointing est-elle susceptible de révision.

## Direction de rayonnement

► L'application du résultat sur la puissance sortante du complémentaire de de D(R) (qui est l'inverse de la puissance entrant dans D(R) et conduit à un changement de signe de la normale), il vient, toujours en utilisant

ainsi que les coordonnées sphériques

$$p(\theta,\phi,t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi c)^2} \left(\frac{di}{dt}(t-R/c)\right)^2 \frac{(\sin\theta)^2}{R^2}$$

dont l'intégrale sur le bord de la sphère est bien sûr la puissance totale trouvée précédemment

$$P(t) = \int_0^{2\pi} R \ d\phi \int_0^{\pi} R \ \sin\theta \ d\theta \ p(\theta, \phi, t)$$

## Direction de rayonnement

► La puissance rayonnée

$$p(\theta,\phi,t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{L^2}{(2\pi c)^2} \left(\frac{di}{dt}(t-R/c)\right)^2 \frac{(\sin\theta)^2}{R^2}$$

ne dépend pas de la composante suivant  $\phi$  (ce qui est cohérent avec la symétrie axisymétrique du dipôle) et dépend de sin  $\theta$ .

► C'est principalement dans les directions orthogonales à la direction  $\vec{k}_3$  que rayonne le dipôle oscillant.



## Émission et réception

► Si un brin de géométrie identique à celui qui a été décrit pour définir le dipôle élémentaire de Hertz est situé à la position  $\vec{x}$  et est dirigé suivant une direction  $\vec{k}$ ;

► Si ce brin est fait d'un matériau conducteur de l'électricité qui impose la loi d'Ohm en tous points du brin, alors le courant induit sera

$$\vec{j}_i(t,\vec{x}) = \sigma \left( \vec{e}(t,\vec{x}) + \vec{e}_i(t,\vec{x}) \right)$$

où *e* est le champ électrique incident

$$ec{e}(t,ec{x}) pprox -rac{\mu_0}{4\pi}rac{L}{dt}\left(t-rac{|ec{x}|}{c}
ight)rac{1}{|ec{x}|}\left(ec{k}_3-rac{ec{k}_3\cdotec{x}}{|ec{x}|^2}ec{x}
ight)$$

et  $\vec{e_i}$  est le champ électrique de réaction d'induit dans le brin.

## Émission et réception

► Dans le cas limite où le brin est fait d'un matériau très conducteur alors

$$\sigma \longrightarrow \infty \text{ et } |\vec{j_i}| < \infty \Longrightarrow \vec{e_i}(t, \vec{x}) = -\vec{e}(t, \vec{x})$$

le champ électrique de réaction d'induit est connu dans le brin : il s'oppose au champ source et crée une différence de potentiel entre les deux extrémités du brin qui peut servir de signal d'entrée à un récepteur.

► Quantitativement cette différence de potentiel est (lorsque le champ électrique ne varie presque pas sur la longueur du brin)

$$V \approx \vec{e_i} \cdot L \ \vec{k} = -\frac{\mu_0 \ L^2}{4\pi} \frac{di}{dt} \left( t - \frac{|\vec{x}|}{c} \right) \frac{(\vec{x} \times \vec{k}_3) \cdot (\vec{x} \times \vec{k})}{|\vec{x}|^3}$$

► Comme c'était prévisible, elle est maximale pour  $\vec{k}$  aligné à  $\vec{k_3}$  et  $\vec{x}$  orthogonal à  $\vec{k_3}$  et elle décroît en l'inverse du cube de la distance qui sépare les deux brins.

## Exercice : chauffage de billette

Fournir un modèle de calcul dont la variable d'état est la composante orthoradiale du potentiel vecteur pour un dispositif constitué d'une bobine à l'intérieur de laquelle se trouve une billette



en supposant que

- l'inducteur est composé de N spires axisymétriques de même axe dans lesquels circule le même courant;
- que la charge est également axisymétrique (de même axe que les spires);

En géométrie cylindrique  $\vec{x} = r \ \vec{k}_r + z \ \vec{k}_z$  on a

$$\vec{\nabla} \times \left( \mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \ \vec{k}_{\theta} \right) = -\partial_{z} \mathbf{a} \ \vec{k}_{r} + \frac{1}{r} \partial_{r} \left( \mathbf{r} \ \mathbf{a} \right) \ \vec{k}_{z}$$
$$\vec{\nabla} \times \left( \mathbf{b}_{r} \ \vec{k}_{r} + \mathbf{b}_{z} \ \vec{k}_{z} \right) = \left( \partial_{z} \mathbf{b}_{r} - \partial_{r} \mathbf{b}_{z} \right) \ \vec{k}_{\theta}$$

## **Exercices ondes**

**Exercice 1 :** Une formule pratique utilisée dans une norme propose déterminer l'intensité du champ électrique « au loin » dû au rayonnement d'une antenne est

Champ électrique en V/m = 
$$7$$
  
en  $\sqrt{\Omega}$   $\frac{\sqrt{Puissance effective rayonnée en W}}{distance à l'antenne en m}$ 

critiquer cette formule.

**Exercice 2 :** Examiner l'onde générée par un réseau de dipôles oscillants tous parallèles, de longueur *L* et disposés en *n* a  $\vec{k_2}$  pour  $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$  où a est une longueur de pas.