Équations macroscopiques de la physique classique

Elasticité statique

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

7 janvier 2014

Objectifs

- Introduire le concept de tenseurs ;
- Introduire les tenseurs de déformation et contrainte ;
- Formuler les équations de l'élasticité des petites déformations.

Élasticité

- Un matériau déformable occupe un domaine D de bord (∂D) ;

- ce matériau est sollicité par des forces exercées en
  - en volume par une densité de forces de volume donnée
    $\vec{f} \ : \ D_0 \longrightarrow E_3(N/m^3)$
  - et/ou en surface par une densité de forces
    $\vec{f_\partial} \ : \ \partial D_0 \longrightarrow E_3(N/m^2)$

- Le matériau est élastique s'il possède une forme correspondant à un domaine D_0 (de référence) tel que, en l'absence des sollicitations,

$$D = D_0$$

et qu'en leur présence « il se crée » un système de forces (élastiques) qui équilibre exactement ces sollicitations.

Champ de vecteur = tenseur d'ordre 1

▶ La description du système de forces qui se créent se fait à partir d'un objet mathématique plus compliqué qu'un champ de vecteurs : un tenseur d'ordre 2. Avant de le définir, les champs de vecteurs vont être décrits comme tenseurs d'ordre 1.

▶ Dans une base $b = (\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z)$ orthonormée, la position est

$$\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y + z\ \vec{k}_z$$

et un champ de vecteur

$$\vec{u} = u_x\ \vec{k}_x + u_y\ \vec{k}_y + u_z\ \vec{k}_z$$

où les u_i sont des variables dépendantes de (x, y, z).

▶ En convenant de ne pas changer de base, le champ de vecteur peut être assimilé à un vecteur de R^3 de composantes u_x, u_y, u_z. On convient de dire que ces composantes représentent dans la base b un tenseur d'ordre 1 qui est le champ de vecteur.

Tenseurs

▶ Un tenseur T d'ordre 2 se représente dans la base b comme une matrice 3×3 de composantes T_{ij} avec $i = x, y, z$ et $j = x, y, z$.

▶ Les tenseurs d'ordre 1 et 2 sont représentés par leurs composantes u_i et T_{ij} lesquelles sont fonctions de la position, c'est à dire du tenseur d'ordre 1 (x, y, z) ; mais ils ne s'identifient pas avec elles puisque ces composantes ne peuvent s'exprimer que lorsqu'une base b est spécifiée.

▶ Le tenseur d'ordre 1 et 2 est « l'objet intrinsèque » dont les composantes sont la représentation. Par exemple le tenseur position est x, y, z pour la base b, mais dans la base $b' = (\vec{k}'_x, \vec{k}'_y, \vec{k}'_z)$ il devient x', y', z' avec

$$\vec{x} = x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y + z\ \vec{k}_z = x'\ \vec{k}'_x + y'\ \vec{k}'_y + z'\ \vec{k}'_z$$

▶ Un tenseur d'ordre 0 est un champ scalaire ; il ne dépend donc d'aucune base.

Tenseur des dilatations

► Sous l'effet des sollicitations, le domaine D_0 se transforme en le domaine D, et plus précisément il y a une application (très semblable au flot mais ici il n'y a pas de temps)

$$\begin{array}{rcccl} \vec{\Phi} & : & D_0 & \longrightarrow & E_3 \qquad \text{telle que } \vec{\Phi}(D_0) = D \\ & & \vec{X} & \longrightarrow & \vec{\Phi}(\vec{X}) \end{array}$$

qui permet d'associer la position $\vec{X}$ dans le domaine de référence D_0 à la position $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X})$ dans le domaine déformé D.

