Équations macroscopiques de la physique classique
Fondamentaux

TDs

G. Vinsard

Gerard.Vinsard@univ-lorraine.fr

4 avril 2023

Exercice No1 : Diffusion 1D

- Chercher les solutions de

$$\text{pour } x > 0 \;:\; D\,\partial_{xx}\rho - \partial_t\rho = 0\;;\; \rho(t=0,x) = 0$$

qui sont de la forme

$$\rho(t,x) = F\left(\frac{x}{2\,\sqrt{D\,t}}\right) \text{ avec } F \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & F(u) \end{array} \text{ à déterminer}$$

- En supposant que la diffusivité du sel dans l'eau est $D = 10^{-9}\ m^2/s$ et que la concentration massique en $x = 0$ est de 360 g/l, combien de temps faudrait-il pour atteindre une concentration de 30 g/l (eau de mer) à $x = 10cm$?

- L'eau est dans un domaine $0 < x < L$ qui est limité en L par une paroi. Si la paroi ne laisse pas passer le sel, que devient la concentration dans l'eau au bout d'un temps infini ?
Même question si elle laisse passer le sel avec un flux de la forme $\Phi_L = \alpha\,\rho(t,L)$.

Exercice No2 : le tore axisymétrique à section circulaire

- Donner une représentation paramétrique du tore ; puis une représentation implicite ;
- Donner une représentation paramétrique du bord du tore ; puis une représentation implicite ;
- Calculer la normale extérieure sur ce bord dans les deux représentations ; voir que cette normale ne dépend pas de la representation faite ;
- Calculer le volume du tore et la surface de son bord.

Exercice No3 : Propagation 1D

- On donne une onde progressive de la forme

$u\,(t,x) = u_0\,(x - c\;t)$ avec $u_0\,(x) = \begin{cases} \frac{\left(\delta^2 - x^2\right)^2}{\delta^4} & \text{si } x \in \,]-\delta,\delta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer qu'elle est bien solution de l'équation d'onde 1D
$c\;\partial^2_{x^2} u - \partial^2_{t^2} u = 0$

- Cette onde rencontre un obstacle à la distance $L > \delta$ qui se traduit par l'une de ces conditions aux limites

1. $u(t, x = L) = 0$
2. $\partial_x u(t, x = L) = 0$
3. $c\;\partial_x u(t, x = L) = -\partial_t u(t, x = L)$

Pour chacune d'entres elles, décrire ce qui se passe.

Exercice No4 : Expressions en coordonnées curvilignes

► Utiliser la formule de Stokes pour trouver la composante dirigée suivant le rayon vecteur ($\vec{k}_r$) du rotationnel d'un champ de vecteurs en coordonnées sphériques.

Pour cela

- Vérifier que la surface $\delta S = \left\{ R\ \vec{k}_r\ :\ (\Theta < \theta < \Theta + \delta\Theta) \text{ et } (\Psi < \psi < \Psi + \delta\Psi) \right\}$ convient ;
- Donner sous forme paramétrique les 4 lignes $(\delta\Gamma_s, \delta\Gamma_e, \delta\Gamma_n, \delta\Gamma_w)$ qui constituent le bord de dS ;
- Calculer $\int_{\delta S} \vec{\nabla} \times \vec{a}\, dS$ à l'ordre 2 en $\delta\Theta$, $\delta\Psi$;
- Calculer pour chacune des lignes $\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau}\, dL$ à l'ordre 2 en $\delta\Theta$, $\delta\Psi$ et en faire la somme ;
- Identifier les deux résultats et conclure.

Exercice No5 : Tube sous pression

- Un tube de longueur infinie de rayons intérieur et extérieur R_i et R_x est soumis à une pression extérieure P_0 et intérieure $P_0 + \Delta P$.

On considère que le champ de déplacement est de la forme $u(r)\ \vec{k}_r$,

- Calculer le tenseur des déformations ;
- Puis le tenseur des contraintes avec la loi de Hooke ;
- Écrire l'équation de Navier ;
- Puis les conditions aux limites traduisant la présence des pressions intérieures et extérieurs ;
- En déduire l'expression de u ;
- Puis celle du tenseur des contraintes ;
- Écrire alors la condition correspondant au critère de Tresca.

Exercice No6 : Écoulement laminaire le long d'un plan incliné

- Un fluide s'écoule sur un plan incliné d'un angle θ par rapport avec l'horizontale en présence d'un champ de gravité $-g\ \vec{k_z}$; on suppose que le domaine liquide est un film d'épaisseur constante e soit

$$D = \{s\ \vec{\tau} + \zeta\ \vec{n}\ \text{ pour } 0 < \zeta < e\}$$

où

$$\vec{\tau} = \cos\theta\ \vec{k_x} - \sin\theta\ \vec{k_z}\ ;\ \vec{n} = \sin\theta\ \vec{k_x} + \cos\theta\ \vec{k_z}$$

- Calculer l'écoulement stationnaire en supposant que le champ de vitesse est dirigé suivant $\vec{\tau}$ et que son profil ne dépend que de ζ, soit

$$\vec{v} = v(\zeta)\ \vec{\tau}$$

que la vitesse est nulle en $\zeta = 0$ et que les forces superficielles en $\zeta = e$ s'équilibrent avec celle qui sont dues à la pression atmosphérique.

- En déduire une relation entre débit d par unité de longueur transversale (suivant $\vec{k_y}$) et épaisseur e.

Exercice No7 : Écoulement de Poiseuille plan de fluides superposés

- Deux fluides non missibles de masses volumique ρ_1 et ρ_2 et viscosités μ_1 et μ_2 différentes sont superposés (le plus lourd en dessous) en deux couches d'épaisseurs e_1 et e_2.

- Ces couches sont placées entre deux parois planes solides ; celle de dessous est immobile et celle du dessus est entrainé à la vitesse $V\ \vec{k}_x$; calculer l'écoulement.

- Que se passe-t-il lorsque l'une des viscosités est beaucoup plus grande que l'autre ?