► Avec la base b où $\vec{X} = x\,\vec{k}_x + y\,\vec{k}_y + z\,\vec{k}_z$, $\vec{\Phi}$ peut être décrit par le tenseur d'ordre 1, Φ, dont les composantes sont Φ_x, Φ_y, Φ_z

► Le tenseur des dilatations est le tenseur d'ordre 2 de composantes D_{ij} telles que

$$\begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_x\Phi_x & \partial_x\Phi_y & \partial_x\Phi_z \\ \partial_y\Phi_x & \partial_y\Phi_y & \partial_y\Phi_z \\ \partial_z\Phi_x & \partial_z\Phi_y & \partial_z\Phi_z \end{pmatrix}}_{= {}^t\nabla\Phi} \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_x\Phi_x & \partial_y\Phi_x & \partial_z\Phi_x \\ \partial_x\Phi_y & \partial_y\Phi_y & \partial_z\Phi_y \\ \partial_x\Phi_z & \partial_y\Phi_z & \partial_z\Phi_z \end{pmatrix}}_{= \nabla\Phi}$$

formé par le produit matriciel de la transposée du gradient de Φ par ce gradient.

Tenseur des déformations

► Le tenseur des déformations est le tenseur d'ordre 2 de composantes

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(D_{ij} - \delta_{ij}\right) \text{ avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

► La propriété essentielle du tenseur des déformations est qu'il est nul si et seulement si $\vec{\Phi}$ est un mouvement de solide indéformable :

$$\epsilon_{ij} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= R_\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{= R_\theta} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= R_\psi}}_{= R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

où x_0, y_0, z_0 définissent la translation et les angles (d'Euler) ϕ, θ, ψ la rotation.

Tenseur des déformations

▶ Le tenseur des déformation hérite du tenseur des dilatations la propriété de symétrie

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

▶ Et donc, dans toutes les bases, sa matrice de composantes possède 3 valeurs propres associées à 3 directions propres qui peuvent toujours être rendues orthogonales entre elles. Et ces directions ne dépendent pas de la base choisie.

▶ Les valeurs propres sont appelées les déformations normales principales et et les vecteur propres les directions principales de déformation.

▶ Mais ces déformations et directions principales peuvent varier avec la position dans D.

Hypothèse des petites déformations

- $\vec{\Phi}$ peut être exprimée comme

$$\vec{\Phi}(\vec{X}) = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X})$$

où le champ de vecteurs $\vec{u}$ s'appelle le déplacement.

- La matrice ϵ du tenseur des déformations de composantes ϵ_{ij} est alors

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla u + {}^t\nabla u + ({}^t\nabla u)\,(\nabla u)\right) \text{ où } \nabla u = \begin{pmatrix} \partial_x u_x & \partial_y u_x & \partial_z u_x \\ \partial_x u_y & \partial_y u_y & \partial_z u_y \\ \partial_x u_z & \partial_y u_z & \partial_z u_z \end{pmatrix}$$

- Elle comporte un terme linéaire en u et un terme quadratique. L'hypothèse des petites déformations consiste à négliger le terme quadratique et donc écrire

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla u + {}^t\nabla u\right) = \begin{pmatrix} \partial_x u_x & \frac{1}{2}(\partial_y u_x + \partial_x u_y) & \frac{1}{2}(\partial_z u_x + \partial_x u_z) \\ \frac{1}{2}(\partial_x u_y + \partial_y u_x) & \partial_y u_y & \frac{1}{2}(\partial_z u_y + \partial_y u_z) \\ \frac{1}{2}(\partial_x u_z + \partial_z u_x) & \frac{1}{2}(\partial_y u_z + \partial_z u_y) & \partial_z u_z \end{pmatrix}$$

- Le prix de cette simplification est qu'il n'est plus vrai que le tenseur des déformation est nul si et seulement si $\vec{\Phi}$ est un mouvement de solide indéformable.

Plus de nécessité de séparer les coordonnées lagrangienne et eulérienne

► À ceci près que le temps n'a pas été introduit comme argument de $\vec{\Phi}$, la distinction entre positions $\vec{X}$ dans D_0 et position $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X})$ dans D correspond à celle des coordonnées lagrangienne $(\vec{X})$ et eulérienne $(\vec{x})$.

► Dans l'hypothèse des petites déformations, $\vec{u}$ est « petit » et donc une confusion entre coordonnées lagrangienne et eulériennes conduit à une erreur qui est exactement l'ordre de l'approximation. Par exemple si on prend $\vec{u}(\vec{x})$ plutôt que $\vec{u}(\vec{X})$ l'écart est

$$\vec{u}(\vec{X} + \vec{u}(\vec{X})) - \vec{u}(\vec{x}) \approx (\vec{\nabla}\vec{u}(\vec{X}))\ \vec{u}(\vec{X})$$

qui est d'ordre 2 en $\vec{u}$.

► Il est donc possible de confondre les deux types de coordonnées, ce qui procure une simplification considérable dans les expressions.

Tenseur des contraintes

► Le système de forces qui équilibre exactement les sollicitations s'introduit par un nouveau tenseur d'ordre 2 : le tenseur des contraintes σ_{ij} qui est tel que si f_i et $f_{\partial i}$ sont les composantes des densités de forces $\vec{f}$ et $\vec{f}_\partial$ qui définissent la sollicitation, alors

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_x\sigma_{xx} + \partial_y\sigma_{xy} + \partial_z\sigma_{xz} + f_x &=& 0 \\ \partial_x\sigma_{yx} + \partial_y\sigma_{yy} + \partial_z\sigma_{yz} + f_y &=& 0 \\ \partial_x\sigma_{zx} + \partial_y\sigma_{zy} + \partial_z\sigma_{zz} + f_z &=& 0 \end{array}\right\} \text{ dans } D_0 \approx D$$

et, pour n_i les composantes du vecteur normal dirigé vers l'extérieur,

$$\left.\begin{array}{rcl} n_x\ \sigma_{xx} + n_y\ \sigma_{xy} + n_z\ \sigma_{xz} &=& f_{\partial x} \\ n_x\ \sigma_{yx} + n_y\ \sigma_{yy} + n_z\ \sigma_{yz} &=& f_{\partial y} \\ n_x\ \sigma_{zx} + n_y\ \sigma_{zy} + n_z\ \sigma_{zz} &=& f_{\partial z} \end{array}\right\} \text{ sur } \partial D_0 \approx \partial D$$

► De plus le tenseur des contraintes est symétrique

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

ce choix étant nécessaire pour que les moments des densités de forces soient également équilibrés.

Loi de Hooke avec Lamé

▶ Le comportement élastique du matériau se traduit par une relation entre tenseurs des contraintes et déformation.

▶ Dans le cas où le matériau est isotrope, isotherme et que la relation est supposée linéaire cette relation s'appelle la loi de Hooke et prend la forme

$$\sigma_{ij} = \lambda \, \mathrm{tr}(\epsilon) \, \delta_{ij} + 2 \, \mu \, \epsilon_{ij} \text{ avec } \mathrm{tr}(\epsilon) = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

▶ La forme développée est $(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z)$

$$\sigma = \lambda \, \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \, \partial_x u_x & (\partial_y u_x + \partial_x u_y) & (\partial_z u_x + \partial_x u_z) \\ (\partial_y u_y + \partial_y u_x) & 2 \, \partial_x u_x & (\partial_z u_y + \partial_y u_z) \\ (\partial_x u_z + \partial_z u_x) & (\partial_y u_z + \partial_z u_y) & 2 \, \partial_z u_z \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\sigma = \begin{pmatrix} (\lambda + 2 \, \mu)\partial_x u_x + \lambda(\partial_y u_y + \partial_z u_z) & \mu(\partial_y u_x + \partial_x u_y) & \mu(\partial_z u_x + \partial_x u_z) \\ \mu(\partial_x u_y + \partial_y u_x) & \lambda \partial_x u_x + (\lambda + 2\mu)\partial_y u_y + \lambda \partial_z u_z & \mu(\partial_z u_y + \partial_y u_z) \\ \mu(\partial_x u_z + \partial_z u_x) & \mu(\partial_y u_z + \partial_z u_y) & \lambda(\partial u_x + \partial u_y) + (\lambda + 2\mu)\partial_z u_z \end{pmatrix}$$

Équation de Navier et conditions aux limites

► L'injection de l'expression du tenseur des contraintes en fonction du déplacement conduit à l'équation de Navier

$$(\lambda + \mu)\, \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + \mu\, \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{f} = \vec{0} \text{ dans } D_0$$

dont l'inconnue est le déplacement $\vec{u}$ seul et qui s'exprime entièrement avec les opérateurs vectoriels.

► Sur le bord ∂D_0 de normale extérieure dont les composantes sont n_x, n_y, n_z, par contre, les équations restent volumineuses

$$\begin{aligned}
(\lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + 2\, \mu\, \partial_x u_x)\, n_x + \mu\, (\partial_y u_x + \partial_x u_y)\, n_y + \mu\, (\partial_z u_x + \partial_x u_z)\, n_z &= f_{\partial x} \\
(\lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + 2\, \mu\, \partial_y u_y)\, n_y + \mu\, (\partial_x u_y + \partial_x u_y)\, n_x + \mu\, (\partial_z u_y + \partial_y u_z)\, n_z &= f_{\partial y} \\
(\lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + 2\, \mu\, \partial_z u_z)\, n_z + \mu\, (\partial_x u_z + \partial_z u_x)\, n_x + \mu\, (\partial_y u_z + \partial_z u_y)\, n_y &= f_{\partial z}
\end{aligned}$$

► Ce jeu d'équations de volume et aux limites est suffisant pour le calcul du déplacement $\vec{u}$.

Conditions aux limites « en déplacement »

► Lorsqu'on ne connaît pas pas les densités de forces surfacique $\vec{f_\partial}$ sur une portion de la frontière Γ mais qu'on y connaît les déplacements $\vec{u}$

$$\vec{u} = \vec{u_p} \text{ sur } \Gamma \subset \partial D_0$$

Cette donnée sert de condition aux limites sur cette portion Γ.

► Et alors les équations d'équilibre précédentes

$$\begin{aligned}
(\lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) + 2\,\mu\,\partial_x u_x)\,n_x + \mu\,(\partial_y u_x + \partial_x u_y)\,n_y + \mu\,(\partial_z u_x + \partial_x u_z)\,n_z &= f_{\partial x} \\
(\lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) + 2\,\mu\,\partial_y u_y)\,n_y + \mu\,(\partial_x u_y + \partial_x u_y)\,n_x + \mu\,(\partial_z u_y + \partial_y u_z)\,n_z &= f_{\partial y} \\
(\lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) + 2\,\mu\,\partial_z u_z)\,n_z + \mu\,(\partial_x u_z + \partial_z u_x)\,n_x + \mu\,(\partial_y u_z + \partial_z u_y)\,n_y &= f_{\partial z}
\end{aligned}$$

qui ont été ainsi inutilisées pour le calcul de $\vec{u}$ appliquée permettent permettent de trouver la densité superficielle $\vec{f_\partial}$ qu'il faudrait mettre sur Γ pour que le déplacement soit bien $\vec{u_p}$.

Module d'Young & coefficient de Poisson

► Les valeurs des coefficients de Lamé sont des caractéristiques de matériaux, d'unité le Pa, mais on trouve plutôt dans la littérature la donnée des module d'Young E (en Pa) et coefficient de Poisson ν reliés à λ et μ (sans unité) par

$$\lambda = \frac{\nu\, E}{(1-2\,\nu)(1+\nu)}\ ;\ \mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \Longleftrightarrow E = \frac{\mu\,(3\,\lambda+2\,\mu)}{\lambda+\mu}\ ;\ \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)}$$

► La raison de ce choix est pratique comme cela apparaît dans l'application sur la traction d'une éprouvette ci dessous.

Formulation variationnelle

► L'équation de Navier et ses conditions aux limites auraient pu être obtenues directement en considérant

$$V = \frac{1}{2} \int_{D_0} \left(\sum_{i,j} \sigma_{ij} \, \epsilon_{ij} \right) \, d\vec{x}^3 - \int_{D_0} \vec{f} \cdot \vec{u} \, d\vec{x}^3 - \int_{\partial D_0} \vec{f}_{\partial} \cdot \vec{u} \, d\vec{x}^2$$

avec

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\nabla u + {}^t\nabla u \right) \; ; \; \sigma_{ij} = \lambda \, \mathrm{tr}(\epsilon) \, \delta_{ij} + 2 \, \mu \, \epsilon_{ij}$$

► La valeur de V dépend de $\vec{u}$ et le $\vec{u}$ particulier qui est tel que V atteigne son minimum est précisément celui qui est solution des équations d'équilibres.

► La démonstration de ce résultat se fait dans le cadre du calcul des variations de variables réparties mais par delà la technique mathématique qui y conduit V est l'expression de l'énergie élastique et l'équilibre correspond donc à son mimimum.

► Pratiquement la considération de V peut simplifier les calculs : d'abord en utilisant la méthode de Ritz (les coefficients d'une paramétrisation analytique de $\vec{u}$ sont trouvés par la recherche du minimum de V) ensuite parce qu'elle peut facilement être utilisée sur une discrétisation de $\vec{u}$ sur une base d'éléments finis.

Équations de Beltrami

► Dans la leçon on considère essentiellement que la variable inconnue à calculer est le champ de déplacement $\vec{u}$; le tenseur des déformations ϵ est directement paramétré par $\vec{u}$; le tenseur des contrainte σ s'exprimer donc en fonction de $\vec{u}$ par la loi de Hooke et le champ de déplacement restent donc seul en lice pour le calcul.

► Il est également possible de procéder inversement en exprimant ϵ en fonction de σ puis en cherchant les conditions sur σ pour que la forme donnée à ϵ soit compatible avec celle qu'elle a en fonction de $\vec{u}$.

► Cela conduit aux équations de Beltrami, qui ne seront pas explicitées ici bien que leur considération puisse être simplifiante dans certains cas.

Limite élastique

► Un matériau n'a un comportement élastique qu'en deçà d'un certain seuil de contrainte, au delà il casse ou devient plastique. Il convient donc de fixer une limite élastique aux contraintes.

► Pour une position $\vec{X}$ dans D_0 et une direction $\vec{N}$, la force due au tenseur des contraintes dans cette direction est $\vec{F}$ qui peut s'écrire

$$\vec{F} = F_n \, \vec{N} + \vec{F}_t \text{ avec } \vec{F}_t \cdot \vec{N} = 0$$

F_n est la force qui correspond à une pression dans la direction $\vec{N}$ du point matériel occupant $\vec{X}$ alors que $|\vec{F}_t|$ correspond à un cisaillement.

► La limite élastique porte en général sur le cisaillement et un critère possible est l'exigence qu'en toute position, le cisaillement maximal (par rapport à toutes les directions possibles) soit inférieur à un seuil fixé, c'est le critère de Tresca.

► Pratiquement (analyse du cercle de Mohr) ce cisaillement maximum en une position est $(\sigma_{III} - \sigma_I)/2$ où $\sigma_I \leq \sigma_{II} \leq \sigma_{III}$ sont les valeurs propres de la matrice σ_{ij} et donc le critère de Tresca s'écrit

$$(\sigma_{III} - \sigma_I)/2 < \text{ seuil de limite élastique en cisaillement}$$

Exemple : la traction d'une éprouvette 1/3

- L'éprouvette est un domaine

$$D_0 = \{\vec{x} \text{ avec } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in S \subset E_2 \ \text{ et } 0 < z < L\}$$

Son bord ∂D_0 est composé de la surface latérale
$\Gamma_l = \{\vec{x} \text{ avec } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in \partial S \text{ et } 0 < z < L\}$ et des bases
$\Gamma_0 = \{\vec{x} \text{ avec } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in S \text{ et } z = 0\}$,
$\Gamma_1 = \{\vec{x} \text{ avec } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in S \text{ et } z = L\}$

- Le déplacement est $\vec{u} = u\ \vec{k}_x + v\ \vec{k}_y + w\ \vec{k}_z$; l'éprouvette est fixée en Γ_0 et donc $w = 0$ en $z = 0$; elle se déplace de ΔL en Γ_1, soit : $w = \Delta L$ en $z = L$.

- Elle n'est soumise à aucune sollicitation en Γ_l, et donc si σ_{ij} est le tenseur des contraintes et que $n_x\ \vec{k}_x + n_y\ \vec{k}_y$ est la normale sur ∂S alors

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{xx}\ n_x + \sigma_{xy}\ n_y = 0 \\ \sigma_{yx}\ n_x + \sigma_{yy}\ n_y = 0 \end{array}\right\} \text{ pour } x\ \vec{k}_x + y\ \vec{k}_y \in \partial S \text{ et } \forall z \in]0, L[$$

Exemple : la traction d'une éprouvette 2/3

- Le déplacement

$$\vec{u} = -\alpha\ x\ \vec{k}_x - \alpha\ y\ \vec{k}_y + \frac{\Delta L}{L}\ z\ \vec{k}_z$$

satisfait à l'équation de Navier (ou $\vec{f} = \vec{0}$: pas de sollicitation de volume), soit

$$(\lambda + \mu)\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right) + \mu\ \vec{\Delta}\vec{u} = \vec{0} \text{ dans } D_0$$

- Le tenseur des déformations est $\epsilon = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta L}{L} \end{pmatrix}$
- Le tenseur des contraintes

$$\sigma = \begin{pmatrix} (\frac{\Delta L}{L} - 2\ \alpha)\ \lambda - 2\alpha\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\Delta L}{L} - 2\ \alpha)\ \lambda - 2\alpha\ \mu & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\Delta L}{L} - 2\ \alpha)\ \lambda + 2\frac{\Delta L}{L}\ \mu \end{pmatrix}$$

Exemple : la traction d'une éprouvette 3/3

- Les conditions aux limites sur Γ_l se réduisent alors à

$$(\frac{\Delta L}{L} - 2\,\alpha)\,\lambda - 2\alpha\,\mu = 0$$

soit

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L}\frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)} = \nu\,\frac{\Delta L}{L}$$

on comprend ainsi l'intérêt du coefficient de Poisson.

- Les équations d'équilibre en Γ_0 sont

$$f^0_{\partial x} = 0\ ;\ f^0_{\partial y} = 0\ ;\ f^0_{\partial z} = -\left((\frac{\Delta L}{L} - 2\,\alpha)\,\lambda + 2\frac{\Delta L}{L}\,\mu\right) = -E\,\frac{\Delta L}{L}$$

on comprend là l'intérêt du module d'Young.
Il n'y a pas de sollicitation de surface en $\vec{k}_x$ et $\vec{k}_y$ à mettre pour la traction, par contre il en faut une en $\vec{k}_z$.

Exemple : la traction d'une éprouvette 4/3

- de la même façon, en Γ_1,

$$f^1_{\partial x} = 0 \; ; \; f^1_{\partial y} = 0 \; ; \; f^1_{\partial z} = +E \, \frac{\Delta L}{L}$$

la composante suivant $\vec{k}_z$ est égale et opposée à celle de Γ_0.

- Le problème de traction est donc complétement résolu :
un allongement relatif de $\Delta L/L$ peut être réalisé en soumettant l'éprouvette à deux forces égales et opposées s'exerçant sur Γ_0 et Γ_1 avec une densité de surface uniforme d'intensité $E \, \Delta L/L$.

- De plus l'épouvette subira une contraction de sa section (qui peut être quelconque) correspondant à l'homothétie de rapport $\nu \, \Delta L/L$; la variation de volume de l'éprouvette sera donc

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(1 - \nu \frac{\Delta L}{L}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) - 1 \approx 1 - \nu \frac{\Delta L}{L}$$

Exemple : la traction d'une éprouvette 5/3

- In fine, le tenseur des contraintes est $\sigma = E\,\frac{\Delta L}{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

donc la valeur à comparer au seuil de limite élastique en utilisant le critère de Tresca est $\frac{E}{2}\frac{\Delta L}{L}$.

- Le plan d'étude de cet exemple emblématique a été le suivant :
  1. On devine une forme éventuellement paramétrée pour le déplacement ;
  2. On cherche les conditions sur le paramétrage pour que Navier soit vérifié ;
  3. Même chose sur les conditions aux limites ;
  4. Le problème est alors résolu ; il reste à vérifier avec le critère de Tesca que la limite élastique n'est pas franchie.

C'est ce plan qu'il faut suivre : dans les cas plus compliqués il faut utiliser un logiciel pour calculer le déplacement.

Principe de Saint Venant

► Si l'éprouvette de l'exemple avait été coincée dans des mâchoires mordant sur les parties de Γ_l prochent de Γ_0 et Γ_1, il aurait été assez difficile d'énoncer clairement la forme des conditions aux limites.

► Mais il est possible d'approximer ce problème difficile par celui facile qui vient d'être traité en espérant que les résultats de l'approximation soient proches de ceux du problème initial.

► On invoque pour cela l'autorité de Saint Venant qui pose en principe que de remplacer un système de forces par un autre ne change pas sensiblement la solution loin de l'endroit où ils s'appliquent pourvu que les deux systèmes de forces soit indiscernables dans le cas où le domaine D_0 serait un solide indéformable.

► C'est une escroquerie mais une escroquerie qui porte un nom est en quelque sorte consacrée et donc socialement admissible. Il est d'ailleurs possible d'évoquer le nom de Saint Venant quand on souhaite faire une approximation de ce genre dans d'autres domaines que celui de la mécanique (par exemple décider qu'une densité de courant électrique est répartie uniformément dans une section de conducteur).

Deux domaines en contact

► Si deux domaines élastiques D_1 et D_2 sont en contact l'un avec l'autre et ont donc une frontière Γ commune, les problèmes d'élasticité de chacun des domaines peuvent s'écrire comme cela a été décrit à l'exception des relations sur cette frontière.

► Ces relations sont que les forces de surface (i.e. la composante normale du tenseur des contraintes) dues aux deux tenseurs σ^1_{ij} et σ^2_{ij} sont identiques. Soit, en convenant d'une orientation commune pour les deux domaines de la normale $\vec{n}$ à la frontière Γ

$$\sigma^1_{ix} n_x + \sigma^1_{iy} n_y + \sigma^1_{iz} n_z = \sigma^2_{ix} n_x + \sigma^2_{iy} n_y + \sigma^2_{iz} n_z \text{ pour } i = x, y, z$$

► Cette ≪ simple ≫ considération permet de traiter une grande quantité de problèmes pratiques mettant en présence des milieux composites.

► La limitation vient de ce que les matériaux anisotropes (pour lesquels les module d'Young et coefficient de Poisson varient selon la direction où ils sont considérés) et inhomogènes (ces coefficients varient avec la position) n'ont pas été traités. La relation de continuité de la composante normale du tenseur des contraintes en est d'ailleurs une clée d'entrée...

Milieu élastiques

► Dans certaines limites de déformation, tous les matériaux peuvent être considérés comme élastiques aux petites déformations.

► Mais on retiendra qu'il s'agit surtout de métaux pour lesquels le modules d'Young est de l'ordre de la centaine de giga Pascal et le coefficient de Poisson de l'ordre de 0.3.

► On trouve également des verres, roches mais il faut faire attention que ces matériaux sont fréquemment anisotropes, par exemple du fait de sa structure granulaire le béton se comporte très différemment en compression et en traction (qu'il ne $\ll$ tient $\gg$ pas).

► Certains matériaux que la pensée associe à l'élasticité, comme le caoutchouc, ont des modules d'Young de l'ordre du mega Pascal et surtout un coefficient de Poisson qui vaut presque exactement 0.5, ce qui correspond à $\mu = 0$ et donc à un comportement entièrement déterminé par la compression (le cisaillement ne compte pas). Mais ces matériaux ne sont généralement pas utilisés en petites déformations.

► Et pour finir, un fluide parfait (viscosité nulle) ou encore dans lequel l'écoulement est nul (hydrostatique) est un milieu élastique dans lequel le tenseur des contraintes est $P\,\delta_{ij}$ où P est la pression dans le fluide.

Coordonnées cylindriques

► Si la position et les champs de vecteur sont données par leur composantes suivant les vecteurs $\vec{k}_r, \vec{k}_\theta, \vec{k}_z$, les formules de calcul sont : pour $\vec{u} = u\,\vec{k}_r + v\,\vec{k}_\theta + w\,\vec{k}_z$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial_r(r\,u)}{r} + \frac{\partial_\theta v}{r} + \partial_z w \;;\; \vec{\nabla}\phi = \partial_r\phi\,\vec{k}_r + \frac{\partial_\theta\phi}{r}\,\vec{k}_\theta + \partial_z\phi\,\vec{k}_z$$

$$\vec{\Delta}\vec{u} = \left(\partial_r\left(\frac{\partial_r(r\,u)}{r}\right) + \frac{\partial^2_{\theta\theta}u}{r^2} + \partial^2_{zz}u - 2\frac{\partial_\theta v}{r^2}\right)\,\vec{k}_r$$
$$+\left(\partial_r\left(\frac{\partial_r(r\,v)}{r}\right) + \frac{\partial^2_{\theta\theta}v}{r^2} + \partial^2_{zz}v + 2\frac{\partial_\theta u}{r^2}\right)\,\vec{k}_\theta + \left(\frac{\partial_r(r\partial_r w)}{r} + \frac{\partial^2_{\theta\theta}w}{r^2} + \partial^2_{zz}w\right)\,\vec{k}_z$$

Le tenseur des déformations est

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \partial_r u & \frac{1}{2}\left(r\,\partial_r\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{\partial_\theta u}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\partial_z u + \partial_r w\right) \\ \frac{1}{2}\left(r\,\partial_r\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{\partial_\theta u}{r}\right) & \frac{\partial_\theta v}{r} + \frac{u}{r} & \frac{1}{2}\left(\partial_z v + \frac{\partial_\theta w}{r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\partial_z u + \partial_r w\right) & \frac{1}{2}\left(\partial_z v + \frac{\partial_\theta w}{r}\right) & \partial_z w \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes est

$$\sigma = \lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2\,\partial_r u & r\,\partial_r\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{\partial_\theta u}{r} & \partial_z u + \partial_r w \\ r\,\partial_r\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{\partial_\theta u}{r} & 2\left(\frac{\partial_\theta v}{r} + \frac{u}{r}\right) & \partial_z v + \frac{\partial_\theta w}{r} \\ \partial_z u + \partial_r w & \partial_z v + \frac{\partial_\theta w}{r} & 2\,\partial_z w \end{pmatrix}$$

Exercice 1 : Torsion d'une éprouvette

▶ Les notations de l'exemple sur la traction d'une éprouvette sont reprises. En torsion, le déplacement est de la forme

$$\vec{u} = \frac{\Theta}{L}\left(-y\ z\ \vec{k}_x + x\ z\ \vec{k}_y + \phi(x,y)\ \vec{k}_z\right)$$

où Θ est l'angle de la rotation que subit Γ_1 et ϕ une fonction à déterminer.

1) Trouver un problème dont la résolution permet de calculer ϕ ; en déduire le couple M à appliquer pour obtenir l'angle Θ

2) Dans le cas axisymétrique où la section de l'éprouvette est circulaire ϕ se calcule : donner la relation entre M et Θ, trouver la valeur à comparer à un seuil dans le critère de Tresca.

3) Toujours dans le cas de 2), reprendre la question 1 en utilisant les coordonnées cylindriques.

Exercice 2 & 3 : Flexion d'une éprouvette & tube sous pression

► Les notations de l'exemple sur la traction d'une éprouvette sont reprises. En flexion autour de $\vec{k}_y$, le déplacement est de la forme

$$\vec{u} = \frac{M}{E\ I}\left(\frac{z^2 + \nu(x^2 - y^2)}{2}\ \vec{k}_x + \nu\ x\ y\ \vec{k}_y - x\ z\vec{k}_z\right)$$

où M et I sont des paramètres.

Identifier M et I, trouver la valeur à comparer à un seuil dans le critère de Tresca.

► Un tube de rayons intérieur et extérieur R_i et R_x est soumis à une pression extérieure P0 et intérieure $P0 + \Delta P$.

Calculer le déplacement, le tenseur de contrainte et le critère de limite élastique.